现代数学基础丛书

广义哈密顿系统理论及其应用

李继彬　赵晓华　刘正荣　著

科学出版社

现代数学基础丛书

广义哈密顿系统理论及其应用

李继彬 赵晓华 刘正荣 著

科学出版社

1994

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书采用广义 Poisson 括号（实际上是 Lie 群、Lie 代数）的方法，系统论述广义 Hamilton 系统及其扰动系统的理论及应用。本书内容自相包含，理论与应用兼顾，便于读者阅读。

本书可供大学数学系、物理系、力学系及工程领域有关科系的学生、研究生、教师以及有关的科技工作者参考。

现代数学基础丛书
广义哈密顿系统理论及其应用
李继彬　赵晓华　刘正荣 著
责任编辑　吕虹
科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
化学工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1994 年 12 月第　一　版　　开本：850×1168 1/32
1994 年 12 月第一次印刷　　印张：8 3/4
印数：1－1 500　　字数：224 000
ISBN 7-03-004220-4/O・735
定价：11.80 元

前　言

随着人类认识、改造和利用自然的能力的不断提高，以及实际应用的需要，人们面临大量非线性问题的处理. 计算机的发展、计算技术的提高及其应用的普及、实验手段和仪器的现代化以及现代数学的蓬勃发展，特别是本世纪 50 年代以来可微动力学理论及遍历理论的新进展，为非线性现象的研究提供了严格的数学基础，使得人们处理非线性系统的能力大为增强. 非线性系统中丰富的定常运动和复杂的混沌运动模式被不断地揭示出
吸引着越来越多的理论和应用工作者的极大兴趣和关注. 近 20 年来所获得的丰富研究成果对于人类进一步认识、利用和改造自然已产生深刻的影响.

Hamilton（哈密顿）系统是非线性科学研究中的一个重要领域，由于这类系统广泛存在于数理科学、生命科学以及社会科学的各个领域，特别是天体力学、等离子物理、航天科学以及生物工程中的很多模型都以 Hamilton 系统（或它的扰动系统）的形式而出现. 因此该领域的研究多年来长盛不衰. 经过科学家们近两个世纪的努力，Hamilton 系统理论犹如一棵参天大树，已经根深叶茂，成为当今非线性科学研究中一个最富成果而又生机勃勃的研究方向.

传统的 Hamilton 系统理论都是在偶数维相空间上定义的，这种结构虽然具有很多好的性质，便于对它的研究，但也限制了它的应用范围. 为了使得 Hamilton 观点能应用于广泛存在于实际研究中的奇数维常微分方程组以及无穷维系统（例如，偏微分系统、泛函微分方程等），用广义 Poisson 括号直接定义广义 Hamilton 系统是一种非常简洁有效的方法. 鉴于国内用这种观点讨论 Hamilton 系统的工作尚不多见，而且缺乏关于广义 Hamilton 系统理论的专著与教材，本书将补充这方面的不足，

采用广义 Poisson 括号（实际上是 Lie 群、Lie 代数）的方法，讨论广义 Hamilton 系统及其扰动系统的理论及应用．为了使本书的内容自相包含，便于读者理解，我们首先介绍散见于国外专著和期刊的某些基本结果及有关的基础知识．接着我们讨论广义 Hamilton 系统的扰动理论与应用，内容主要取材于作者近年来发表的一些科研成果．

本书理论与应用兼顾，可供有关数学、物理、力学及工程领域的研究生和高年级大学生作为教材或教学参考书．对于非线性科学的理论及实际应用研究有兴趣的读者，亦可作为进一步研究的参考读物．

全书共分六章．第一章作为预备知识，介绍 Lie 群与 Lie 代数的定义及其理论，其中有较重要的 Frobenius 定理．第二章介绍分枝与混沌的基本概念和一些最基本的结果．第三章介绍广义 Hamilton 系统的定义及系统的约化理论，主要涉及广义 Hamilton 系统相空间的叶层结构以及平衡点稳定性判定的能量 Casimir 函数法．一、三两章中的内容大部分取材于 P.J.Olver (1986) 一书（见书末的参考文献）．第四章介绍完全可积系统的定义以及某些判定动力系统可积性并发现首次积分的方法．第五章讨论广义 Hamilton 扰动系统的周期解分枝与同宿、异宿分枝的存在性及其判定，提供了某些便于应用的公式和定理．第六章是理论的应用实例，涉及刚体动力学、流体力学、等离子物理以及生物科学等自然科学各个领域．

