高等學校教學用書

近似計算法

Я. С. БЕЗИКОВИЧ 著
徐潤炎　陸智常譯

高等教育出版社

高等學校教學用書

近似計算法

Я. С. 別席考維奇著
徐潤炎 陸智常譯

高等教育出版社

本書係根據國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的別席考維奇（Я. С. Безикович）所著的“近似計算法”（Приближенные вычисления）1949 年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校教學參考書。

本書內容爲：誤差理論以及各種運算步驟的近似計算法；後者包括初等運算的近似算法與誤差估計，插入法，最小二乘法，以及高等數學中的一些數值計算法。

本書由大連工學院徐潤炎、陸智常合譯。

近 似 計 算 法

書號69（課65）

別 席 考 維 奇 著
徐 潤 炎 等 譯
高 等 教 育 出 版 社 出 版
北 京 琉 璃 廠 一 七 〇 號
（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）
新 華 書 店 總 經 售
京 華 印 書 局 印 刷
北 京 南 新 華 街 甲 三 七 號

開本850×1092—1/28 印張 15 1/14 字數 334,000
一九五四年八月北京第一版 印數 4,001—6,000
一九五五年一月北京第二次印刷 定價￥21,000

序

“近似計算法”一書的這個版本,其目的在教會以極省的時間與無損於準確度的計算方法來做數值計算工作。

從解各種問題的許多現存的方法中，我們指出在實用上最方便的方法。

本版中增補了第六章，在這章中敍述了級數運算的法則：級數的項的調動,級數的加、減、乘、除法以及冪級數的反運算。

爲了想使本書易爲廣大的讀者所接受，我們在敍述各種問題時力求限用極少的必備知識。

書中提供了說明計算方法與方式的例子。在章末出好了練習，要求並不過高,不過,是全面的。

“近似計算法”一書初次出版於 1925 年。它是作者與亞歷山大·亞歷山德羅維奇·弗里德曼合寫的，他是列寧格勒一些高等學校與科學機關的教授。

已出版的那本小書(132 頁)的增訂計劃早已共同商量過了。但是就在 1952 年 9 月 15 日 A. A. 弗里德曼去世。本書的增訂計劃只好由我獨力來完成。

Я. С. 別席考維奇教授

目　錄

近似計算法

第一章　誤差理論的基本概念

1. 近似計算　人的實際生活是與數分不開的；對那些表徵出種種自然現象的量進行度量的結果是數；爲了使自然力量爲人類服務，便有一切技術設計與計劃，計算是作爲它們的基礎的，而計算的結果也是數。在自然界中所遇到的量的每一種度量，以及在工廠現場中作技術計算得出的每一種結果，按其本質來說，都不可能是準確的。度量給出了以各種一定的準確度來表示量的數❶。例如，我們量長度準確到毫米或到米，量溫度準確到0.1°，量速度準確到1厘米/秒。同樣，在任何工程建築的實施工作中，對於包含在該工程中各種零件的製造方面，我們總是限定好一定的準確度的；例如，在車床上車圓柱準確到0.01毫米，在鉋床上鉋平面準確到0.05毫米；換句話說，鉋好所處理的表面，使它與某平面的差別處處不超過0.05毫米。

這樣，在我們的一切活動中，都要處理那些不是準確的、而是在已知誤差之下近似地度量着所給量的數。

度量各種量時所得到的近似數值，是往後作爲技術設計的根據的，這種技術設計結果所得的近似數值，又要作爲各種工程的實施工作的基礎。常識告訴我們，在用近似數值作計算時，我們在結果中也將得到近似數值，而那時便十分自然地產生了合理地省力的要求，要求在保證能達到所給近似程度的條件下、簡化對於近似數值的算術計算工作。

