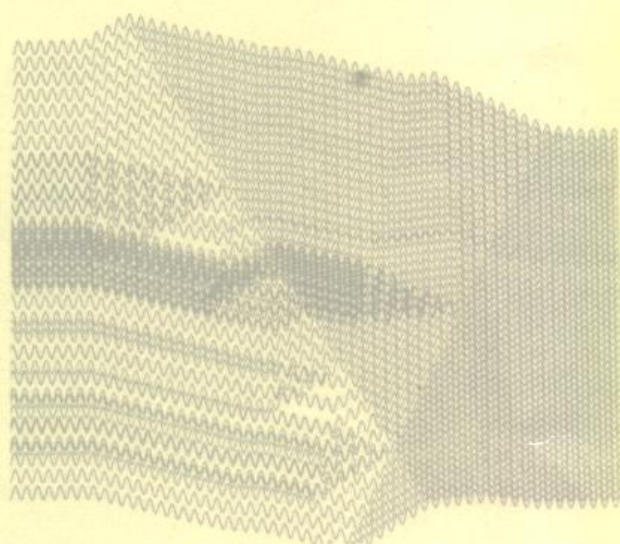


岩波講座 基礎工学 6

線形集中定数系論 IV

高橋秀俊 著



岩波書店

岩波講座 基礎工学 6 線形集中定数系論 IV (全19巻/第19回配本)

1971年11月26日 第1刷発行 ©

東京都千代田区一ツ橋2-5-5 株式会社 岩波書店/精興社印刷・松岳社製本

目 次

はじめに

第1章 線形系の静的な取扱い

1. 1 序 論	1
1. 2 素子の結合	5
1. 3 電源と内抵抗(定電圧源と定電流源)	9
1. 4 整合と反射	11
1. 5 梯子形結合	15
1. 6 4端子とその表現	17
1. 7 伝送行列	23
1. 8 S 行列	26
1. 9 梯子形4端子の定数	28
1.10 $2n$ 端子	32
1.11 一般回路の解法	36
1.12 電位方程式	37
1.13 Y_{ij} のみたす不等式	40
1.14 電流方程式	43

第2章 線形系の動的な取扱い

2. 1 単純な振動回路, 自由振動	49
2. 2 インパルス応答	55
2. 3 正弦波応答	58
2. 4 共 振	60
2. 5 ベクトル表示と複素数の利用	62
2. 6 電 力	68
2. 7 並列共振回路	69
2. 8 交流におけるインピーダンス整合	70
2. 9 過 渡 現 象	72

第3章 線形回路網の位相幾何学的な取扱い

3. 1 素子とその特性	77
3. 2 電流の連続性と電圧の連続性	79
3. 3 グラフとそれに関連した基礎概念	84
3. 4 線形電気回路の基本方程式	107
3. 5 相反性	122
3. 6 双対性	123

第4章 周波数の関数としてのインピーダンス

4. 1 L, R, C 2端子回路のインピーダンス	127
4. 2 インピーダンス関数 $Z(s)$ の性質	131
4. 3 LC 回路	137
4. 4 蓄えられたエネルギー	143
4. 5 RC 回路と RL 回路	145
4. 6 周波数変換	152
4. 7 LRC 2端子の合成	155
4. 8 相互インダクタンスを用いない合成法	161
4. 9 多端子の場合の正実性	164
4.10 過渡現象	166
4.11 微分方程式の解法	169
4.12 演算子	173
4.13 フーリエ変換	175
4.14 分散関係(クラマース-クローニッヒの関係)	177
4.15 ボーデの関係	182

第5章 各種の集中定数系

5. 1 ラグランジュ関数とラグランジュ方程式	188
5. 2 電気系の集中定数化	192
5. 3 電流回路の動力学	198
5. 4 磁気回路	202
5. 5 一般電磁界	205
5. 6 電気回路のラグランジュ方程式	206
5. 7 力学系の集中定数化	208

5. 8	線形系のラグランジュ方程式	213
5. 9	電気機械類推(直接類推と双対類推)	218
5.10	電気機械結合系	222
5.11	電磁結合系	230
5.12	熱系と拡散系	238
5.13	構造力学(平面トラスの問題)	246