在此，特别感谢中国科学院出版基金和昆明工学院科研处的出版资助，感谢国家自然科学基金委员会、云南省科委、云南省应用数学研究所、云南大学和昆明工学院非线性科学研究中心的支持．对于科学出版社吕虹责任编辑的辛勤劳动和大力帮助，以及云南大学学报编辑部唐民英编审在打印和校对上的帮助，一并表示深切的谢意．本书部分内容取材于第二作者赵晓华在北航的博士论文，在此感谢他的博士导师黄克累教授和副导师陆启韶教授对他的关心和指导．

目 录

第一章　Lie 群与 Lie 代数导引

Lie 群是群这一代数概念与流形这一几何概念相结合的产物．这两个看似互不相干的数学概念的相互渗透与交叉产生了 Lie 群这一新的数学理论，其强有力的无穷小分析技巧已被广泛地应用于各种各样的数学物理和力学问题之中．

在实际应用领域，Lie 群通常是某个研究对象的对称群．更确切地说，Lie 群是作用在某个流形上的局部变换群．在 Lie 群理论中的一个重要概念是向量场概念，它可看作是某个单参数 Lie 变换群的无穷小生成元．应用这一概念可以简化微分方程中的一些复杂的非线性问题，使得原问题得以求解．

本章的主要目的是扼要地介绍 Lie 群与 Lie 代数的一些基本概念和理论，为本书后面各章的展开作理论准备，对于广义 Hamilton 系统理论的引入及发展，本章的知识是极其重要的．

§ 1.1　流形

流形是三维欧氏空间中的曲线和曲面概念的推广．一般地说，流形就是局部看似欧氏空间而全局特征不全相同的拓扑空间．流形的严格定义如下．

定义 1.1.1　一个 m 维流形是满足以下条件的集合 M：存在可数多个称为坐标卡（或图集）的子集合族 $U_\alpha \subset M$，以及映到 $\mathbf{R}^m$ 的连通开子集 V_α 上的一对一映射 φ_α：$U_\alpha \to V_\alpha$，φ_α 称为局部坐标映射，满足如下条件:

（a）　坐标卡覆盖M，即

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = M;$$

(b) 若 $U_{\alpha}\bigcap U_{\beta}\neq\phi$，则 $\varphi_{\beta}\cdot\varphi_{\alpha}^{-1}$: $\varphi_{\alpha}(U_{\alpha}\bigcap U_{\beta})\to\varphi_{\beta}(U_{\alpha}\bigcap U_{\beta})$ 是光滑函数;

(c) 若 $x\in U_{\alpha}$, $\tilde{x}\in U_{\beta}$ 是 M 中的两个不同点，则存在开子集 $W\subset V_{\alpha}$, $\tilde{W}\subset V_{\alpha}$, $\varphi_{\alpha}(x)\in V_{\alpha}$, $\varphi_{\beta}(\tilde{x})\in V_{\beta}$, 使得 $\varphi_{\alpha}^{-1}(W)\bigcap\varphi_{\beta}^{-1}(\tilde{W})=\phi$.

条件(c)也称为 Hausdorff 分离性质．利用下面的图有助于理解流形的定义．

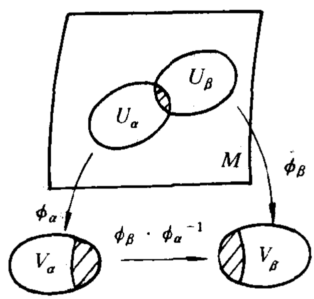

图1.1.1 流形上的坐标卡（图集）

为了正确理解流形的一般定义，兹举几个最简单的基本例子加以说明．

例 1.1.1 最简单的 m 维流形就是欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 自身．此时只需一个坐标卡 $U=\mathbf{R}^m$，恒同映射 $\varphi=I$: $\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ 作为坐标映射．更一般地，$\mathbf{R}^m$ 的任意开子集都是一个 m 维流形．

