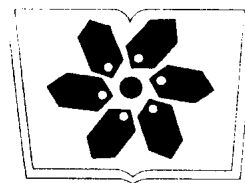


电机内的电磁场

(第二版)

黄祖恩 编著

科学出版社



中国科学院科学出版基金资助出版

电机内的电磁场

(第二版)

汤蕴璆 编著

科学出版社

1998

内 容 简 介

本书是研究电机内电磁场问题的专著。书中系统地介绍了恒定磁场和时变电磁场的基本方程及其解法,并用电机内的一系列典型问题和实际问题说明其应用。书中收入了近40年来国外有关电机内电磁场问题的主要研究成果,特别是近10年来在电磁场数值计算方面的进展,同时也反映了作者近年来所取得的研究成果。

全书共10章,内容总体上分成:恒定磁场的基本理论和解析计算;恒定磁场的数值计算;时变电磁场的基本理论和解析计算;时变电磁场的数值计算;电磁力;同步电机内的电磁场问题等部分。每章后面列有参考文献目录,书末附有恒定磁场和似恒电磁场解答的唯一性等4个附录。

本书可供高等工科院校电机系的研究生、教师和从事电机设计、研究的工程技术人员阅读、参考。

图书在版编目(CIP)数据

电机内的电磁场/汤蕴璆 编著. -2 版. -北京:科学出版社,1998. 1
ISBN 7-03-005296-X

I. 电… II. 汤… III. 电机-电磁场 IV. TM301.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 25665 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

北京科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981年12月第一版 开本:787×1092 1/16

1998年1月第二版 印张:29 1/2

1998年1月第三次印刷 字数 683 000

印数: 8 881--10 080

定价: 58.00 元

第二版序

自本书第一版问世以来,已整整经过14年.在此期间,电磁场的数值计算取得了巨大进展;特别是在80年代末期,国际上对三维涡流场的表述、规范和唯一性等问题,从理论到实际计算,均已得到较为圆满的解决.在工程上,电磁场的数值计算亦得到许多实际应用.随着我国经济的快速发展,毋庸置疑,数值计算的重要性将日益突出,工程应用将更为广泛.基于这一背景,有必要对本书第一版进行大幅度的调整、全面修改和充实,以便较好地反映近年来在此领域内的一系列新成果.

与第一版相比较,第二版的主要特点是:

1. 对恒定磁场的解析解法方面的内容进行了大幅度的删减和调整,删去图解法一章;
2. 数值法中增加加权余量法、二阶元和等参元等内容;
3. 增加三维问题的分析和计算:在解析法方面,增加了实心转子感应电机内的三维涡流场、圆柱坐标内三维正弦涡流场的通解等内容;在数值法方面,增加了三维恒定磁场的数值解、三维涡流场和准三维行波磁场的数值解等内容;
4. 增加正弦电磁场的数值解(第七章)和同步电机内的电磁场问题(第十章)两章,论述了感应电动机的起动,同步电机的稳态和瞬态参数,实心转子电机的异步运行,汽轮发电机的端部磁场等一系列重要的实际问题,并阐明其数值计算方法.

作者相信,全面修订、改写后的第二版的出版,对国内电机电磁场计算的发展,将会起到一定的推动作用;对提高大型电机的设计和研究水平,亦会产生积极的影响.

吴海容教授编写了本书的第3-2节和附录B、C、附录D的D-3、D-4和D-5三节;刘汉炎副教授编写了第四章第4-1至4-10节和附录D的D-1、D-2二节;沈阳工业大学谢德馨教授编写了第七章的第7-5、7-6、7-7节的后半部分和第7-8、7-9节;汤蕴璆教授编写了其余章节,并对全稿进行了整理、统一和定稿.

本书由哈尔滨大电机研究所徐怡高级工程师主审.在本书交付出版前,他仔细审阅了全稿,改正了手稿中一些笔误和不妥之处,并对各章提出了许多宝贵意见.在此,作者谨向他表示衷心的感谢.

本书由中国科学院科学出版基金资助出版,也得到了哈尔滨市科学技术委员会优秀学术专著出版基金的资助.对此,作者深表谢意.

由于作者水平有限,书中可能还会有不少缺点和错误,欢迎读者指正.