第6章 伝送系としての4端子

6. 1	4端子の正実性	255
6. 2	リアクタンス4端子の合成	259
6. 3	梯子形構造によるLC4端子の実現	261
6. 4	多項式4端子	273
6. 5	与えられた動作伝達関数をもつLC4端子	276
6. 6	梯子形回路の等価変換	283
6. 7	梯子形LC回路上の波	285
6. 8	単一共振系による信号伝達	290
6. 9	4次の共振伝送系☆	302
6.10	共振回路の結合	304
6.11	結合共振回路の特性	306
6.12	導波管の枝分れ	318

第7章 対 称 性

7. 1	対称成分と反対称成分	323
7. 2	左右対称型回路の解析	326
7. 3	固有振動	333
7. 4	対称性と群	335
7. 5	循環対称	344
7. 6	非可換群 $\mathfrak{S}_3$	352
7. 7	$\mathfrak{S}_3$ の固有値問題	360
7. 8	対称の位置にある節点	365
7. 9	力学系の対称性——回転群	367
7.10	分子の振動(AB_2 型分子)	369
7.11	分子の振動(3角錐形分子)	373
7.12	立方晶系の対称性	375

第8章 周期的構造の線形系

8. 1	同じ4端子の縦続	381
8. 2	映像パラメーター	390
8. 3	LC4端子(無損失)の場合	395
8. 4	簡単な例	406
8. 5	定数が交互に変わる反復回路	415
8. 6	LC4端子の伝送帯と減衰帯☆	422
8. 7	群論的取扱い	428
8. 8	2次元の周期的構造	435
8. 9	2次元周期構造の対称性☆	438
8.10	逆格子	446
8.11	2次元格子振動の例	449

第9章 可変定数線形系

9. 1	外力のはたらかない断熱過程	457
9. 2	損失のない系のパラメーター励振	463
9. 3	周波数変換の4端子的な取扱い	474
9. 4	可変リアクタンスによる周波数変換	479
9. 5	パラメーター励振の回路論的取扱い	484
9. 6	縮退($\omega_1 = \omega_2$)の場合	491
終	り	495

第 8 章

周期的構造の線形系

この章では、同じ構造のものが周期的に無限に繰り返されているような系の性質について論じる。それは同じものが有限個繰り返されている場合の議論のある意味での極限であり、ここでも群の概念が基本的な役割を演ずる。1次元の繰り返し構造に続いて、2次元、3次元の周期的構造として、結晶格子の問題等が取り扱われる。

周期的構造の系では、現象は多くの場合波の形をとる。そこで、分布定数系の場合の波との類似性があらわれる。さらに、一般的に一様な分布定数系は周期的構造の極限であると考えられるので、その意味からも分布定数系への橋渡しとして考えたい。また無限に続く周期的な系には有限の系にはないいくつかの新しい性質があらわれてくる。

周期的な系を扱うには二通りの扱い方がある。一つは第7章でのべた方法を無限の場合に適用して、現象を対称操作の群の表現としてとらえる方法である。もう一つは同じ4端子を無限に縦続したものを考えて、4端子の入力端子から見た特性に着目する方法である。この二つの方法は出発点が違うだけで、結局は同じ結果に到達する。両者には適用範囲に多少の違いがあるから両方の考えを自由に使い分ける必要があるのであるが、ここではまず4端子の考えから入ることにする。

8.1 同じ4端子の縦続

いま伝送行列

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

であらわされた4端子が与えられたとして、これを n 個縦続したらどうなる

かを考えよう。その全体の伝送行列は、当然(8.1)の n 乗、つまり

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \quad (8.2)$$

となる。ここで(8.2)を計算するのに、そのまま行列の乗算をするかわりに、(8.1)をまず座標変換によって対角線行列になおすことを考える。それには

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= AV_2 + BI_2 = \lambda V_2, \\ I_1 &= CV_2 + DI_2 = \lambda I_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

と置いて、これを1次変換 $(V_2, I_2) \rightarrow (V_1, I_1)$ と考え、その固有解 $(V_2^{(1)}, I_2^{(1)})$, $(V_2^{(2)}, I_2^{(2)})$ を求める必要がある。ただし、 (V_1, I_1) , (V_2, I_2) は(8.1)で与えられる4端子の各端子対の電圧、電流である。なお、本章ではあとの便宜上図8.1のように電流の正の向きをきめる。