例 1.1.2 单位球面

$$S^2=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$$

是一个二维流形.实际上，令

$$U_1=S^2\setminus\{(0,\ 0,\ 1)\},\quad U_2=S^2\setminus\{(0,\ 0,\ -1)\}.$$

$$\varphi_{\alpha}:\ U_{\alpha}\to\mathbf{R}^2\simeq\{(x,\ y,\ 0)\},\qquad \alpha=1,\ 2$$

分别是从南北极的球极投影，即

$$\varphi_1(x,\ y,\ z)=\left(\frac{x}{1-z},\ \frac{y}{1-z}\right),$$

$$\varphi_2(x,\ y,\ z)=\left(\frac{x}{1+z},\ \frac{y}{1+z}\right).$$

容易证明在交集$U_1\bigcap U_2$上，传递映射

$$\varphi_1\cdot\varphi_2^{-1}:\ \mathbf{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$$

是一个光滑的微分同胚:

$$\varphi_1\cdot\varphi_2^{-1}(x,\ y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

定义中的条件(c)可以从$\mathbf{R}^3$的性质得出.

例1.1.3 单位圆

$$S^1=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$$

是一个具有两个坐标卡的一维流形. 更一般地，m 个 S^1 的 Descartes 积

$$T^m=S^1\times S^1\times\cdots\times S^1$$

是一个m维流形，称为m维环面.

定义 1.1.2 设 M 和 N 是两个光滑流形，F: $M\to N$ 是一个映射. 如果 F 在每个坐标卡上的局部坐标表示都是光滑的，则称 F 是光滑映射. 即对 M 上的每个坐标卡 φ_α: $U_\alpha\to V_\alpha\subset\mathbf{R}^m$ 和 N 上的每个坐标卡$\tilde{\varphi}_\beta$: $\tilde{U}_\beta\to\tilde{V}_\beta\subset\mathbf{R}^n$，复合映射

$$\tilde{\varphi}_\beta\cdot F\cdot\varphi_\alpha^{-1}:\ \mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$$

在有定义的地方(即在子集$\varphi_\alpha[U_\alpha\bigcap F^{-1}(\tilde{\varphi}_\beta)]$上)是光滑的.

例 1.1.4 证明环面 T^2 可以光滑地映射到 $\mathbf{R}^3$ 中. 实际上，定义 F: $T^2\to\mathbf{R}^3$:

$$F(\theta,\ \rho)=((\sqrt{2}+\cos\rho)\cos\theta,\ (\sqrt{2}+\cos\rho)\sin\theta,\ \sin\rho).$$

则 F 显然关于 θ 和 ρ 是光滑的，并是一一映射.

定义 1.1.3 设 F: $M\to N$ 是 m 维流形 M 到 n 维流形 N

的光滑映射，F 在点 $x \in M$ 的秩就是 $n \times m$ Jacobi 矩阵 $(\partial F^i / \partial x^j)$ 在 x 的秩，其中 $y = F(x)$ 是 x 附近的任意方便的局部坐标表示．如果对子集 $S \subset M$ 中的每点，F 的秩都等于 m 和 n 中最小者，则称 F 在 S 上有最大秩．

容易验证 F 在点 x 的秩并不依赖于特定的局部坐标．

定理 1.1.1 若 F: $M \to N$ 在 $x_0 \in M$ 处有最大秩，则存在 x_0 附近的局部坐标 $x = (x^1, \cdots, x^m)$ 和 $y_0 = F(x_0)$ 附近的局部坐标 $y = (y^1, \cdots, y^n)$ 使得 F 在这些坐标下有简单的形式:

$$y = (x^1, \cdots, x^m, 0, \cdots, 0), \quad \text{当 } n > m \text{ 时},$$

或

$$y = (x^1, \cdots, x^n), \quad \text{当 } n < m \text{ 时}.$$

这个定理很容易由隐函数定理推出.

