

# 微分方程及其应用

[美國] H. 毕茨等著

徐偉成 乐茂生 曉燕譯

上海科學技術出版社

## 內 容 提 要

本書敘述微分方程的一般理論，特別着重于微分方程在物理学，生物学以及一些工程問題中的应用。書中对拉普拉斯变换，算符法，数值解法及偏微分方程等也有專章討論，以工程技术上的应用要求为限，使讀者可以得到全面的知識。本書可供高等学校工程系，物理系，生物系作教材及教学参考之用。

## 微 分 方 程 及 其 应 用

### DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH APPLICATIONS

原 著 者 H. Betz, P. B. Burcham,  
G. M. Ewing

原 出 版 者 Harper & Brothers Publishers  
1954 年 版

譯 者 徐 偉 成 乐 茂 生 曉 燕

\*

上海科学技术出版社出版

(上海南京西路 2004 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

上海市印刷五厂印刷

\*

开本 787×1092 1/32 印張 10 字數 211,000

1958 年 9 月 第 1 版 1960 年 3 月 第 5 次 印 刷

印 數 9,501—13,000

統一書 号: 15119 · 863

定 价 (十二) 1.15 元

## 序 言

這是一本為微分方程的入門教程所寫的教科書，重點突出在微分方程對物理學、生物學以及工程上的各種特殊應用。

第一章至第六章包含了這一教程不可缺少的一些主要部分。教師可按其認為值得重視的，或結合各不同班級的需要和接受能力再選擇本書最後六章中的某幾章來講授。由於學物理學及工程的学生都可能在他們進一步的研究中遇到一些偏微分方程，作者在自己所講授的班級中已體驗到有授完第十一章和第十二章的必要。某些作為補充的節段均用星號標注，指明它們可以省略。為了有些學生對雙曲綫函數不熟悉，我們特在本書附錄中作了一個簡單介紹。本書對有關微分方程所選的應用例題比通常在這一類教科書中所見到的有着更透澈的分析和討論，這是本書所有的新穎特色之一。所以，當我們提供許多練習題以鍛鍊解方程的必要技巧時，着重於啓發學生如何把已給問題用數學術語來列出式子，以及如何體會已建立方程的理想化內容。

雖然，在微分方程教科書中通常並不涉及拉普拉斯變換，但由於它的應用很為廣泛，我們感到有必要把這一數學工具在這一類教程中加以簡單的介紹。

對常系數綫性微分方程的古典算符解法，本書也非常重視。我們相信，第五章的處理方式是與初等教程的目的完全一致的。

書中所包括的對某些題材，象生物動力學，非綫性方程以及

火箭的飛射等所介紹的簡單材料是比較及時而新穎的。

作者通過把微分方程的各種應用，特別在第三、六、七及十二章中的應用，組成爲本教程的一個主要部分，以竭力使內容既生動且能實用。書中所有的討論和推導已大都囊括完整，因此並不需要具有較深的，特殊的預備知識。

有幾章章末所附的參考文獻，是爲了對需要更多知識的學生有所幫助。並介紹給第一次採用本書的教師們。

作 者

# 目 錄

## 序 言

### 第一章 引論 ..... 1

1-1 定义.....	1	1-5 常微分方程的形成.....	5
1-2 微分方程的应用.....	3	1-6 常微分方程的解.....	8
1-3 單擺.....	3	1-7 常微分方程的几何意义.....	9
1-4 动物的繁殖.....	4	1-8 可積的微分方程.....	12

### 第二章 一階一次方程 ..... 13

2-1 引言.....	13	2-9 齐次方程.....	30
2-2 恰当微分方程.....	13	2-10 微分曲綫的方向場与性 質.....	33
2-3 分离变量.....	18	2-11 可化为齐次方程的方程.....	35
2-4 用求積式的解法.....	20	2-12 变换变量.....	37
2-5 綫性方程.....	22	*2-13 微分方程的不变性.....	39
2-6 綫性微分方程的性質.....	25	*2-14 黎卡迪方程 (Riccati's Equation).....	40
2-7 綫性微分方程的方向場.....	26	2-15 总結.....	45
2-8 柏努利方程 (Bernoulli's Equation).....	28		

