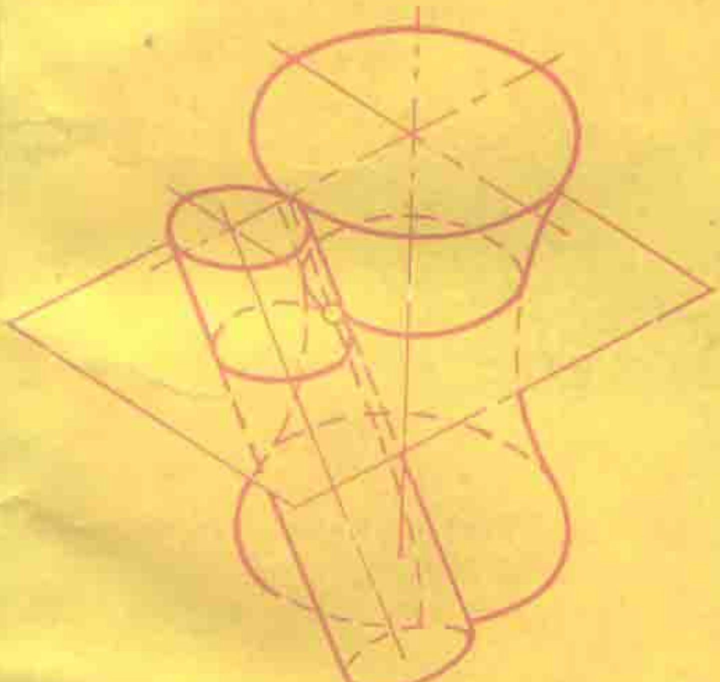
确定共轭曲面的方法及其应用

马香峰　虞洪述　吕荣襄　编著



机械工业出版社

确定共轭曲面的方法及其应用

马香峰　虞洪述　吕荣寰　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书较详细地介绍了确定共轭曲面的几种工程方法——公法线法、包络法和运动学法，力求用画法几何原理给出上述方法的几何特性，以期更好地建立和简化各类方法的几何模型。本书引入了刀具设计、斜轧孔型设计以及空间齿轮啮合等方面的实例。为了便于阅读，简要地介绍了有关向量代数和微分几何的常用知识。

本书可供从事有关刀具设计、空间啮合研究以及斜轧生产的工程技术人员参考，也可作高等学校教学用书。

确定共轭曲面的方法及其应用
马香峰 虞洪述 吕荣蓥 编著

责任编辑：林瑞玉 晏章华
封面设计：王 伦

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
北京市密云县印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本850×1168 1/32 · 印张 $12^{2}/_{8}$ · 字数 318 千字
1989年 7 月北京第一版 · 1989年 7 月北京第一次印刷
印数 0,001—1,310 · 定价：12.75元

*

ISBN 7-111-00522-8/TB·29

前　言

共轭曲面是应用几何理论解决机械设计和制造领域里，诸如确定工具曲面、轧钢辊面以及空间啮合曲面等问题的过程中发展形成的一门应用学科。特别是利用电子计算机使复杂的公式计算成为可能之后，该学科的发展更加迅速。在国内，近10余年来先后发表的陈志新的《共轭曲面原理》（上、中册）、吴序堂的《齿轮啮合原理》、沈蕴方等的《空间啮合原理》，以及以小组名义编写的《数学在螺杆泵设计与制造中的应用》等著作和其他有关文献资料，就是这方面的例证。

我们在60年代初开始了对轧钢生产中辊形曲面的研究，并先后取得了一些成果。1965年发表了斜辊矫直机辊形计算公式[32]。中断十余年后，我们又开始了这方面的研究。有些成果已用于生产实际。为了总结工作和更好地学习，我们将共轭曲面中的最为普遍的问题——确定共轭曲面的方法，总结分类，充实扩展，编写成书。其主要内容，作者之一曾在北京钢铁学院机械制造专业作为选修课多次进行了讲授。还受中国工程图学学会之托，于1982年暑假，在青岛举办"共轭曲面讲习班"，作者们共同讲授这一课题。