作者

1996年5月

第一版序

为把我国建设成为现代化的社会主义强国,需要尽快地发展机械工业、电力工业、钢铁工业和轻工业。为了设计并研制出运行可靠、性能良好的新的巨型交流发电机组、大型轧钢电机和其他各种高质量的电机,迫切需要研究电磁场的基本理论,并采用新的计算手段——电子计算机来计算电机和电机工程中的一些重要的电磁场问题。但是,直到目前为止,国内还没有一本系统的、比较完整的研究和论述电机内电磁场问题的著作。本书的编写,就是为了部分地满足这方面的需要。

本书初稿曾在1972年为哈尔滨大电机研究所举办的“电机内的电磁场”讲座中使用过。由于近年来国内外在电磁场计算方面有许多新的进展,这次出版时,对初稿的内容进行了全面的调整和充实;例如,重写了恒定磁场的数值解法一章(第七章),增加了汽轮发电机的端部磁场一章(第十二章)等。就编写方法而言,本书一方面考虑到电磁场理论本身的体系,另一方面又注意到解决工程实际问题时所用的方法;既注意到电磁场的近代数值解法,亦注意到电机中某些经典问题的解析解法。

本书的第七章和附录四、附录五由哈尔滨大电机研究所计算机组刘汉炎编写,第十二章由李哲生编写,第五章第二节和附录一、二、三由吴海容编写,汤蕴璆编写了其余各章并校阅了全稿。整个工作得到哈尔滨电工学院教材科和哈尔滨大电机研究所的热情支持。

考虑到本书主要是供从事电机设计和研究方面的科技人员、高等工科院校电机系的教师和研究生阅读,所以编写本书时,认为读者已经熟悉“电工基础”、“微分方程”和“向量分析”等方面的基本内容。至于书中涉及的某些比较专门的内容,例如“椭圆函数”、“矩阵”和“恒定磁场数值计算的典型程序”等,则放在附录部分备查。

由于作者水平有限,书中可能会有不少缺点、错误,欢迎读者指正。

作者

1979年7月

目 录

第二版序

第一版序

绪论	1
第一章 恒定磁场的基本理论	3
1-1 恒定磁场的基本方程	3
1-2 标量磁位和向量磁位	5
1-3 恒定磁场的边界条件	9
1-4 恒定磁场的唯一性	12
1-5 磁场能量和直流电感	13
1-6 小结	14
第二章 恒定磁场的解析解法	16
2-1 无界空间中的恒定磁场	16
2-2 镜像法	24
2-3 边界面为铁磁平面时线电流的镜像	24
2-4 边界面为铁磁圆柱面时线电流的镜像	34
2-5 具有铁磁边界时拉普拉斯方程的直接求解	36
2-6 主极磁场正弦分布时同步发电机的极靴外形	39
2-7 正弦电枢磁动势在均匀气隙内产生的磁场	40
2-8 气隙磁场正弦分布时电枢铁心内的空载磁场	42
2-9 线电流的影响	45
2-10 载流导体在电机气隙中产生的磁场	47
2-11 具有铁磁边界时泊松方程的解法	52
2-12 半闭口圆形槽内载流导体所生的磁场	53
2-13 变压器原、副绕组的漏磁场和漏电感	56
2-14 用双重傅氏级数法解泊松方程	60
2-15 小结	64
第三章 二维恒定无旋磁场的特殊解法——保角变换法	67
3-1 共轭函数和保角变换	67
3-2 许瓦兹-克利斯多非尔变换	71
3-3 主极磁场的边缘效应	75
3-4 凸极电机主极的极间漏磁	78
3-5 电枢开槽时的气隙磁场和卡氏因数	80
3-6 电枢开有一系列齿、槽时的气隙磁场	85
3-7 电枢槽深为有限时气隙磁场的分布	91
3-8 转子偏心时的气隙磁场	92
3-9 小结	96
第四章 恒定磁场的数值解法	98