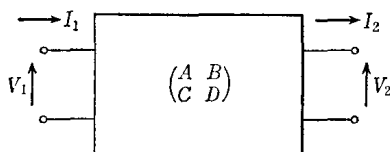


図8.1 4端子の電圧、電流の向き

(8.3)から V_2, I_2 を消去すると、

$$(A - \lambda)(D - \lambda) - BC = 0. \quad (8.4)$$

$AD - BC = 1$ を使って、整理すると

$$\lambda^2 - (A + D)\lambda + 1 = 0 \quad (8.5)$$

となる。そこで

$$\lambda = \frac{A+D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1} \quad (8.6)$$

$$= \frac{Z_{11} + Z_{22}}{2Z_{12}} \pm \sqrt{\frac{(Z_{11} + Z_{22})^2}{4Z_{12}^2} - 1}. \quad (8.6')$$

ただし、ここでは Z_{11}, Z_{22}, Z_{12} 等は図8.1のような電流の向きには関係なく、今まで通りの定義に従うものとする。

ここで(8.5)から明らかなように、固有値 λ の二つの値はいつも互いに逆数の関係になっている。そこでその一つを e^γ と書くと、二つの根は

$$\lambda = e^{\pm\gamma} \quad (8.7)$$

となる。ここで、どちらの根を e^r とするかをきめておく必要があるので

$$\operatorname{Re} \gamma > 0 \quad (8.8)$$

となるように約束する。 $-2 \leq A+D \leq 2$ のときは $\operatorname{Re} \gamma = 0$ となって、(8.8)からはどちらを γ とするかきめられないが、その場合のことはあとで考えることにする。

e^r に対応する(8.3)の解、つまり固有ベクトルを $(V_2^{(1)}, I_2^{(1)})$ とすると、

$$(A - e^r) V_2^{(1)} + B I_2^{(1)} = 0 \quad (8.9)$$

によって $V_2^{(1)} : I_2^{(1)}$ 、したがって $V_1^{(1)} : I_1^{(1)}$ がきまる。

同様に e^{-r} の方を使うと

$$(A - e^{-r}) V_2^{(2)} + B I_2^{(2)} = 0 \quad (8.9')$$

の解として $V_2^{(2)} : I_2^{(2)}$ がきまる。

こうして得た $(V_2^{(1)}, I_2^{(1)})$, $(V_2^{(2)}, I_2^{(2)})$ を使って、 V_2, I_2 を

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= u_1 V_2^{(1)} + u_2 V_2^{(2)}, \\ I_2 &= u_1 I_2^{(1)} + u_2 I_2^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

のように書くことができる。これは“ベクトル” (V_2, I_2) を、行列(8.1)の固有ベクトルで展開した形である。

すると、 (V_1, I_1) の方は

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= u_1 V_1^{(1)} + u_2 V_1^{(2)}, \\ I_1 &= u_1 I_1^{(1)} + u_2 I_1^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

となる。そうして、固有ベクトルについては

$$\left. \begin{aligned} V_1^{(1)} &= e^r V_2^{(1)}, & V_1^{(2)} &= e^{-r} V_2^{(2)}, \\ I_1^{(1)} &= e^r I_2^{(1)}, & I_1^{(2)} &= e^{-r} I_2^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

のような簡単な関係が成り立つ。

このような、固有ベクトルについて考えれば、図8.2のように同じ4端子を多数縦続した場合の問題を解くことは容易である。この場合の一つの固有解

$$V_r = V_r^{(1)}, \quad I_r = I_r^{(1)} \quad (8.13)$$

については

$$V_{r-1}^{(1)} = e^r V_r^{(1)}, \quad I_{r-1}^{(1)} = e^r I_r^{(1)} \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (8.14)$$

が成り立つから、結局 $(V_n^{(1)}, I_n^{(1)})$ は

$$V_n^{(1)} = e^{-nr} V_0^{(1)}, \quad I_n^{(1)} = e^{-nr} I_0^{(1)} \quad (8.15)$$

によって与えられる。同様に、もう一つの固有解は

$$V_n^{(2)} = e^{n\tau} V_0^{(2)}, \quad I_n^{(2)} = e^{n\tau} I_0^{(2)} \quad (8.16)$$

によってきまる。そうして、一般の解は

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= u_1 V_0^{(1)} + u_2 V_0^{(2)}, \\ I_0 &= u_1 I_0^{(1)} + u_2 I_0^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

としたときに

$$\left. \begin{aligned} V_n &= u_1 V_n^{(1)} + u_2 V_n^{(2)}, \\ I_n &= u_1 I_n^{(1)} + u_2 I_n^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