下面引入子流形的概念．

定义 1.1.4 设 M 是光滑流形，N 是 M 的子集．如果存在流形 $\tilde{N}$ 和光滑一一映射 φ: $\tilde{N} \to N \subset M$，处处满足最大秩条件，则称 N 是 M 的子流形，$\tilde{N}$ 叫做参数空间，并且 $N = \varphi(\tilde{N})$. 特别，N 的维数与 $\tilde{N}$ 的相同，并且不会超过 M 的维数．

映射 φ 通常称为浸入（ immersion ），而 N 叫做浸入子流形．

除了上述浸入子流形的定义外，还有几种定义子流形的方式．

定义 1.1.5 若流形 M 的子集 N 是定义 1.1.4 意义下的子流形，由 φ: $\tilde{N} \to M$ 参数化，而且对 N 中每点 x 都存在 x 在 M 中的任意小开邻域 U，使得集合 $\varphi^{-1}[U \cap N]$ 是 $\tilde{N}$ 的连通开子集，则称 N 是 M 的正则（ regular ）子流形．

利用定理 1.1.1 可以得到某种正则性的局部坐标刻画．

引理 1.1.2 n 维子流形 $N \subset M$ 是正则子流形的充分必要条件，是对任意 $x_0 \in N$，存在定义在 x_0 的邻域 U 上的局部坐标 x

$=(x^1, \cdots, x^m)$ 使得

$$N \bigcap U = \{x \mid x^{n+1} = \cdots = x^m = 0\}.$$

引理中的坐标卡叫做M上的平坦(flat)坐标卡.

如图所示的 $\mathbf{R}^2$ 中的子集 (8 字形) 是一个浸入子流形而非正则子流形，问题出在原点 .

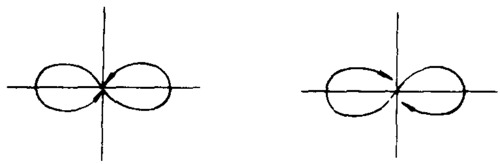

图1.1.2 子流形的例子

子流形还可以用一个光滑函数来隐式地定义 . 例如，若 F: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ 是一个光滑函数，而且在集合 $S=\{(x, y, z) \mid F(x, y, z)=0\}$ 上，F 的梯度 $\nabla F=(F_x, F_y, F_z)$ 不等于零，那么根据隐函数定理，可以证明 S 是 $\mathbf{R}^3$ 的二维子流形，这样定义的子流形叫做隐式地定义的子流形 .

定理 1.1.3 若 M 是 m 维流形，F: $M \to \mathbf{R}^n (n \leqslant m)$ 是光滑映射 . 如果 F 在子集 $N=\{x \mid F(x)=0\}$ 上有最大秩，那么 N 是一个正则的 $m-n$ 维子流形 .

最后，我们给出光滑流形 M 上的曲线的定义 .

定义 1.1.6 对于光滑映射 φ: $I \to M$，其中 $I \subset \mathbf{R}$ 是子区间，φ 的象集 $C=\varphi(I) \subset M$ 称为 M 上的一条曲线 . 在局部坐标下，C 由 m 个函数 $\varphi(t)=(\varphi^1(t), \cdots, \varphi^m(t))$ 确定 .

注意，在定义中并没有要求 φ 是一对一的，因此 C 可以自交，它比一维子流形更一般 .

§ 1.2 Lie群

在引入 Lie 群概念之前，先复习一下群的定义 .

定义 1.2.1 集合 G 称为群，倘若对 G 的元素定义一个群运算，称为乘法，满足下面的条件：

(1) 封闭性：若 $g, h\in G$，则 $g\cdot h\in G$；

(2) 结合律：$g\cdot(h\cdot k)=(g\cdot h)\cdot k,\quad g,h,k\in G$；

(3) 存在单位元 $e\in G$，使得 $e\cdot g=g=g\cdot e$，对于一切 $g\in G$；

(4) 存在逆元素，即对于一切 $g\in G$，存在 $g^{-1}\in G$ 使得

$$g\cdot g^{-1}=e=g^{-1}\cdot g.$$

以下是一些常见群的例子．

例 1.2.1 取 $G=\mathbf{Z}$（整数集合），群运算定义为通常的整数加法，则 G 显然是一个群，其单位元是 0，而整数 $x\in G$ 的逆元是 $-x$．

类似地，取 $G=\mathbf{R}$（全体实数），则在实数加法的群运算下，G 也是一个群．

上述两种群的运算还满足交换律：

$$\text{对于一切} g,h\in G\qquad g\cdot h=h\cdot g.$$

这样的群称为交换群或可交换群．

例 1.2.2 设 $G=\mathrm{GL}(n,\mathbf{Q})$ 是元素为有理数的一切 $n\times n$ 可逆矩阵的集合，矩阵乘法为群运算，则 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{Q})$ 也是一个群，其单位元是单位矩阵，逆元素就是通常的逆矩阵．