4-1	有限差分法	98
4-2	二维拉普拉斯方程和泊松方程的差分离散	101
4-3	电枢开槽时气隙磁场的数值计算	106
4-4	槽内载流导体所生磁场的数值计算	109
4-5	准泊松方程的差分离散	110
4-6	负载时直流电机内的非线性磁场	115
4-7	有限单元法	122
4-8	二维泊松方程的变分表述	129
4-9	用有限元法解泊松方程的混合边值问题	133
4-10	用有限元法计算槽内载流导体所产生的磁场	144
4-11	二维准泊松方程混合边值问题的有限元解法	145
4-12	周期性边界条件的处理	149
4-13	凸极同步电机空载磁场的有限元计算	151
4-14	使用二阶元时准泊松方程的有限元解法	155
4-15	加权余量法	162
4-16	三维恒定无旋磁场的有限元解法	164
4-17	三维恒定旋度磁场的有限元解法	173
4-18	小结	182
第五章	时变电磁场的基本理论	186
5-1	静止介质中的麦克斯韦方程	186
5-2	涡流方程和波动方程	188
5-3	时变电磁场中的电磁位	190
5-4	时变电磁场的边界条件	194
5-5	似恒电磁场解答的唯一性	197
5-6	电磁场的能量及其转化	198
5-7	小结	201
第六章	正弦电磁场的解析解法	203
6-1	半无限大导体内的正弦电磁场	203
6-2	双层半无限大导体内的正弦电磁场	206
6-3	薄长金属片中的正弦电磁场	207
6-4	矩形开口槽内导体的电流集肤效应	212
6-5	槽内空心导体中的电流集肤效应	217
6-6	矩形-梯形组合槽内导体的电流集肤效应	220
6-7	叠片铁心的片间涡流	223
6-8	处于二维正弦磁场中矩形导体内的涡流	227
6-9	圆形半闭口槽内导体的电流集肤效应	232
6-10	用叠加法计算涡流损耗	234
6-11	行波磁场作用在导电平板上时平板内的涡流	237
6-12	计及涡流反应时正弦行波电流片的镜像	241
6-13	实心转子感应电动机中的行波涡流场	244
6-14	圆柱坐标系中三维复涡流方程和复拉普拉斯方程的解答	255
6-15	磁饱和的影响	258
6-16	小结	263

第七章 正弦电磁场的数值解法	265
7-1 二维线性正弦涡流场的有限元分析	265
7-2 凸形槽内导体的电流集肤效应	270
7-3 二维非线性正弦涡流场的有限元分析	273
7-4 笼型感应电动机起动性能的有限元计算	275
7-5 三维正弦涡流场的 $\mathbf{A}$, φ 和 $\mathbf{T}$, Ω 表述	280
7-6 $\mathbf{A}, \varphi$ - $\mathbf{A}$ 法的有限元离散	287
7-7 采用三棱柱或六面体单元时 $\mathbf{A}, \varphi$ - $\mathbf{A}$ 法中各元素的计算公式	295
7-8 $\mathbf{T}, \Omega$ - Ω 法的有限元离散	306
7-9 三维正弦涡流问题中边界条件的确定	308
7-10 准三维行波电磁场的 $\mathbf{A}, \varphi$ 表述	311
7-11 准三维行波电磁场问题的有限元离散	315
7-12 小结	324
第八章 电磁场的瞬态	327
8-1 薄长钢片中恒定磁场的建立和衰减	327
8-2 具有矩形截面的实心铁心中恒定磁场的建立和衰减	330
8-3 圆柱铁心内磁场的建立和衰减	333
8-4 电磁场瞬态的数值计算	335
第九章 电磁力和电磁转矩	341
9-1 载流导体和铁磁物质在磁场中受到的电磁力	341
9-2 槽内载流导体所受到的径向电磁力	342
9-3 旋转电机定、转子线圈间的切向电磁力	345
9-4 电枢齿壁上所受到的切向电磁力	346
9-5 磁场的张力张量	348
9-6 载流导体置于槽内时作用在电枢上的切向电磁力	352
9-7 用虚位移法求机-电系统中的电磁力	358
9-8 交流电机的电磁转矩	360
9-9 电磁力和电磁转矩的数值计算	363
9-10 小结	367
第十章 同步电机内的电磁场问题	369
10-1 同步发电机额定励磁电流的数值计算	369
10-2 饱和同步电抗的数值计算	373
10-3 瞬态电抗的数值计算	376
10-4 异步运行时汽轮发电机的运算电抗及其频率特性	385
10-5 汽轮发电机的端区磁场	390
10-6 汽轮发电机定、转子绕组端部电流密度的分布	393
10-7 汽轮发电机端区磁场的有限元计算	402
附录 A 恒定磁场和似恒电磁场解答的唯一性	412
附录 B 椭圆积分和雅可比椭圆函数	421
附录 C 恒定磁场问题的有限元自适应网格加密	430
附录 D 线性代数方程组的数值解法	443

绪 论

电机是一种电磁-机械能量转换装置. 为了产生能量转换, 电机内必须要有磁场(或电场)作为耦合场. 当转子旋转时, 耦合场受到扰动, 磁场及其贮能发生变化, 电枢绕组内就会产生感应电势, 转子上则将受到电磁力的作用; 于是机械能就转换为电能或反之. 因此, 要研究旋转电机内能量转换的机制, 必须对电机内的磁场分布(尤其是气隙磁场和槽内磁场的分布)有清楚的了解.