によって与えられる。

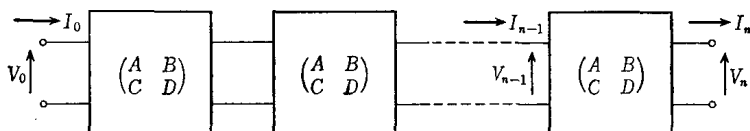


図 8.2 同一 4 端子の縦続(反復)

ここで (8.16) ~ (8.18) の意味を言葉で説明すれば、任意に与えた (V_0, I_0) は二つの解 $(V_0^{(1)}, I_0^{(1)})$, $(V_0^{(2)}, I_0^{(2)})$ の和に分解され、そのおのおの、それぞれ、電圧、電流共、4 端子の鎖を伝わる時、そのままの比 $V_r : I_r$ を保ちながら $1 : e^{-\tau} : e^{-2\tau} : e^{-3\tau} : \dots$, または $1 : e^{\tau} : e^{2\tau} : e^{3\tau} : \dots$ というように等比数列的に変わって行くのである。

まず、 $V_r^{(1)}, I_r^{(1)}$ の方について考えると、 $\operatorname{Re} \tau > 0$ であるから、電圧は右へ行くほど、小さくなって行く。これは、左の端子に与えた $V_0^{(1)}$ という電圧が右へ行くに従って減衰して行くことに相当している。一方 $V_r^{(2)}, I_r^{(2)}$ を考えると、これは右へ行くにしたがって、大きくなる。これを、左の端子に加えた電圧が右へ伝わる毎に大きくなって行くと考えすることはできない。4 端子の中にはエネルギー源はないのだから、影響が増大して伝わるということはいふを得ないからである。だから、正しい解釈は、逆に、右の方から加えた電圧が左へ向かって減衰して伝わるということである。

実際には、左端で V_0 を与えれば、 $V_r^{(1)}, V_r^{(2)}$ の両方が重ね合わされたものが生じる。そのとき、その比 $V_r^{(1)} / V_r^{(2)}$ は左端ではきまらない (V_0 と I_0 を同時に指定することはできない) ので、その比をきめるのは右端につないだ負荷

Z_n である。これから

$$V_n = Z_n I_n$$

によって $V_n^{(1)}/V_n^{(2)}$ が定まるのである。そうしてそのとききまる $V_r^{(2)}$ の方は、右端で生じた反射波と解釈される。この状況は分布定数線路を波が伝わる場合と同様に考えられる(本講座7講『線形分布定数系論』第1章参照)。

$V_r^{(1)} (r=0, 1, 2, \dots, n)$ については

$$V_r^{(1)}/I_r^{(1)} = Z_{11} \quad (8.19)$$

は r によらず(8.9)できまる一定の値をもつ。即ち

$$Z_{11} = \frac{B}{e^r - A}. \quad (8.20)$$

そうして、最右端につける負荷インピーダンス(これを**終端インピーダンス**(terminating impedance)と呼ぶ)をこの Z_{11} に等しくすると、 V_r は $V_r^{(1)}$ の成分だけになり、つまり、反射波がなくなる。そこで Z_{11} はある意味で、回路に整合したインピーダンスである。

そうして、右端に Z_{11} をつけたときは、左端から右を見たインピーダンス

$$Z = V_0/I_0$$

は、 n によらずいつも Z_{11} に等しい。

なお、 Z_{11} は(8.3)によると

$$Z_{11} = \frac{AZ_{11} + B}{CZ_{11} + D} \quad (8.21)$$

をみたし、したがって(8.21)を解いた根の一つとして得られるものである。即ち

$$Z_{11} = \frac{A - D \pm \sqrt{(A - D)^2 + 4BC}}{2C}. \quad (8.22)$$

Z_{11} は、このような反復回路の特性インピーダンスであるという意味で、もとの4端子の**反復インピーダンス**(iterative impedance)と呼ばれる。