怎樣進行用近似數值的計算，以及怎樣確定在計算結果中所產生

---

❶ 以後我們將給出"準確到……"這句話的定義；不過，它的意義是大家都懂得的。

的誤差，這些都是近似計算理論中所要講的事。

驟看起來，好像覺得，實踐中總是能產生一些方法，使工程師或其他實際工作者用來進行既不失準確性而又保持合理地省力的計算工作；因此，近似計算理論是完全多餘的。其實，實踐常很容易引導人們走向守舊，使人墨守成規，使得在完全多餘的準確度之下去做計算工作，並且在這種計算工作上浪費時間和人民的財富。有名的造船學專家 A. H. 克斐洛夫院士在他的"造船學"教程中曾指出：過去工廠向莫斯科建築委員會提出的計劃中到 $\frac{9}{10}$，而有時候到 $\frac{44}{45}$ 的計算工作，白白化費在定出並計算過多的數字位數上。我們知道以前一個氣象台的實際工作中，對於各種高度的風的觀測所作的整理工作，至少要化到 2 小時；但同樣的工作，後來可減到用十分鐘的時間，對於其準確度却並沒有任何損害。另一方面，如果出於相反的願望，首先想在計算上，往後又想在作爲計算的根據的度量工作中，力圖省事，而把工作做得不够準確，那將是不可補救的錯誤。近似計算理論的目的便是要避免上述的兩種極端，並且對於在所給準確度下的計算，確立其一般原則。

在近似計算理論中，最要緊的是定出所給數的誤差的問題，以及關於在用近似數值的一些運算的結果中所得的數值的誤差求法問題。本教程的第一、二兩章便講到這種問題；其他各章用來敍述用近似數值的各種運算方法。

2. 絕對誤差與最大絕對誤差 我們首先要弄清楚，根據數的哪一種特徵數值，可以用來定作所給的數的誤差。假如，在爲某種工程開列預算時，我們得到數字 12147 盧布 37 戈比＝12147.37 盧布。知道了關於所開費用的預算是或多或少地不準確的，我們便在總數中略去戈比數，而確定它的近似值等於 12147 盧布；我們所得的誤差便是 37 戈比，或 0.37 盧布；這個數叫做我們所取的近似值 12147 盧布的絕對誤差。

我們再設想，用尺量任何長度時，能淸楚地保證量到0.5厘米，但不能保證有更高的準確度；假設量所給的長度的結果中，得到數值 344 厘

米；如果我們能保證量到不比 0.5 厘米更準確些，則我們所量的長度便是介乎 343.5 厘米與 344.5 厘米之間的；這樣，所量的長度的準確數值與其近似數值 344 厘米間的差別的絕對值，不超過 0.5 厘米。這個差稱爲所給數的最大絕對誤差。

我們來確立絕對誤差與最大絕對誤差概念的一般說法。

如果某個量 A 有數 a 爲其近似值，則數 A 與 a 的差的絕對值稱爲數 a 的絕對誤差。

用 Δ 來記數 a 的絕對誤差，便有：

$$\Delta=|A-a|, \tag{2.1}$$

其中記號 $|A-a|$ 代表 $A-a$ 的絕對值。

從等式(2.1)可知

$$A=a\pm\Delta. \tag{2.2}$$

必須注意，對於大多數的量來說，數的絕對誤差是某個完全假想的數。在許多情形中，這個絕對誤差事實上總是不能求出來的，在有些情形中，雖然能求出絕對誤差，但還是不能準確地、而只是近似地算出它來。

我們用下列所講的例子來說明上面的注意。量某一長度保證量到 0.5 厘米時，我們不能算出絕對誤差，因爲不知道所量的長度究竟等於多少。

因此，關於所量長度確實等於多少這一個問題，是沒有意義的，因爲我們所量的長度的一切數據都必然是用近似量法得到的。這樣，數 A 是未知的，所以用公式 (2.1) 不能確定 Δ 的大小。關於度量的準確性，數據只使我們斷定絕對誤差是不超過 0.5 厘米的。

現在來確定表示數 π（圓周長與直徑長度的比）的數 $a=3.14$ 的絕對誤差。這裏，公式(2.1)給出了：

$$\Delta=|\pi-3.14|=\pi-3.14;$$

因爲在任何準確度下，數 π 都是我們所知道的，所以我們也能算出具有

任意準確度的絕對誤差；例如，可以說，這個誤差由近似數值

$$\Delta = 0.00159265$$

來確定。

只在少數最不重要的情形下，我們可以準確地算出絕對誤差來。譬如，設有一筆款子，計 10541 盧布 23 戈比，而要略去戈比數使得到整數；這樣所得的數值的絕對誤差便等於：

$\Delta = 10541$ 盧布 23 戈比 $- 10541$ 盧布 $= 23$戈比 $= 0.23$盧布。

上面所講的事告訴我們，絕對誤差概念是不切實用的概念。通常，在度量時，我們可以保證量到不忽略某種程度的小數量(例如，量長度時到 0.5 公分)；換句話說，可以確定所允許的絕對誤差不超過某種數值。這個數值，我們便稱它爲最大絕對誤差。