如所周知, 电机的运行性能取决于电机的参数和损耗. 为了准确地进行电机的磁路、参数、损耗和电磁力等计算, 亦必须知道气隙、铁心、槽内、绕组端部以及某些结构部件附近的电磁场分布. 因此研究电机内的电磁场, 对设计一台性能良好的电机具有重要的意义; 对于大型同步发电机(汽轮发电机和水轮发电机)尤其是这样.

此外, 有些问题根本不能用路的概念而必须用电磁场的理论来研究和解决; 例如具有实心转子的感应和同步电机, 直线电机和超导电机的电磁性能, 开槽以后电磁转矩的分布等等. 对于这类问题, 电磁场理论的重要性是不言而喻的.

但是由于实际电机的边界形状比较复杂, 加上铁心饱和的影响, 利用解析法来求解电机内的电磁场问题常常碰到一系列的困难. 所以, 多年来电磁场理论在电机中的应用受到一定的限制; 所解决的问题大多是局部的, 经过简化的. 近年来由于计算技术的发展, 情况发生了很大的变化. 对于特定的电机, 根据边界形状和部件所用材料, 我们可以把定子、转子、气隙等不同区域分成许多网格, 然后把电磁场方程离散化, 再用电子计算机逐次渐近地算出各点的磁场值. 这样, 我们就可以较准确地算出考虑磁饱和、介质的各向异性性质、定转子开槽、绕组端部电密的复杂分布等一系列因素时, 电机横断面或者电机部分区域内磁场的二维或三维分布.

旋转电机内的电磁场, 从作用上看, 大体上可分成以下几类:

- (1) 气隙磁场;
- (2) 铁心内的磁场;
- (3) 绕组端部磁场;
- (4) 槽内漏磁场和凸极电机主极的极间漏磁场;
- (5) 实心转子中的电磁场.

其中(1)和(2)为主磁场;(3)和(4)是漏磁场.

按照是否随时间而变化, 电机内的电磁场可分为:

- (1) 恒定磁场;
- (2) 时变电磁场.

同步电机的主极磁场、极间漏磁场等属于恒定磁场. 交流电机定子槽内导体的涡流损耗、实心转子感应电机内的电磁场问题等均属于时变电磁场问题. 由于电机中时变电磁场的变化频率很低, 电机的线性尺寸比电磁波的波长要小得多, 因此位移电流可以忽略不计; 在电磁场理论中, 这种场称为似恒电磁场. 对于似恒电磁场, 在导电介质中, 麦

克斯韦方程简化为涡流方程。研究实心转子或导体中的涡流时，都是从涡流方程出发来求解。对于非导电媒介质，或者可以忽略导体中的涡流和集肤效应的情况，麦克斯韦方程进一步简化为拉普拉斯方程或泊松方程，即所研究的问题实质上可以作为恒定磁场问题来处理，例如气隙磁场，电枢槽内的漏磁场，变压器原、副绕组间的漏磁场等。

本书先研究电机内的恒定磁场问题，然后研究时变电磁场问题，最后专设一章集中研究大型同步电机中的电磁场问题。研究时着重注意分析和解决问题的方法，同时注意到联系实际。由于电机内的磁场问题(例如气隙磁场、槽内磁场等)大多可以简化成二维的情况，所以在整个分析中，我们将以二维问题为主。对于某些需要作为三维问题来处理的，例如实心转子感应电动机、汽轮发电机的端部磁场等问题，我们将引入三维分析。

由于数值法的巨大威力，以及在科学研究工作和实际工程问题中的日益广泛应用，本书以相当大的篇幅来阐明数值法(特别是有限元法)的基本思想和实施；并以直流电机、感应电机和同步电机中一系列大家关心的实际问题为例，说明数值法的应用。为了反映 80 年代末三维涡流场计算方面的巨大进展，同时考虑到三维计算的发展前景，在第四章和第七章中分别列入了三维恒定磁场、三维涡流场和准三维行波电磁场的数值计算等内容，使读者对三维问题的数值解法有一个基本的了解。由于篇幅的限制，对积分方程法、边界元法等其他数值方法，本书没有列入。

第一章 恒定磁场的基本理论

电机中的电磁场问题,很多可以作为恒定磁场问题来研究.本章首先说明恒定磁场的基本定律及其积分和微分形式,然后引入标量磁位和向量磁位,并导出其所满足的微分方程,最后对恒定磁场的唯一性作一简介.