同様に、 $V_r^{(2)}$ の方については、これは右端に、 V_n を加えたとき、それが左へ伝わってくることをあらわし、これに対しては

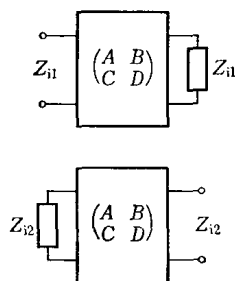


図 8.3 反復インピーダンス

$$V_r^{(2)}/I_r^{(2)} = -Z_{12} \quad (8.23)$$

が r にかかわらず一定である。ここでマイナスがつくのは、左向きに考えるときは、電流の向きが逆になるからである。ここで Z_{12} は (8.9') により

$$Z_{12} = \frac{B}{A - e^{-\tau}} \quad (8.24)$$

で与えられる。この Z_{12} は、これを左端につないだとき、左端での反射がなくなるようなインピーダンスであり、それはまた (8.22) のもう一つの根の符号を変えたものである。即ち、 Z_{12} は

$$Z_{12} = \frac{AZ_{12} - B}{-CZ_{12} + D} \quad (8.25)$$

の解である。あるいは、書きかえて

$$Z_{12} = \frac{DZ_{12} + B}{CZ_{12} + A} \quad (8.26)$$

と書くこともできる。

(8.25) または (8.26) を解いて

$$Z_{12} = \frac{D - A \pm \sqrt{(A - D)^2 + 4BC}}{2C}. \quad (8.27)$$

Z_{12} もまた 4 端子の反復インピーダンスと呼ばれる。

ここで、最初の問題に戻って、 n 個の 4 端子を縦続したものの 4 端子定数を求める。まず (8.18) を書きかえて

$$\left. \begin{aligned} V_n &= u_1 Z_{11} I_n^{(1)} - u_2 Z_{12} I_n^{(2)}, \\ I_n &= u_1 I_n^{(1)} + u_2 I_n^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

これを u_1, u_2 について解いて

$$\left. \begin{aligned} u_1 I_n^{(1)} &= \frac{V_n + Z_{12} I_n}{Z_{11} + Z_{12}}, \\ u_2 I_n^{(2)} &= \frac{-V_n + Z_{11} I_n}{Z_{11} + Z_{12}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.29)$$

また

$$\left. \begin{aligned} I_0^{(1)} &= e^{nr} I_n^{(1)}, \\ I_0^{(2)} &= e^{-nr} I_n^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

で(8.29), (8.30)を(8.17)に入れると, 結局

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_{i1} + Z_{i2}} \begin{pmatrix} e^{n\gamma} Z_{i1} + e^{-n\gamma} Z_{i2} & (e^{n\gamma} - e^{-n\gamma}) Z_{i1} Z_{i2} \\ e^{n\gamma} - e^{-n\gamma} & e^{n\gamma} Z_{i2} + e^{-n\gamma} Z_{i1} \end{pmatrix} \quad (8.31)$$

が得られる.

ここで $n=1$ とすれば

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_{i1} + Z_{i2}} \begin{pmatrix} e^{\gamma} Z_{i1} + e^{-\gamma} Z_{i2} & (e^{\gamma} - e^{-\gamma}) Z_{i1} Z_{i2} \\ e^{\gamma} - e^{-\gamma} & e^{\gamma} Z_{i2} + e^{-\gamma} Z_{i1} \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

となる. これは, もとの4端子の定数を, 三つの定数 γ, Z_{i1}, Z_{i2} によってあらわしたものである. このように, γ, Z_{i1}, Z_{i2} はそれだけで一つの4端子を指定することができるので, この三つの組を4端子の**反復パラメーター**(iterative parameters)と呼ぶ. これを使えば, n 個同じものを縦続したものの反復パラメーターは, $(n\gamma, Z_{i1}, Z_{i2})$ で, つまり γ だけが n 倍になり, Z_{i1}, Z_{i2} は元のものと同じである.

$n \rightarrow \infty$ とすると, $|e^{\gamma}| > 1$ であることから

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \frac{e^{n\gamma}}{Z_{i1} + Z_{i2}} \begin{pmatrix} Z_{i1} & Z_{i1} Z_{i2} \\ 1 & Z_{i2} \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

で,

$$Z = \frac{A_n}{C_n} = \frac{B_n}{D_n} = Z_{i1}. \quad (8.34)$$

つまり, 左側から見た入力インピーダンスは Z_{i1} に等しくなる. つまり Z_{i1} は同じ4端子を無限に右へつないだものの入力インピーダンスという意味がある. 同様に, Z_{i2} は左へ無限に縦続したとき, 右から見た入力インピーダンスである. なお, このことは損失がない回路で $\text{Re } \gamma = 0$ の場合には成り立たないことに注意する必要がある.