所謂最大絕對誤差是一個儘可能地小的數，關於它，可以使得所看的近似數值的絕對誤差不會超過它。

設量 A 是用具有絕對誤差 Δ 的數 a 來度量的，這時，如果 α 是數 a 的最大絕對誤差，按最大絕對誤差的定義，就有

$$\Delta \leqslant \alpha. \tag{2.3}$$

上面所看的例子中，0.5 厘米是最大絕對誤差。如果在稱重量時能保證稱到 0.5 克，則 0.5 克便是誤差的最大限度；同樣，量角度準確到 $5''$ 時，我們便有最大絕對誤差 $5''$；計算時間準確到 0.1 秒時，便得出最大絕對誤差 0.1 秒。

還要注意，最大絕對誤差差不多總是名數：它是用與量的度量時相同的單位來表示的。其次注意，有時候最大絕對誤差是預先給好了的，並且取決於我們所用的儀器的質量。反之，在另一些情形下，考慮好參加計算公式的一些數的所給定的最大誤差之後，便可以算出要求的最大絕對誤差。

結合公式(2.1)與(2.2)，不難得到最大絕對誤差的一些最簡性質。

從公式(2.1)與(2.2)便有：

$$\Delta=|A-a|\leqslant\alpha,$$

或者按絕對值的定義:

$$-\alpha\leqslant A-a\leqslant\alpha,$$

從此:

$$a-\alpha\leqslant A\leqslant a+\alpha. \tag{2.4}$$

如果我們知道數 A 的近似值 a_1 不超過 A，則說，a_1 是數 A 的弱近似值；反之，如果數 A 的近似數值 a_2 不小於 A，則說 a_2 是數 A 的强近似值。例如，數 3.14 是數 π 的弱近似值，而數 3.15 是同一個 π 的强近似值。

從弱近似值與强近似值的定義上，不難得到下列不等式:

$$a_1\leqslant A\leqslant a_2.. \tag{2.5}$$

知道了作爲數 A 的近似值的數 a，且知道了最大誤差 α 時，十分顯然，我們可以定出數 A 的弱近似值與强近似值。事實上，比較不等式(2.4)與(2.5)，我們便有:

$$a_1=a-\alpha\ (\text{弱近似值}),$$

$$a_2=a+\alpha\ (\text{强近似值})。$$

同樣，有了 A 的强、弱兩個近似值，就不難求出數 A 的任何近似值 a 的最大絕對誤差。特別，取 a 爲强、弱近似值的和的一半，且以 a 作爲數 A 的近似值:

$$a=\frac{a_1+a_2}{2}.$$

利用 a 的這個表示式，將不等式(2.5)改寫成下列形式:

$$a-\frac{a_2-a_1}{2}\leqslant A\leqslant a+\frac{a_2-a_1}{2},$$

從此

$$-\frac{a_2-a_1}{2}\leqslant A-a\leqslant\frac{a_2-a_1}{2},$$

因此

$$|A-a|\leqslant\frac{a_2-a_1}{2};$$

這樣，$\alpha=\frac{a_2-a_1}{2}$ 是數

$$a=\frac{a_2+a_1}{2}$$

的最大絕對誤差。

例 1. 已知 3.14 與 3.15 是 π 的弱近似值與强近似值，我們可以確定，數 $a=\frac{3.14+3.15}{2}=3.145$ 是數 π 的近似值，其最大絕對誤差 $\alpha=\frac{3.15-3.14}{2}=0.005$。

必須指出，實際上只在很少有的情形下，才給出兩個數，來作爲所給要度量的量的强、弱兩近似值；通常我們總是要確定近似值與最大絕對誤差的。

3. 相對誤差與最大相對誤差　不難見到，最大絕對誤差不太能表達我們的度量工作的質量。事實上，在量街道寬度或建築物正面長度時，最大誤差 1 米便說明了丈量工作是非常粗心的；可是，同樣的誤差在量鐵路線長度時却說明工具的精密性能與丈量工作組織得好。同樣，稱載貨車重量時準確到 10 公斤便是十分準確的了；可是在實驗室中却必須以最大謹愼去對待每一個毫克和它的分量。因此，最大絕對誤差並不能表明度量工作的質量。