1-1 恒定磁场的基本方程^[1-6]

不随时间变化的电流称为恒定电流,在恒定电流周围将形成恒定磁场.恒定磁场的分布可用磁感强度 $\mathbf{B}$ 来描述.实验证明,在恒定磁场中,磁场强度 $\mathbf{H}$ 和磁感强度 $\mathbf{B}$ 分别遵守安培环路定律和磁通连续性定律.下面对这两条定律作一简要说明.

(一) 安培环路定律

在恒定磁场内,磁场强度沿任意闭合曲线 C 的线积分值,恰好等于通过以 C 为边缘的曲面 S 的电流值,这个规律就称为安培环路定律.用数学形式表示时,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (1-1)$$

式中 $\mathbf{J}$ 为通过微分面积 $d\mathbf{S}$ 处的电流密度向量,积分 $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ 表示通过曲面 S 的电流;回线 C 的循行方向与面积 S 的法线方向之间符合右手螺旋关系.式(1-1)是安培环路定律的积分形式.

研究磁场问题时,常需知道磁场中任意一点的 $\mathbf{H}$ 值,因此应设法找出与式(1-1)相应的微分形式.

利用向量分析中的斯托克斯定理,可得

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\text{rot} \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

于是

$$\int_S (\text{rot} \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

由于上式对任意闭合曲线 C 以及把 C 作为边界的任意曲面 S 都成立,所以等式左、右积分号内的被积函数应当相等,即

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1-2)$$

此式就是安培环路定律的微分形式.式(1-2)说明,磁场强度的旋度就等于该点的电流密度.

研究电机磁场问题时,常用的坐标系为直角坐标系和圆柱坐标系.在直角坐标系中, $\text{rot} \mathbf{H}$ 的表达式为

$$\begin{aligned}\text{rot}\mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1-3)$$

在圆柱坐标系中:

$$\begin{aligned}\text{rot}\mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r \frac{1}{r} & \mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_z \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\theta & H_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{a}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_\theta \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \mathbf{a}_z \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1-4)$$

(二) 磁通连续性定律

分析和实验表明, 对空间任意区域, 出、入闭合曲面 S 的磁通量恒相等; 即磁感强度 $\mathbf{B}$ 对闭合曲面 S 的面积分恒等于零,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1-5)$$

这一规律就称为磁通连续性定律, 式(1-5)为其积分形式. 式(1-5)说明, 磁通线是处处连续的, 无头无尾的.

从式(1-5)出发, 利用向量分析中的高斯定理, 不难证明

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (1-6)$$

这就是磁通连续性定律的微分形式. 式(1-6)说明, 磁感强度的散度恒等于零, 即 $\mathbf{B}$ 是一个无源场.

在直角坐标系中, $\text{div}\mathbf{B}$ 的表达式为

$$\text{div}\mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1-7)$$

在圆柱坐标系中

$$\text{div}\mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1-8)$$

以上这两条定律均未涉及介质的磁性质, 即无论对什么介质, 它们都成立. 至于场向量 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 之间的关系, 则将取决于介质的磁性质.

(三) 介质的宏观磁性质

介质的电磁性质是很复杂的, 但是一般来讲, 介质内每点的 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间常可用该点的磁导率 μ 将其联系起来, 即

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-9)$$

式(1-9)就称为介质的成分方程. 对于各向同性的磁介质, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 为同一方向, 此时 μ 为一标量; 若介质为线性, 则 μ 为常值; 若介质为非线性, 则 μ 将是磁感强度的函数. 对

于非各向同性的介质, μ 将是一个张量.

在电机中, 常见的介质有两种, 一是空气, 一是铁心. 空气的磁导率 μ_0 为一常值, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$. 铁心则是一种非线性磁介质, 且严格来讲 B 与 H 之间不是单值关系. 但在工程分析中, 一般把铁心的平均磁化曲线作为其 $B \sim H$ 关系, 即认为 B 、 H 之间为单值关系; 且在多数情况下近似认为 $\mu_{Fe} = \text{常值}$.