右端に負荷 Z_n をつないだときの, 電流反射係数 $u_2 I_n^{(2)} / u_1 I_n^{(1)}$ は

$$-\rho_{11} = \frac{u_2 I_n^{(2)}}{u_1 I_n^{(1)}} = \frac{Z_{i1} - Z_n}{Z_{i2} + Z_n}, \quad (8.35)$$

電圧反射係数は

$$\rho_{v1} = \frac{u_2 V_n^{(2)}}{u_1 V_n^{(1)}} = \frac{\frac{Z_n}{Z_{i1}} - 1}{\frac{Z_n}{Z_{i2}} + 1}. \quad (8.36)$$

同じく、左側に負荷 Z_0 をつないだときの電流反射係数は

$$-\rho_{i2} = \frac{u_1 I_0^{(1)}}{u_2 I_0^{(2)}} = \frac{Z_{i2} - Z_0}{Z_{i1} + Z_0}, \quad (8.35')$$

電圧反射係数は

$$\rho_{v2} = \frac{u_1 V_0^{(1)}}{u_2 V_0^{(2)}} = \frac{\frac{Z_0}{Z_{i2}} - 1}{\frac{Z_0}{Z_{i1}} + 1} \quad (8.36')$$

となる。このように、右側と左側で整合インピーダンスが異なるのは、一様な分布定数線路にはなかった性質で、4端子が非対称である場合の特徴である。しかし、 γ はその場合でも両方向同一である。なお、電圧反射係数と電流反射係数が異なるのも新しい事情である。しかし、対称4端子の場合には $Z_{i1} = Z_{i2}$ となり、以上のような面倒はおこらない。

対称な場合

4端子が対称、つまり $A = D$ であるときは、式は簡単になり

$$Z_{i1} = Z_{i2} = Z_i = \pm \frac{\sqrt{A^2 - 1}}{C} = \sqrt{\frac{B}{C}}. \quad (8.37)$$

$$\left. \begin{aligned} \cosh \gamma &= A, \\ \sinh \gamma &= \sqrt{BC}. \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

逆に

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \gamma & Z_i \sinh \gamma \\ (\sinh \gamma)/Z_i & \cosh \gamma \end{pmatrix}. \quad (8.39)$$

この場合には、特性インピーダンスが波の進む向きによって異なるということがないから、分布定数線路と完全な類推が成り立つ。即ち、一つの対称4端子は、(8.37)で与えられる Z_i を特性インピーダンスとしてもち、伝播定数が $e^{-\gamma}$ であるような1個の分布定数4端子と(単一周波数について)等価であ

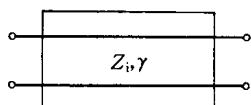


図 8.4 対称4端子は一つの伝送線路と等価になる

る。この等価性を考えることは、反復回路を考える上に便利である。

この場合には(8.31)は簡単になって

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cosh n\gamma & Z_0 \sinh n\gamma \\ (\sinh n\gamma)/Z_0 & \cosh n\gamma \end{pmatrix} \quad (8.40)$$

となる。

例 RC 梯子形回路

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RCs+1 & R \\ C_s & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.41)$$

$$e^{\gamma} = 1 + \frac{RCs}{2} + \sqrt{RCs + \frac{1}{4}R^2C_s^2s^2}, \quad (8.42)$$

$$Z_{11} = \frac{R}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{RCs}} + 1 \right), \quad (8.43)$$

$$Z_{12} = \frac{R}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{RCs}} - 1 \right). \quad (8.43')$$

ここで Z_{11} と Z_{12} とは R だけ差がある。これは直列要素 R が左側についていることから来る。即ち、反復回路(図 8.5)で、切り目を抵抗の midpoint までずらしてみると、4 端子は対称になり(図 8.6),

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{RCs}{2} + 1 & \frac{R^2C_s}{4} + R \\ C_s & \frac{RCs}{2} + 1 \end{pmatrix}, \quad (8.44)$$

$$e^{\gamma} = 1 + \frac{RCs}{2} + \sqrt{RCs + \frac{1}{4}R^2C_s^2s^2}, \quad (8.45)$$

$$Z_1 = \frac{R}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{RCs}} \quad (8.46)$$