### 第三章 一階微分方程的各种应用 ..... 48

3-1 引言.....	48	3-8 一級反应.....	57
3-2 質点的直綫运动.....	48	3-9 二級反应.....	58
3-3 空气阻力.....	51	3-10 复雜反应.....	60
3-4 在空气中下落的物体.....	51	3-11 生物动力学.....	62
3-5 在空气中竖直上抛的物体.....	53	3-12 动物种类間的关系.....	63
3-6 化学反应.....	55	参考文献.....	67
3-7 質量作用定理.....	56		

### 第四章 一階隱微分方程 ..... 69

4-1 引言.....	69	4-3 可以用代数方法解出 $y'$ 的微分方程.....	71
4-2 几何意义.....	70		

4-4 可以用微分法和消去法 解出的微分方程.....	73	4-6 $x$ 与 $y$ 的綫性方程.....	78
4-5 奇异解.....	75	4-7 克莱洛(Clairaut)方程.....	79
<b>第五章 綫性微分方程</b> .....	<b>84</b>	4-8 几何上的应用, 軌綫.....	81
5-1 綫性方程.....	84	5-14 $1/f(D)$ 的性質.....	99
5-2 簡化方程.....	84	5-15 $R(x)$ 是一多項式.....	101
5-3 $R(x)$ 是几个函数的和.....	87	5-16 $R(x)$ 等于 $e^{ax}$ .....	103
5-4 $R(x)$ 是一个复变函数.....	88	5-17 $R(x)$ 等于 $e^{ax}P_k(x)$ .....	104
5-5 常系数綫性微分方程.....	89	5-18 $R(x)$ 等于 $\sin ax$ 或 $\cos ax$ .....	105
5-6 运算符 $D$ 及 $f(D)$ .....	89	5-19 $R(x)$ 等于 $e^{ax}P_k(x)\sin bx$ 或 $e^{ax}P_k(x)\cos bx$ .....	107
5-7 $f(D)$ 的其他性質.....	92	5-20 待定系数法.....	109
5-8 簡化方程的解.....	93	5-21 常量变易法.....	111
5-9 虚根的情形.....	95	*5-22 联立綫性微分方程.....	113
5-10 两实根 $\alpha$ 与 $-\alpha$ 的情形.....	96	逆运算符参考表.....	117
5-11 簡單完全方程的解.....	96		
5-12 逆运算符.....	97		
5-13 完全方程的解.....	98		
<b>第六章 常系数微分方程的各种应用</b> .....	<b>118</b>		
6-1 机械振动.....	118	6-7 复擺.....	133
6-2 減振器.....	122	6-8 梁的弯曲.....	139
6-3 电網.....	124	6-9 彈性曲綫的微分方程.....	140
6-4 电網的解法.....	126	6-10 其他的微分方程.....	142
6-5 机电的相似性.....	128	*6-11 縱向力.....	147
6-6 两迴路电網.....	129	参考文献.....	149
<b>第七章 拉普拉斯变换導論</b> .....	<b>150</b>		
7-1 引言.....	150	7-8 拉普拉斯变换的其他性質.....	160
7-2 初值問題与拉普拉斯变换.....	150	7-9 單位函数 $H(t)$ 的应用.....	163
7-3 拉普拉斯变换式.....	151	7-10 方程組.....	166
7-4 拉普拉斯变换对表.....	154	7-11 在电学問題上的应用.....	168
7-5 拉普拉斯变换的性質.....	155	7-12 梁的弯曲.....	170
7-6 分項分式的应用.....	156	*7-13 奇异函数 $\delta(t)$ .....	171
7-7 常系数綫性方程的解.....	158	参考文献.....	173
<b>第八章 高階微分方程的特殊型</b> .....	<b>174</b>		