(四) 恒定磁场的基本方程

综上所述, 可得恒定磁场的基本方程为:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1-10)$$

从亥姆霍兹定理可知, 对于无界空间中的一个向量场, 若其旋度和散度在整个空间中的值已经给定, 则该向量场就是完全确定的. 从式(1-10)可见, 若空间的电流密度分布给定, 则 $\mathbf{H}$ 的旋度就是确定的; 另外 $\mathbf{B}$ 的散度恒等于零; 而 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{H}$ 又通过成分方程联系起来. 因此, 式(1-10)是恒定磁场的一个完整方程组, 它将导致一个 $\mathbf{B}$ (或 $\mathbf{H}$) 的偏微分方程, 并使场向量得以确定.

1-2 标量磁位和向量磁位^[1-5]

按照磁场强度的旋度是否等于零, 恒定磁场分成无旋场和旋度场两种. 从式(1-10)可知, 在电流密度 $\mathbf{J} = 0$ 处 (载流区之外), $\text{rot} \mathbf{H} = 0$, 该处的磁场就是无旋场; 在 $\mathbf{J} \neq 0$ 处 (载流区内部), $\text{rot} \mathbf{H} \neq 0$, 该处的磁场为旋度场.

(一) 无旋磁场和标量磁位

由向量分析可知, 旋度为零的向量场总可以表示为一标量的梯度场. 在无旋磁场中, 由于磁场强度的旋度为零, 所以磁场强度可表示为一标量 Ω 的梯度, 即

$$\mathbf{H} = -\text{grad} \Omega \quad (1-11)$$

Ω 称为标量磁位.

在直角坐标系中, $\text{grad} \Omega$ 的表达式为:

$$\text{grad} \Omega = \mathbf{i} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1-12)$$

所以

$$H_x = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad H_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1-13)$$

在圆柱坐标系中,

$$\text{grad} \Omega = \mathbf{a}_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1-14)$$

所以

$$H_r = -\frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}, \quad H_z = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (1-15)$$

下面可以见到, 引入标量磁位 Ω 后, 仅需求解 Ω 所满足的标量偏微分方程即可确定场的分布, 而无需直接求解 $\mathbf{H}$ 的向量偏微分方程, 从而使场的求解得到简化.

标量磁位 $\Omega = \text{常值}$ 的曲面(曲线)就称为标量等磁位面(线)。可以证明,标量等磁位面(线)和磁力线互成正交(图 1-1)。另外,若空间存在载流导体,则任意两点 A 和 B 之间的标量磁位差可为多值。例如在图 1-2 中,若从 A 点出发,环绕电流 i 后到达 B 点,则 A 、 B 两点的磁位差 Ω_{AB} 应为

$$\Omega_{AB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = ki + \int_{AmB} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = ki + \Omega_{AmB} \quad (1-16)$$

式中 Ω_{AmB} 为从 A 点经 m 到达 B 点(即不环绕电流 i)时 A 、 B 两点的磁位差; k 为环绕 i 的次数。

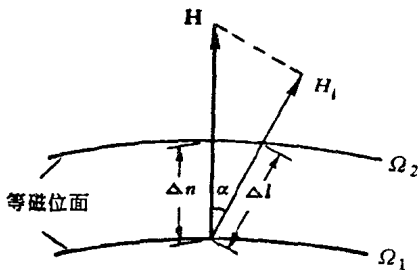


图 1-1 磁力线与标量等磁位面

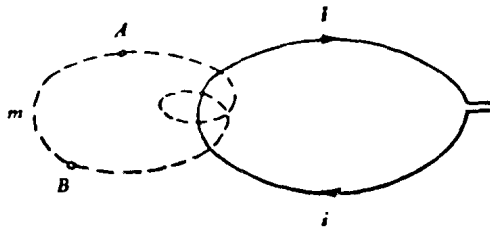


图 1-2 标量磁位的多值性

对于各向同性介质,把式(1-11)和(1-9)代入式(1-6),可得

$$\text{div}(\mu \text{grad} \Omega) = 0 \quad (1-17)$$

这就是标量磁位所满足的微分方程。

对于线性均匀介质, $\mu = \text{常值}$, 于是

$$\text{div}(\text{grad} \Omega) = \nabla^2 \Omega = 0 \quad (1-18)$$

即标量磁位 Ω 满足拉普拉斯方程。在直角坐标系中,拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = 0 \quad (1-19)$$