還有一種情況，使絕對誤差對於估計準確度方面成爲不十分恰當的量。因爲絕對誤差是名數，所以當被我們用來度量所處理的量的單位有所更改時，絕對誤差的數值是會改變的。

根據所有這些緣故，有必要採用別的量來表徵我們的近似值的準確度；這種量便是相對誤差。

數 a 是數量 A 的近似值，所謂數 a 的相對誤差 ∇ 便是數 a 的絕對誤差與它自己的比：

$$\nabla=\frac{\Delta}{a}, \tag{3.1}$$

而且以後將數量 a 看作是正的。

如果在量 20 米寬的街面時，絕對誤差是 1 米，則相對誤差便等於 $\frac{1}{20}=0.05$；而在量 500 公里長度時，有絕對誤差 1 公里的話，相對誤差便等於 $\frac{1}{500}=0.002$。

這兩個數值說明了：第二種度量工作中雖然有大得多的絕對誤差，在質量上是遠高於第一種丈量工作的(超過 20 倍)。

相對誤差總是抽象的數，並且不論用怎樣的單位來度量我們所考慮的量時，在同一準確度的度量之下，我們總會有同樣的相對誤差的。在實用上相對誤差通常或者用百分數($\%$，$1\%=0.01$)來表示，在更準確的度量下，或者用千分數($‰$，$1‰=0.001$)來表示；只在極少有的實際情形下，相對誤差才是簡單地用十進小數來表示的，並且更少用到簡單分數。

在上節中我們所講到過的、關於決定絕對誤差的一切困難，全都可以逐句重複到相對誤差上面來。因此在實用上不看相對誤差，而看所謂最大相對誤差：它是儘可能小的量 δ，對於它，可以保證使得相對誤差不會超過它：

$$\frac{\Delta}{a}=\nabla\leqslant\delta. \tag{3.2}$$

從最大絕對誤差的定義便知，用它按公式

$$\delta=\frac{\alpha}{a}, \tag{3.3}$$

總可以求出最大相對誤差來；事實上，因為 $\Delta\leqslant\alpha$，所以 $\frac{\Delta}{a}\leqslant\frac{\alpha}{a}$，也就是 $\nabla\leqslant\delta$，因此 δ 便是所找的最大相對誤差。

我們以後很少用到絕對誤差與相對誤差本身的概念，因此，為了講得簡略起見，有時候便略去了"最大"兩字，簡稱"相對誤差"來代替"最大相對誤差"，並不致於發生誤解。

顯然，最大相對誤差可以用百分數或千分數來表示。

我們來指出一些顯然的公式，用來說明絕對誤差與相對誤差的性

質。

從公式(3.1)與(3.3)便有:

$$\Delta = a\nabla;\quad \alpha = a\delta. \tag{3.4}$$

這兩個等式把絕對誤差用相對誤差來表示。用不等式(2.4)與公式(3.4)的第二式,我們求出:

$$a(1-\delta) \leqslant A \leqslant a(1+\delta), \tag{3.5}$$

而從這個不等式可以看到:在 a 上乘以介乎 $1-\delta$ 與 $1+\delta$ 之間的數,便得到 A,這就是說,在 a 上乘以數值 $1+\theta\delta$ 便得到 A,其中 θ 是在 -1 與 $+1$ 間的分數;這樣便有:

$$A = a(1+\theta\delta);\quad (-1 \leqslant \theta \leqslant +1). \tag{3.6}$$

在某些情形下,最大相對誤差的講法,規定爲最大絕對誤差與準確數值 A 的比,而不是與數 a 的比。我們來證明:不論用剛纔說的定義,或是用從公式(3.3)所表示的最大相對誤差定義,在實用上都是一樣的。事實上,如記比值 $\frac{\alpha}{A}$ 爲 δ',便有:

$$\delta - \delta' = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{A} = \frac{\alpha}{a}\left(1 - \frac{a}{A}\right),$$

從此,按公式(3.6)求出:

$$\delta - \delta' = \delta\left(1 - \frac{a}{a(1+\theta\delta)}\right) = \frac{\theta\delta^2}{1+\theta\delta};$$

換句話說,差數 $\delta-\delta'$ 是與 δ 的平方同級的,而因 δ 通常是非常小的量,大都用某一百分數來表示,所以它的平方可以被忽略,而差數 $\delta-\delta'$ 便會是極微小的。

可是,必須指出,取絕對誤差與所度量的量的準確數值的比作爲相對誤差的定義,是不方便的,因爲這個準確數值是未知的。

例 2. 在稱某一重物時,我們得到數值 5.31 公斤,其中已知最大絕對誤差等於 2 毫克,要求最大相對誤差。