类似地，设 $G=\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 是具有实数元素的一切 $n\times n$ 可逆矩阵的集合，在矩阵乘法下，$\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 是一个群，称为一般线性群，简记为 $\mathrm{GL}(n)$．

定义 1.2.2 若群 G 具有 r 维光滑流形结构，使得群运算

$$m:\ G\times G\to G,\quad m(g,h)=g\cdot h,\quad g,h\in G$$

和逆元运算

$$i:\ G\to G,\ \ i(g)=g^{-1},\quad g\in G$$

是流形间的光滑映射，则称 G 为 r 参数Lie群．

由定义 1.2.2 可见，Lie 群与一般群的区别在于它具有光滑

流形结构，因此 Lie 群的元素可以连续变化．在例 1.2.1 与例 1.2.2 中，$\mathbf{Z}$ 和 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{Q})$ 都不可能是 Lie 群，因为有理数不是连续变化的．而 $\mathbf{R}$，$\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 都是 Lie 群，因为 $\mathbf{R}$ 显然具有流形结构，对于一般线性群 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})=\{X\in M_{n\times n}\mid \det X\neq 0\}$，它是一切 $n\times n$ 矩阵空间 $M_{n\times n}$ 的开子集．若取 X 的元素 x_{ij} 为坐标，则 $M_{n\times n}$ 与 $\mathbf{R}^{n^2}$ 同构，从而 $\mathrm{GL}(n)$ 是一个 n^2 维流形，并且是光滑的．

除了上述两个 Lie 群例子外，还有下面一些常见的 Lie 群．

例 1.2.3 $G=\mathbf{R}^r$，显然 $\mathbf{R}^r$ 具有光滑流形结构，而且向量加法的群运算 $(x,y)\to x+y$ 和向量 x 的逆元是 $-x$，这两种运算都是光滑的，因此 $\mathbf{R}^r$ 是 r 参数可交换 Lie 群．

例 1.2.4 $G=\mathrm{SO}(2)$ 为平面旋转群．换言之

$$G=\left\{\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\middle|\ 0\leqslant\theta<2\pi\right\},$$

其中 θ 表示旋转角．另一方面 G 可以和 $\mathbf{R}^2$ 中的单位圆 $S^1=\{(\cos\theta,\sin\theta)\mid 0\leqslant\theta<2\pi\}$ 等同，从而通过 S^1 定义 $\mathrm{SO}(2)$ 上的光滑流形结构．

如果把反射变换也包含在 $\mathrm{SO}(2)$ 中，就得到平面正交群 $O(2)=\{X\in\mathrm{GL}(2)\mid X^TX=I\}$，其中 X^T 表示 X 的转置．$O(2)$ 是不连通单参数 Lie 群，其流形结构由两个不连通的 S^1 的流形结构组成．

更一般地，可以证明，一切 $n\times n$ 实正交矩阵的群 $O(n)=\{X\in\mathrm{GL}(n)\mid X^TX=I\}$ 是一个 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 参数 Lie 群，而 $O(n)$ 的子群 $\mathrm{SO}(n)$（特殊正交群）:

$$\mathrm{SO}(n)=\{X\in\mathrm{GL}(n)\mid\det X=+1\}$$

是 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 参数的连通 Lie 群．

易证，如果 G 和 H 分别是 r 和 s 参数 Lie 群，那么它们

的 Descartes 积 $G \times H$ 是一个 $(r+s)$ 参数 Lie 群，其群运算为 $(g, h)\cdot(\tilde{g}, \tilde{h})=(g\cdot\tilde{g}, h\cdot\tilde{h})$，$g$，$\tilde{g}\in G$，$h$，$\tilde{h}\in H$. 因此 r 维环面 T^r 作为 r 个 Lie 群 $S^1 \simeq \mathrm{SO}(2)$ 的 Descartes 积也是一个 Lie 群. 而且可以证明 T^r 是一个连通紧致的可交换 r 参数 Lie 群. 实际上，在同构意义下，具有上述性质的 Lie 群必为 T^r.