在圆柱坐标系中,

$$\nabla^2 \Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} = 0 \quad (1-20)$$

对非线性介质, $\mu \neq \text{常值}$, 此时在直角坐标系中式(1-17)的展开式将为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) = 0 \quad (1-21)$$

在圆柱坐标系中则有

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right) = 0 \quad (1-22)$$

即 Ω 满足准拉普拉斯方程。

无旋磁场除了可用标量磁位 Ω 来表征和计算之外,还可用向量磁位 $\mathbf{A}$ 来分析、计算。下面可以看到,在无旋场内, $\mathbf{A}$ 满足向量拉普拉斯方程。

(二) 旋度场和向量磁位

在旋度场中 $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \neq 0$, $\mathbf{H}$ 不能用一个梯度场来表示,因而不存在标量磁位的概念。

但是由向量分析可知：一个散度为零的向量场总可以表示为另一向量的旋度场。由于磁感强度的散度恒等于零，故为便于计算，在旋度磁场中可以引入一个向量磁位 $\mathbf{A}$ ，使

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (1-23)$$

根据亥姆霍兹定理，为使 $\mathbf{A}$ 成为唯一，还应确定 $\mathbf{A}$ 的散度。对于恒定磁场，为便于解出 $\mathbf{A}$ ，通常规定

$$\text{div} \mathbf{A} = 0 \quad (1-24)$$

此规定称为库仑规范。由此即可导出 $\mathbf{A}$ 所满足的微分方程。

把 $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ 代入 $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ，可得

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \quad (1-25)$$

对于线性介质， $\mu = \text{常值}$ ，上式可简化为

$$\text{rot rot} \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (1-26)$$

式(1-26)通常称为 $\mathbf{A}$ 的旋度旋度方程。再考虑到

$$\text{rot rot} \mathbf{A} = \text{grad div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

而 $\text{div} \mathbf{A}$ 已规定为 0，于是最后可得

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (1-27)$$

式中 ∇^2 是作用于向量 $\mathbf{A}$ 的向量拉普拉斯算符^①。式(1-27)就是介质为线性时 $\mathbf{A}$ 所满足的微分方程，此式为一向量方程，称为向量泊松方程。

对于直角坐标系， $\nabla^2 \mathbf{A}$ 恰好等于标量拉普拉斯算符 ∇^2 分别作用于 A_x 、 A_y 、 A_z 后所组成的向量，即

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{i} \nabla^2 A_x + \mathbf{j} \nabla^2 A_y + \mathbf{k} \nabla^2 A_z \quad (1-28)$$

此时向量泊松方程(1-27)可以分解成三个标量方程，即

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu J_z \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

式(1-29)说明：在旋度磁场中，向量磁位及其在直角坐标系内的三个分量都满足泊松方程。在无旋场中， $\mathbf{J} = 0$ ，向量磁位满足拉普拉斯方程。

由泊松方程解出向量磁位后，由 $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ 即可求出磁感强度 $\mathbf{B}$

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{i} B_x + \mathbf{j} B_y + \mathbf{k} B_z \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

对于圆柱坐标系，根据向量拉普拉斯算符的定义，经过运算可知， $\mathbf{A}$ 的三个分量 A_r 、 A_θ 和 A_z 应满足下列方程：

① 向量拉普拉斯算符的定义为：

$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \text{rot rot} \mathbf{A}$ 。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} &= -\mu J_r \\ \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} &= -\mu J_\theta \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} &= -\mu J_z \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} &= -\mu J_r \\ \nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2} A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} &= -\mu J_\theta \\ \nabla^2 A_z &= -\mu J_z \end{aligned} \right\} \quad (1-32)$$

而

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \quad B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{a}_r B_r + \mathbf{a}_\theta B_\theta + \mathbf{a}_z B_z \end{aligned} \right\} \quad (1-33)$$

式(1-32)说明,在圆柱坐标系中, A_z 单独满足标量泊松方程, A_r 和 A_θ 则组成联立偏微分方程组。

电机内许多磁场问题可以作为二维平行平面场来处理。对于二维平行平面磁场,若电流密度为 z 方向, $\mathbf{J}=\mathbf{k}J_z$, $J_x=J_y=0$,则向量磁位亦为 z 方向, $\mathbf{A}=\mathbf{k}A_z$, $A_x=A_y=0$,且磁场和磁位沿 z 方向的变化率为零,因此仅需求解 A_z 的二维泊松方程即可。对于直角坐标系,