本书可分三部分：第一部分是基础知识。这是根据上述讲课经验编写的。简要的介绍了向量代数、坐标变换、曲线曲面的有关问题。第二部分是确定共轭曲面的三种方法——公法线法、包络法和运动学法。实践表明，这些方法是自不同角度用不同准则去解决同一类工程问题的有力工具。综合起来进行介绍，可以相互贯通、开阔眼界，这更有利于解决生产问题和阅读文献资料。第三部分是应用实例。说明如何应用本书所介绍的方法解决实际问题。

本书力图用明晰的几何图象来说明方法的实质。这对于正在

从事或即将从事机械制造和设计工作的同志，是非常重要的。实践证明，它有利于理解和记忆。而且通过图解建立的几何模型所导出的解析公式，往往更加简练和便于应用。当求解精度要求不高，或对某些问题需作定性分析或图象说明时，图解法有着它特有的特点和优点。

在编写本书时，我们主要着眼于工程上的实用性和几何上的明晰性，推理论证未必严格。为了便于了解和比较各种方法，我们还多次使用了较简单的同一例子。

本书由马香峰担任主编。具体章节的分工是：第一、二、三、五章和§7-2由马香峰编写；第四章和§7-1由虞洪述编写；第六章和§7-3由吕荣寰编写。

在编写本书的过程中，得到了中国工程图学学会应用图学专业委员会的大力支持和帮助；承蒙天津大学王晓苍同志、北京钢铁学院沈蕴方同志对本书进行了审校；本书还引用了很多专家学者的著作中的结论和公式(均加了文献代号)，在此一并表示感谢。

由于我们的水平所限，不妥和错误之处，望读者批评指正。

编著者

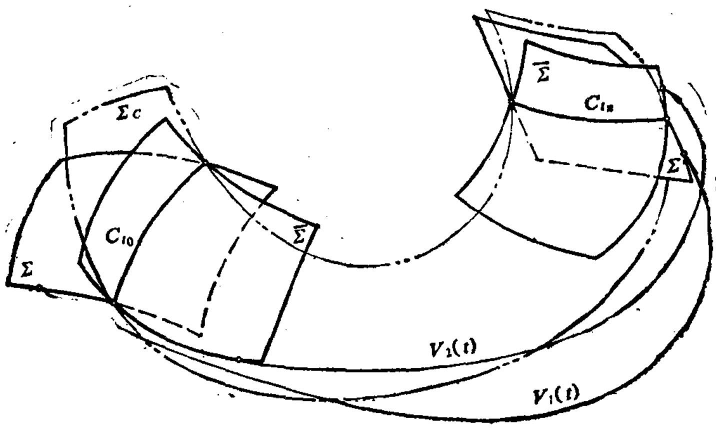
1984. 10

目　录

第二篇 确定共轭曲面的方法及其应用

绪　论

共轭曲面问题，是机械设计和制造（特别是切削加工、轧钢生产和啮合传动）中抽象出来的基本几何问题之一。如图所示，



运动中的共轭曲面

设在参考空间里有曲面Σ作$V_1(t)$（简记为V_1）运动（包括移动和转动），又有曲面$\bar{\Sigma}$作$V_2(t)$（简记为V_2）运动。若在运动的每一瞬间，两曲面都沿一条曲线（或点）相切（一般情况下，在$t=t_0$时沿C_{t_0}相切；在$t=t_n$时沿C_{t_n}相切），这时我们就称曲面Σ与$\bar{\Sigma}$互为共轭曲面，V_1与V_2为共轭运动。若令$V_{12}=V_1-V_2$或$V_{21}=V_2-V_1$，则它们分别称作Σ相对于$\bar{\Sigma}$或$\bar{\Sigma}$相对于Σ的共轭运动，C_t称为接触线，C_t在参考空间里所构成的曲面Σ_0称为接触迹曲面或啮合曲面，在图中用点划线表示。习惯上，Σ称为母面，$\bar{\Sigma}$称为Σ的共轭曲面。根据上述定义，在切削加工过程中，刀具表面和工件表面就是一对共轭曲面，它们各自相对于机架的运动，就是共轭运动。在机械传动中，两运动构件的接触表面也是共轭曲面，两者相对于机架的运动，也是共轭运动。