从前面的例子可以看出，一些 Lie 群是另一些更大 Lie 群的子群，比如 $\mathrm{SO}(n)$ 是 $O(n)$ 的子群，而 $O(n)$ 又是 $\mathrm{GL}(n)$ 的子群. 与浸入子流形相对应，我们有必要引入 Lie 子群的定义.

定义 1.2.3 Lie 群 G 的子集 H 叫做 Lie 子群，如果 H 是 G 的（浸入）子流形，即 φ: $\tilde{H}\to G$，$H=\varphi(\tilde{H})$，$\tilde{H}$ 是 Lie 群，φ 是 Lie 群上的同态映射.

例如，若 ω 是任一实数，则易知，子流形

$$H_\omega=\{(t, \omega t)\bmod 2\pi:\ t\in R\}\subset T^2$$

是 T^2 的单参数 Lie 子群. 当 ω 为有理数时，H_ω 同构于 $\mathrm{SO}(2)$，形成 T^2 的闭的正则子群；而当 ω 为无理数时，H_ω 与 Lie 群 $\mathbf{R}$ 同构，在 T^2 中稠.

由定义 1.2.3 可知，Lie 群的 Lie 子群不一定是正则子流形. 下面的定理为我们提供了一个检验正则子流形的方法.

定理 1.2.1 若 G 是 Lie 群，H 是 G 的闭子群，那么 H 是 G 的正则子流形，因此 H 本身也是一个 Lie 群. 反之，G 的任何正则 Lie 子群必为闭子群.

利用定理 1.2.1，容易证明 $O(n)$ 是 $\mathrm{GL}(n)$ 的正则 Lie 子群，而 $\mathrm{SO}(n)$ 是 $O(n)$ 的正则 Lie 子群.

在实际应用中，有时只需要考虑 Lie 群的单位元附近的元素，而不必对整个 Lie 群进行研究. 因此需要引入局部 Lie 群的概念.

定义 1.2.4 所谓 r 参数局部 Lie 群，由包含原点 O 的连通

开子集 $V_O \subset V \subset \mathbf{R}^r$ 和定义群运算的光滑映射 m: $V \times V \to \mathbf{R}^r$, 以及定义群的逆元素运算的光滑映射 i: $V_O \to V$ 构成，并且满足下列条件:

(1) 结合律: 若 $x, y, z \in V$ 且 $m(x, y)$, $m(y, z) \in V$, 则 $m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$;

(2) 单位元: 对于一切 $x \in V$, $m(0, x) = x = m(x, 0)$;

(3) 逆元: 对每个 $x \in V_O$, $m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x)$.

注意，上述局部 Lie 群的定义是通过群运算的局部坐标表示来描述的，没有用到抽象的流形理论，因为流形在局部范围内与 Euclid 空间等同.

下面的例子说明，局部 Lie 群不一定是全局 Lie 群.

例 1.2.5 取 $V = \{x \mid |x| < 1\} \subset \mathbf{R}$, 群运算为

$$m(x, y) = \frac{2xy - x - y}{xy - 1}, \qquad x, y \in V.$$

通过直接计算可证结合律和单位元对 m 都成立，而逆元映射是 $i(x) = x / (2x - 1)$, 它仅在 $V_O = \{x \mid |x| < \frac{1}{2}\}$ 上定义. 从而 (V, m, i) 仅定义一个单参数局部 Lie 群.

对于给定的全局 Lie 群，可以利用包含单位元的局部坐标卡来构造局部 Lie 群. 每个局部 Lie 群局部地与某个全局 Lie 群的单位元的邻域同构.

定理 1.2.2 设 $V_O \subset V \subset \mathbf{R}^r$ 是局部 Lie 群，而 $m(x, y)$ 和 $i(x)$ 分别是它的群运算和逆元映射. 则存在一个全局 Lie 群 G 和包含其单位元的坐标卡 φ: $U^* \to V^*$, 其中单位元 $e \in U^*$, 使得 $V^* \subset V_O$, $\varphi(e) = o$, 并且对一切 $g, h \in U^*$, 以下两式成立:

$$\varphi(g \cdot h) = m(\varphi(g), \varphi(h)),$$

$$\varphi(g^{-1}) = i(\varphi(g)).$$

此外，存在唯一的具有上述性质的单连通 Lie 群 G^*. 如果 G 是