8-1 引言	174	的一个并不顯現在方	
8-2 类型 I	175	程中	178
8-3 类型 II	175	8-7 类型 VI. 等維方程	180
8-4 类型 III	177	8-8 繩繩的平衡	184
8-5 类型 IV	178	8-9 变动質量的运动	190
8-6 类型 V 变量 $x$ 与 $y$ 中		参考文献	194
<b>第九章 微分方程的級数解法</b>	195		
9-1 引言	195	*9-5 一个基本定理	205
9-2 一般方法	195	9-6 高斯方程	209
9-3 待定系数法	199	9-7 勒襄特方程	211
9-4 綫性方程的降階法	202		
<b>第十章 圖解法与数值解法</b>	213		
10-1 引言	213	方程	217
10-2 方程 $y' = f(x, y)$ 的圖解		10-5 数值解法	222
积分法	214	10-6 泰勒級数法	222
10-3 自生振盪	216	10-7 隆奇(Runge)法	224
10-4 范費保尔(Van der pol)		参考文献	227
<b>第十一章 偏微分方程</b>	228		
11-1 引言	228	11-6 一階方程的标准型	239
11-2 偏微分方程的建立	228	11-7 勒襄特变换	243
11-3 可当作常微分方程的方程	230	11-8 二階方程	250
11-4 平面性微分方程	231	11-9 綫性方程的性質	251
11-5 一階方程, 几何意义	235	11-10 分离变量法	252
<b>第十二章 富里哀級数及边值問題</b>	255		
12-1 引言	255	12-4 一維热傳導	260
12-2 富里哀級数	256	12-5 振动的弦, 波动方程	264
12-3 只含余弦項或正弦項的		12-6 振动彈性杆棒	269
富里哀級数	258	12-7 梁的橫向振动	270
<b>附錄</b>	273		
<b>答案</b>	280		

# 第一章

## 引 論

### 1-1. 定义

一个包含有導数或微分的方程称为微分方程。这类方程的例子如下:

1.  $\frac{dy}{dx} + y = 0,$
2.  $(xy - y^2)dx + x^2 dy = 0,$
3.  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \sin y = 0,$
4.  $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} + 4x = 0,$
5.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x.$

我們把常微分方程与偏微分方程來区别一下。常微分方程是一个自变量,一个因变量,以及因变量对自变量的一个或几个導数之間的关系。因而在上面方程中的 1—4 式为常微分方程。偏微分方程是表达二个或二个以上的自变量,一个因变量,以及因变量对几个自变量的一个或几个偏導数之間的关系。上面的方程(5)就是一个例子。

一个微分方程的階就是在該方程中所包含的最高階導数的階数。因而方程 1, 2, 4 都是一階的,而 3 和 5 乃是二階的。

当一个微分方程中对其所包含的一切導数來說都是有理的同时是整数次幂时,其最高階導数的幂数称为微分方程的次數。所以方程 1, 2, 3, 5 都是一次方程,而 4 是二次方程。如果在一个微分方程中,因变量及其導数只有一次的,且并不存在更高的



乘幂或乘積，这种方程称为綫性微分方程。所以方程 1 与 5 是綫性的，而其余都是非綫性的。在綫性微分方程中，所有因变量及其導数的系数可以是常数，也可以是一个或几个自变量的函数。

在本書后面的一章中，我們將討論到微分方程組，在这种微分方程組中具有一个自变量以及与方程的数目同样多的因变量。方程組的例子如下：

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y, \quad \frac{dx}{dt} = 7x - y.$$

我們將經常用一撇这样的符号來表示導数。这样，当从上下文已能明确那一个是自变量时，我們通常就把  $\frac{dy}{dx}$  寫成  $y'$ ，把  $\frac{d^2y}{dx^2}$  寫成  $y''$ ，把  $\frac{d\phi(u)}{du}$  寫成  $\phi'(u)$  等等。只要不致發生誤解，我們也常常把微分方程簡称为方程。最后还得申明一下，我們所引入的变量都是实变量。

### 習題 1

試說出下列各微分方程的階数与次数；并指出那些是綫性微分方程。

1.  $x(y')^2 - 2yy' + x = 0.$

2.  $(7x - 3y)dx + (2x + 5y)dy = 0.$

3.  $dy + (2x - x^2y)dx = 0.$

4.  $xy''' + 2y'' + x^2y = 0.$

5.  $y'' - 2y(y')^2 + 2y' - xy = 0.$

6.  $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = z.$

7.  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xyz = 0.$

8.  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$

## 1-2. 微分方程的应用

在研究許多純数学及应用数学的問題时,都会遇到微分方程。在物理学,天文学,化学以及工程科学中,微分方程都占着極重要的地位。即使在生物学与社会科学的範圍內,微分方程的应用也愈來愈頻繁了。在以后各章中,將比較詳盡地討論从种种不同的範圍內所提出的大量微分方程,而这里的一些簡單例子僅作为这方面的例証。