在共轭曲面问题中，基本参量有五个：Σ、$\bar{\Sigma}$、V_1、V_2、Σ_C。根据不同的已知条件和求解要求，可以组合为五类问题[12]。但在生产实践中，最常用且最基本的问题是已知两共轭运动V_1、V_2和母面Σ，求解共轭曲面$\bar{\Sigma}$。例如：已知工件表面和机床的运动形式求成型刀具曲面；已知轧件表面和轧机形式求辊形曲面；已知一齿面和两齿面间的相对运动求另一与之啮合的齿面等等。我们把这类问题称为确定共轭曲面问题。本书主要讨论这一问题的求解方法，介绍应用实例并简要分析共轭曲面的接触情况。

根据不同类型的共轭曲面和共轭运动，确定共轭曲面的方法可分三类：

一、相对静止法

若两共轭曲面在运动过程中，相对位置固定，在参考空间里瞬时接触线不变（接触迹曲面退化成直线或曲线），这时，在求解过程中，就可把两共轭曲面看作是相对静止的，这种解题方法称作相对静止法（简称静止法）。它适用于Σ、$\bar{\Sigma}$都是旋转面（如两摩擦轮表面及矫直辊面和圆材表面），或一为螺旋面，另一为旋转面（如磨削螺旋槽时的磨轮表面与螺旋槽表面）的情况[4]。

二、包络法

当母面Σ在作相对运动$V_{12}=V_1-V_2$时，在共轭曲面$\bar{\Sigma}$的坐标系中就形成了曲面族$\{\Sigma\}$，这时共轭曲面$\bar{\Sigma}$就可看作是曲面族$\{\Sigma\}$的包络，这种解题方法称为包络法。它是微分几何中的一种古典方法，该法几何关系明晰，应用面广，但运算较繁。近几年来，结合生产中的实际问题进行研究，包络法有所发展，如文献[6,37]的作者们导出了一种算符，并附有一系列计算公式和有益的结果，推理、论证、求解都比较方便。

三、运动学法

两共轭曲面，为了保证在每一接触点上，两者既不嵌入也不分离，其相对运动线速度 $\mathbf{v}_{12}$ 必须落在两者在该点的公切面上，或者说$\mathbf{v}_{12}$必须垂直于两曲面在该点的公法线$\mathbf{N}$，故有 $\mathbf{v}_{12}\cdot\mathbf{N}=0$。这是齿轮啮合原理中广泛应用的一种方法。它具有明确的运动学

意义[1,2,8]。

上述三种方法的基本原理是一致的，只是分析问题的出发点和解题路线有所不同。在本书中，我们还特别介绍了画法几何的图解法。因为它更具有直观性，而且对某些特定问题，根据图解过程导出解析公式，往往更加简练和便于应用，我们称这种方法为图解解析方法。

诱导曲率问题是共轭曲面问题中的一个极为重要的问题，但限于本书的篇幅，只是在第四章中介绍了基本概念。

共轭曲面问题，还是一个正处在发展中的技术基础理论问题。预计在不远的将来，其理论将更加完善，应用范围将更加广泛。

第一篇　基础知识

这一篇是研究共轭曲面问题的基础知识，它包括向量代数、坐标变换和微分几何中的有关内容。为了使读者能顺利地阅读本书，我们结合本书的需要，对上述基础知识简要地加以介绍。内容和例题力求多些，对公式的推证不尽严格，甚至有些从略，但力求对它们的几何意义加以形象的描述。

第一章　向量代数及坐标变换

§1-1　向量代数

一、基本概念

向量——有大小和方向的量，如力学中的力、速度等物理量，多用符号a和带箭头的线段表示（图1-1）。

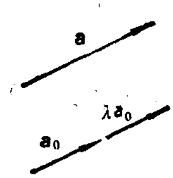


图1-1　向量

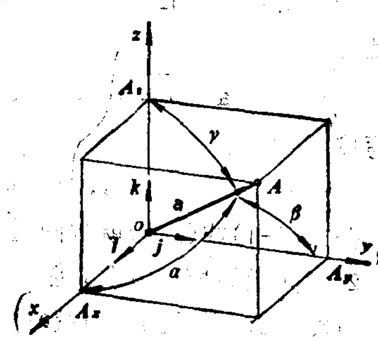


图1-2　向量的坐标表示

向量的模——向量的大小，常写作$|\mathbf{a}|$，有时也写作a。

单位向量——模等于1的向量，记作$\mathbf{a}_0$，即$\mathbf{a}_0=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$。任何一个向量都可用一个数量（也称纯量）$\lambda$与同方向的单位向量的乘积表示，即$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}_0$。