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z \quad (1-34)$$

而

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (1-35)$$

此时求解向量场 $\mathbf{B}$ 的问题,转化为一个求解 A_z 的二维标量泊松方程问题,使求解显著简化。

对于极坐标系,若 $\mathbf{J}=\mathbf{a}_z J_z$, $J_r=J_\theta=0$,则 $\mathbf{A}=\mathbf{a}_z A_z$, $A_r=A_\theta=0$,此时有

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} = -\mu J_z \quad (1-36)$$

而

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta}, \quad B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (1-37)$$

向量磁位求出后,通过某一面积 S 的磁通量 Φ 即可求出:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C A_x dx + A_y dy + A_z dz \end{aligned} \quad (1-38)$$

式中 C 为曲面 S 的周界曲线(图1-3)。式(1-38)说明:通过面积 S 的磁通量就等于向量磁

位 $\mathbf{A}$ 沿 S 面周界曲线 C 的回路积分值.

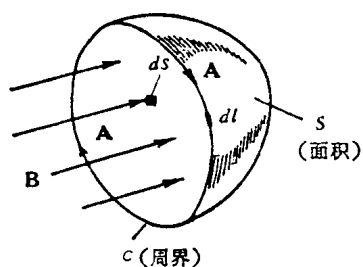


图 1-3 由向量磁位 $\mathbf{A}$ 求磁通量 Φ

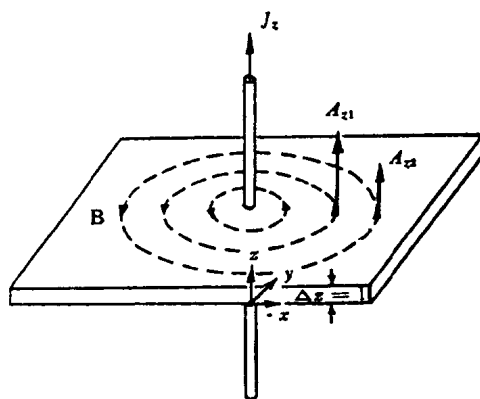


图 1-4 二维平面场中 A_z 与 Φ 的关系

对于二维平行平面磁场, 由于 $A_x = A_y = 0$, 所以通过单位轴向长度 ($\Delta z = 1$) 的磁通量 Φ 应为(图 1-4):

$$\begin{aligned}\Phi_{(\Delta z=1)} &= \oint_C A_z dz = \int_0^1 A_{z2} dz - \int_0^1 A_{z1} dz \\ &= A_{z2} - A_{z1} = \Delta A_z\end{aligned}\quad (1-39)$$

上式说明, 通过 1、2 两点轴向为单位的矩形面积内的磁通量 $\Phi_{(\Delta z=1)}$, 就数值而言, 恰好等于该两点向量磁位值 A_{z2} 和 A_{z1} 之差. 故在二维情况下, A_z 将具有力线函数的性质, 且等 A_z 线就可以代表磁力线. 这是二维平行平面磁场中向量磁位 A_z 具有的一个重要特点.

1-3 恒定磁场的边界条件^[1,6-10]

实际问题的求解域常常是有界的. 另外, 在所研究的区域内部, 常常会遇到不同 μ 值的磁介质(例如空气和铁心)形成一些交界面. 研究通过边界(交界面)时场向量 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 的变化规律, 并建立起相应的边界(交界面)条件, 对于求解具有特定边界的磁场问题是必不可少的.

在交界面处, 由于介质性质的突变, 场向量亦会发生突变; 因此边界条件应当用磁场基本方程组的积分形式(而不是微分形式)来导出.

(一) 磁感强度的边界条件

设交界面一侧的磁导率为 μ_1 , 另一侧为 μ_2 . 穿过交界面作一平行于交界面的无限薄的小扁平匣, 小匣上、下面的面积 $S_1 = S_2 = \Delta S$, 如图 1-5 所示. 把磁通连续性定律应用到该小匣, 并使 $\Delta S \rightarrow 0$, 再考虑到小匣侧面的面积为一高阶无穷小量, 可得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (B_{1n} - B_{2n}) \Delta S = 0$$

即