## 1-3. 單擺

一个在垂直平面上运动的質点,其質量为  $m$ , 用一根長度为  $l$  的無重量無展性的綫把它栓在  $O$  点上,設該質点僅受重力的作用(圖 1-1)。設  $\theta = \theta(t)$  为綫的瞬間位置与垂綫所成的角度,以反时針的方向为正。按照力的平行四边行法則可以看出,作用在  $PQ$  方向的力为  $-mg \sin \theta$ , 其中  $g$  是重力加速度,而沿着运动途徑的加速度是  $l d^2\theta/dt^2$ 。应用牛頓第二定律:質量与加速度的相乘積等于在加速度方向上的力,由此得微分方程

$$ml\theta'' = -mg \sin \theta,$$

或

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

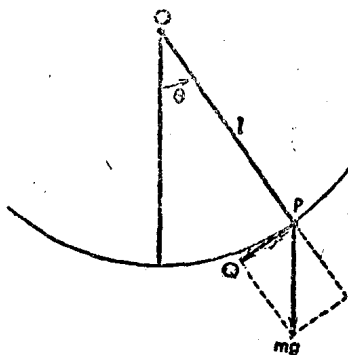


圖 1-1

所以單擺的运动是要滿足这个微分方程的一个运动。研究这个运动的問題就变成为寻求一个滿足以上微分方程的函数 $\theta(t)$ 的数学問題了。

#### 1-4. 动物的繁殖

动物的繁殖是一个非常复杂的問題，但是，如果把影响繁殖的許多因素忽略掉或简单化，我們仍然可以用微分方程来表示动物繁殖的近似規律。

考虑一种与外界完全隔絕的某种动物。这里所說的与外界完全隔絕是指它們中間除了本族的出生和死亡之外，既无迁出，也无移入。設在 $t$ 時間内这一种动物的数目为 $N$ ，并設它們的出生率和死亡率各为 $n$ 和 $m$ 。假定它們的出生数和死亡数都和 $N$ 及時間成正比，則在時間 $\Delta t$ 內，出生的总数将为 $nN\Delta t$ ，而死亡的总数則为 $mN\Delta t$ 。于是，如果時間 $\Delta t$ 內 $N$ 的变化为 $\Delta N$ ，我們大致上可以得出

$$\Delta N = (n - m)N\Delta t.$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时如果极限存在，則

$$\frac{dN}{dt} = (n - m)N. \quad (1)$$

这是把問題简单化以后得出的一个微分方程。从这一方程中很明显地可以看出，如 $n$ 大于 $m$ ，則动物数将无限地增加，如 $m$ 大于 $n$ ，則动物数将逐步减少，趋于灭亡。这样的結論是非常天真的，事实决不会如此简单。生物学家和数学家根据統計数据对 $n, m$ 作了修正，使結果能更符合于事实。有人提出了如下的关系式：

$$n = a - bN, \quad m = p + qN$$

其中  $a, b, p, q$  都是正常数. 应用这些关系, 方程(1)就变成:

$$\frac{dN}{dt} = a_1 N - a_2 N^2, \quad (2)$$

其中  $a_1 = a - p$ ,  $a_2 = b + q$ .

这一方程称为邏輯斯諦方程, 有人用以研究动物的繁殖, 得出的結果大体上尚能与某些事实相符.

### 1-5. 常微分方程的形成

我們已經看到在研究物理学, 生物学等問題时怎样可以引出微分方程, 但是这些方程的推导并没有引出某些我們現在所要研究的重要特性来.

考慮方程

$$f(x, y, c) = 0 \text{ 或 } y = \phi(x, c), \quad (3)$$

这里  $c$  是一个任意常数或参数. 对任一給定的  $c$ , 方程(3)代表一条曲綫; 而由于  $c$  可以取无穷多的值, 我們就得到无穷多曲綫, 亦即所謂單参数曲綫族. 例如,  $y = x + c$  代表平行直綫族,  $x^2 + y^2 = c^2$  代表同心圓族. 我們也可以有双参数曲綫族, 三参数曲綫族或  $n$ -参数曲綫族, 它們的方程形为:

$$f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \text{ 或 } y = \phi(x, c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (4)$$

这样,  $y = mx + b$  是双参数直綫族,  $y = ax^2 + bx + c$  是三参数拋物綫族. 現在我們可以提出这样的問題: 什么是这种曲綫族中所有的綫群所共有的几何性質? 用数学关系式来表示时, 这种性質显然必須与参数无关. 我們将会发现这个关系式就是一个微分方程. 举几个简单的例子, 就可弄清楚这一点.