零向量——模等于零的向量。它没有确定的方向。

自由向量——可在空间平移的向量。

点向量——起点固定不变的向量。如过原点的向径$\overrightarrow{oA}$。

二、向量的坐标表示

向量的运算多用它在直角坐标系中的分量来进行，所以必须首先叙述它的坐标表示。

1． 直角坐标系及向量的坐标表示

设空间有一直角坐标系$oxyz$，简记为S（当xyz按右旋规则配置时，称右旋系。书中凡未加说明的都是右旋系）。由坐标原点o沿各坐标轴引一单位向量，分别记作$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$，叫做基本向量，这样就构成了一个表示向量的右旋直角坐标系（或称右旋标架），如图1-2所示。任一自由向量$\mathbf{a}$都可平移到起点在坐标原点o处而不改变它的大小和方向。设$\mathbf{a}$的终点为A，则$\mathbf{a}=\overrightarrow{oA}$。若$A$点在$x$、$y$、$z$坐标轴上的投影分别是$A_x$、$A_y$、$A_z$，则$oA_x$、$oA_y$、$oA_z$就是$\overrightarrow{oA}$在坐标轴上的投影长度，分别记为纯量$a_x$、$a_y$、$a_z$。这时就有：

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{oA}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k} \tag{1-1}$$

或写成

$$\mathbf{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z) \tag{1-2}$$

公式(1-1)或(1-2)就是向量$\mathbf{a}$的坐标表示形式。

2． 向量的模和方向余弦

由图1-2可以看出，向量$\mathbf{a}$的模$|\mathbf{a}|$可由下式计算：

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=a \tag{1-3}$$

若向量$\mathbf{a}$与三个坐标轴x、y、z的夹角分别记为α、β、γ，则当$|\mathbf{a}|\neq0$时，这些角的余弦为：

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\frac{a_x}{a}\\ \cos\beta&=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\frac{a_y}{a}\\ \cos\gamma&=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\frac{a_z}{a}\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

它们叫做向量 **a** 的方向余弦。不难看出，方向余弦间的关系是：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{1-5}$$

可见α、β、γ三个角是相关的，不能各自独立地给定。

由单位向量的定义及公式(1-4)和(1-5)，可以得出与 **a** 同方向的单位向量$\mathbf{a}_0$的表达式：

$$\mathbf{a}_0=\cos\alpha\mathbf{i}+\cos\beta\mathbf{j}+\cos\gamma\mathbf{k}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma) \tag{1-6}$$

三、向量的基本代数运算

1. 向量的加和减

若有两向量：

$$\mathbf{a}=(a_x,a_y,a_z),\quad \mathbf{b}=(b_x,b_y,b_z)$$

则加、减运算公式是：

$$\mathbf{a}\pm\mathbf{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z) \tag{1-7}$$

向量加、减的几何意义见图1-3。

向量的加、减满足交换律和结合律，即：

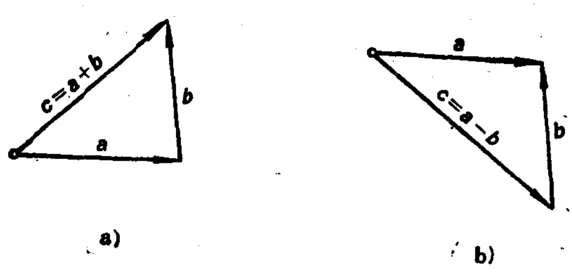


图1-3　向量的加和减

$$\mathbf{a}\pm\mathbf{b}=\mathbf{b}\pm\mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})\pm\mathbf{c}=\mathbf{a}\pm(\mathbf{b}\pm\mathbf{c})$$