で、 e^{γ} は変わらず、 Z_1 はちょうど前の Z_{11} と Z_{12} の平均になっている。このように、反復回路を考える場合、それをどこで切って4端子と考えるかによって Z_{11} , Z_{12} は異なってくるが γ は切る場所にはよらない。また、この例がそうで

あるように、切る場所を適当に選ぶことによって、4端子を対称にすることが出来る場合が多い。そのようなとき、対称にすることによって、式が簡単になる。

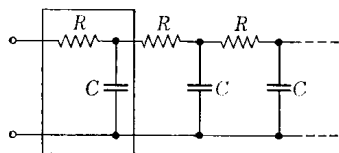


図 8.5 RC 梯子形回路

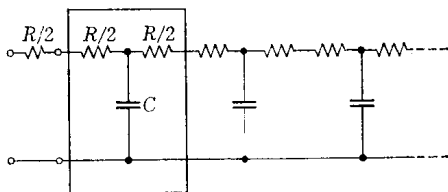


図 8.6 RC 梯子形回路の対称な切り方

(8.45) で $|RCs| \ll 1$ のときは

$$e^{\gamma} \approx 1 + \sqrt{RCs}, \quad (8.47)$$

即ち

$$\gamma \approx \sqrt{RCs} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{RC\omega}. \quad (8.48)$$

この場合は減衰が少なく、信号は遠くの方まで伝わる。そのときは、この梯子形回路は極限として連続的な分布定数系、つまり1次元の熱伝導方程式(本講座『線形分布定数系』1.8節)になる。(8.48)はその(1.156)にはかならない。この場合の入力インピーダンスは

$$Z_1 \approx \sqrt{\frac{R}{Cs}} = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R}{C\omega}}. \quad (8.49)$$

この例でもわかるように、有限の素子から成る回路の定数はいつも s の有理式であらわれたのに対し、無限になると、そうでなくなる。この場合は平方根があらわれてきているが、平方根があらわれるのは一般に同じ形のものが反復された系の特徴である。平方根があると、関数は1価ではなくなるが、範囲を右半平面 $\text{Re } s > 0$ に限れば必ず一つの枝が切り離されて、1価になる。その枝は $\text{Re } Z > 0$ をみたすような枝である。このように無限の素子を含む回路の場合でも、右半平面には特異点は存在しない。

8.2 映像パラメーター

対称な4端子は、多くの場合、その中央から二つに割って、互いに鏡像の関

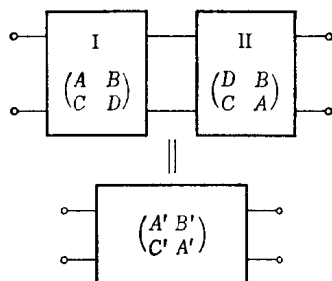


図 8.7 対称 4 端子の 2 等分

係にある二つの非対称 4 端子の縦続されたものと見做すことができる。その左の方の片割れの伝送行列を $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ とすると、二つを縦続したものの伝送行列は

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD+BC & 2AB \\ 2CD & AD+BC \end{pmatrix} \quad (8.50)$$

である。そこで、対称 4 端子の反復回路をこのように一つの 4 端子とその鏡像 4 端子とを交互につないだ鎖状回路と考えることができる(図 8.8)。そうして、これによって式を簡単化できる場合が多い。

まず、 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ではじまる、右へ無限に長い鎖状回路を考え、その入力インピーダンスを Z_{01} と書く。 Z_{01} は $\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & A' \end{pmatrix}$ で与えられる 4 端子の反復インピーダンスにほかならない。

次に同じ無限鎖状回路を一つ右のところで切って、そこから右を見たインピーダンスを Z_{02} としよう。これは、そこからはじめて、二つずつの 4 端子を組にして考えると、

$$\begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD+BC & 2BD \\ 2AC & AD+BC \end{pmatrix} \quad (8.50')$$

の反復インピーダンスであることがわかる。そうすると

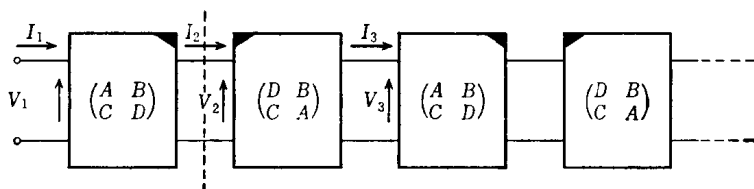


図 8.8