在平行直綫族  $y = x + c$  中, 我們可用微分法得出  $y' = 1$ , 一

一个不包含  $c$  的关系式。这說明一个顯著的事实：即所有的直綫群有着同样的斜率 1。在同心圓族中，我們仍可用微分法得出  $x + yy' = 0$ 。这个微分方程表明了圓的基本性質，即圓周上任何一点的切綫在該点垂直于半徑。

在方程(3)的一般情形中，根据我們所取用的方程，应用微分法可得

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \quad \text{或} \quad y' = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad (5)$$

通常，(5)中的每一个方程將仍包含  $c$ ；但如果有可能从方程(3)及(5)之間消去  $c$ ，即得一个不再包含  $c$  的关系式，其形式將为

$$F(x, y, y') = 0.$$

这是一个一階微分方程，它表示出曲綫族(3)中所有曲綫不依赖于  $c$  的共同几何性質。这样，一个單參數族(有时称之为原始方程)，導引出一个一階微分方程；同时从我們推出这个微分方程的方式中可以很清楚看出，用  $f(x, y, c) = 0$  或  $y = \phi(x, c)$  所定义的每一函数都滿足这个微分方程。

現在我們考慮双參數曲綫族，其方程为

$$y = f(x, c_1, c_2). \quad (6)$$

对  $x$  微分二次，我們得到另外两个方程

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{和} \quad y'' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (7)$$

如果常数  $c_1$  和  $c_2$  不相等，就不可能用方程(6)与方程(7)中的一个來消去它們；但可能在(6)和(7)的所有三个方程之間把它們消去。其結果形式为

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

这是一个不再包含  $c_1$  及  $c_2$  的二階微分方程。这个微分方程表

現出它的原始方程的几何特征,并且每一个这样的函数  $y = f(x, c_1, c_2)$  满足这个微分方程。

最后考虑一般情况:

$$y = f(x, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

用同样的微分法及消去法,就可以引导出一个  $n$  階的微分方程:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

例 1. 有一拋物綫族,其对称軸为  $y$  軸,而其公共焦点为  $(0, 0)$ ,它具有方程

$$y = \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}.$$

因  $y' = x/c$  或  $c = x/y'$ ; 消去  $c$  后得出微分方程为:

$$2yy' - x(y'^2 - 1) = 0.$$

例 2. 方程

$$y = \frac{ax+b}{x+c}$$

代表一个三参数曲线族,因此它的微分方程应该是三階的。事实上在三次微分后,我們得到

$$y' = \frac{ac-b}{(x+c)^2}, \quad y'' = -\frac{2(ac-b)}{(x+c)^3}, \quad y''' = \frac{6(ac-b)}{(x+c)^4}.$$

現在很容易消去常数,我們立刻得出

$$y'''y' = \frac{3}{2}(y'')^2.$$

## 習題 2

对下列各原始方程求出相应的微分方程來。并繪出曲线群。

1.  $\frac{x^2}{1+c} + \frac{y^2}{4+c} = 1.$

2.  $x^2 + y^2 - 2c(x+y) + c^2 = 0.$

3.  $y = c(x-c)^2.$

4.  $y = e^a(a+bx)$ , 一个双参数族。

5.  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ , 一个双参数族。

在習題 5 中,其微分方程的几何特征是什么?

## 1-6. 常微分方程的解

所謂一個常微分方程  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  的解, 是指任一函數  $y = f(x)$ , 它對  $x$  恒能滿足該微分方程。亦即, 如果  $y = f(x)$  是微分方程  $\phi(x, y, y', y'') = 0$  的解, 則對每一個  $x$  值, 或者至少是對某一區間或一組區間內的每一  $x$  值, 適合

$$\phi[x, f(x), f'(x), f''(x)] = 0.$$

一個解可以是隱函數的形式,  $F(x, y) = 0$ , 或者是參數方程的形式,  $x = g(t), y = h(t)$ . 在微分方程理論中, 一個微分方程的解通常稱為該微分方程的積分, 而解微分方程的過程也就稱為求微分方程的積分。這一稱呼法不能與積分學中大家所熟知的積分相混淆。

可以設想, 只要把從原始方程建立微分方程的過程倒逆過來, 就可得出所需要的解。可惜情況並不如此。例如, 一個單參數族既導出一階微分方程, 反過來, 我們可以推測這個微分方程的積分將會引入一個任意常數。同樣的, 一個  $n$  階的微分方程的積分將包含  $n$  個任意常數, 這看起來是合理的。

常微分方程的任一解, 如其所包含的任意常數的數目恰好與方程的階數相等, 則稱這種解為方程的通解或一般積分。從任何通解中, 對任意常數中的一個或數個給以確定的值, 所得到的解稱為方程的特解或特殊積分。如果有不同於以上這些解存在, 也即有非從通解中能得到的解存在, 這種解就稱為奇異解。

正象在代數中一樣, 我們需要代數的基本定理來保證任一形如

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (n \text{ 為正整數})$$

的方程必有一个根,同样在微分方程的理論中我們需要一个存在定理來保証在一些極一般的条件下可以存在着微分方程的解.至于这些存在定理的研究已越出本書范围之外.因此我們这里將僅作为一个事实來叙述:在某些一定的条件下,一个 $n$ -階常微分方程具有一个恰好包含 $n$ 个不同的任意常数的通解.至于那些条件是什么,我們將在以后几章中討論.

### 1-7. 常微分方程的几何意义

考慮一階方程

$$y' = f(x, y). \quad (8)$$

我們假定 $f(x, y)$ 是一个在 $x, y$ 平面的某域內單值而連續的函数.則量

$$\tan \alpha = f(x, y)$$

是該域內每一点 $(x_0, y_0)$ 的确定的斜率,譬如說 $p_0 = \tan \alpha_0$ .  $x_0, y_0, p_0$ 三个数定义了所謂从 $x_0, y_0$ 出發的綫素,同时微分方程本身定义了一个綫素的場,也即一个方向場(圖 1-2).微分方程的解是任一函数 $y = f(x)$ ,它的圖形表示应符合这方向場.这就是說,一条曲綫在每一点上都有它適合这方向場的切綫,只要曲綫上任何一点的切綫方向与方向場所規定的該点的方向相同.这样一条曲綫称为积分曲綫.因为曲綫的斜率 $f(x, y)$ 是單值的,在区域的每一內点上都有一条唯一的积分曲綫通过,因此,正如所預測的一样,我們就有一个完全盖滿該区域的單参数积分曲綫族.因而也可以說:一个一階微分方程的积分就相当于把它的方向場排列成为一些曲綫,即积分曲綫.在 $f(x, y)$ 为單值連續的区域之外的点上,积分曲綫的样子可以是不規則的,



或者就不存在有積分曲線。

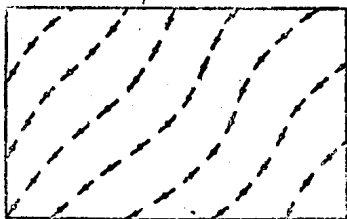


圖 1-2

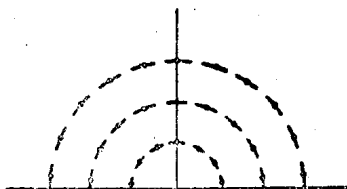


圖 1-3

一條積分曲線可用下面的方法作出：從該區域內的任一點  $P_0(x_0, y_0)$  出發，畫一條與該點的綫素相合的小綫段。通過這綫段的右端點，譬如說  $P_1(x_1, y_1)$ ，另外畫一條與  $P_1$  點的綫素相合的小綫段。如此對更多的點（全部在區域內部）進行下去，就得到一條折綫，這綫可以看作近似於通過點  $P_0$  的積分曲線。可以設想，當綫段取得愈短，則折綫就愈接近於積分曲線。這一點與事實是相符的，並可以嚴格證明。圖 1-3 所示就是微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

的幾條積分曲線。在這場合下，因  $y$  必須  $\neq 0$ ，我們可以取上半面  $y > 0$  作為一個區域，在該區域內  $x/y$  是單值而連續的。不難看出，這些近似的折綫是很容易連成積分曲線的，這些曲線即為半圓。

### 習題 3

對每一題作出一條通過原點的近似的積分曲線。 $x$  的負值也包括在內。

1.  $y' = x + y/2$ .

2.  $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

除非在前面加上符號  $\pm$ ，否則在一個量上所加的根號總表示正根。

3.  $y' = \frac{xy}{10} + 1$ .