

高等學校教學用書

近似計算法

Я. С. БЕЗИКОВИЧ 著

徐潤炎 陸智常譯

高等教育出版社

高等學校教學用書



近 似 計 算 法

Я. С. 別席考維奇 著
徐潤炎 陸智常 譯

高等教育出版社

本書係根據國立技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的別席考維奇 (Н. С. Брезикович) 所著的“近似計算法” (Приближенные вычисления) 1949 年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為高等工業學校教學參考書。

本書內容為：誤差理論以及各種運算步驟的近似計算法；後者包括初等運算的近似算法與誤差估計，插入法，最小二乘法，以及高等數學中的一些數值計算法。

本書由大連工學院徐潤炎、陸智常合譯。

近 似 計 算 法

書號 69 (類 60)

別 席 考 維 奇 著

徐 潤 炎 等 譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北 京 瑞 瑞 廠 一 七 〇 號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

新 華 書 店 統 經 售

京 華 印 書 局 印 刷

北 京 南 新 華 街 甲 三 七 號

開本 850×1092—1/28 印張 15 1/14 字數 334,000

一九五四年八月北京第一版 印數 4,001—6,000

一九五五年一月北京第二次印刷 定價 21.000

序

“近似計算法”一書的這個版本，其目的在教會以極省的時間與無損於準確度的計算方法來做數值計算工作。

從解各種問題的許多現存的方法中，我們指出在實用上最方便的方法。

本版中增補了第六章，在這章中敘述了級數運算法則：級數的項的調動，級數的加、減、乘、除法以及幕級數的反運算。

爲了想使本書易爲廣大的讀者所接受，我們在敘述各種問題時力求限用極少的必備知識。

書中提供了說明計算方法與方式的例子。在章末出好了練習，要求並不過高，不過，是全面的。

“近似計算法”一書初次出版於1925年。它是作者與亞歷山大·亞歷山德羅維奇·弗里德曼合寫的，他是列寧格勒一些高等學校與科學機關的教授。

已出版的那本小書(132頁)的增訂計劃早已共同商量過了。但是就在1952年9月15日A. A. 弗里德曼去世。本書的增訂計劃只好由我獨力來完成。

Я. С. 別席考維奇教授

目 錄

第一章 誤差理論的基本概念	1
1. 近似計算	1
2. 絕對誤差與最大絕對誤差	2
3. 相對誤差與最大相對誤差	6
4. 有效數位的個數	9
5. 誤差的大小、計算時的基本問題	17
第二章 最簡算術運算的誤差	22
6. 和的最大絕對誤差與最大相對誤差	22
7. 減法	24
8. 乘積的最大相對誤差與商的最大相對誤差	26
9. 乘方的誤差與方根的誤差	31
10. 函數的最大絕對誤差與最大相對誤差	38
11. 對數計算的誤差	42
12. 算術平均數	47
13. 把誤差確定得更精確	53
14. 觀察時的權的概念	56
15. 帶權平均數的誤差	59
第三章 最簡算術運算的做法	62
16. 輔助工具	62
17. 加法、加數機	62
18. 省略乘法	64
19. 省略乘法法則的證明	67
20. 省略除法	69
21. 表格	71
22. 四則計算機	72

第四章 對數尺	76
23. 構造原理、說明	76
24. 對數尺上的刻度線	79
25. 動尺反面的標尺	80
26. 乘法	82
27. 除法	86
28. 平方法與開平方根法	88
29. 立方法與開立方根法	90
30. 補充的線條	94
31. 各種對數尺	96
32. 方程的解法	97
第五章 插入法	104
33. 插入法的問題	104
34. 各階差分	105
35. 整多項式以及別的函數的差分	107
36. 各階差分用 $U_n, U_{n+h}, \dots$ 的表示式	110
37. 牛頓插入公式	112
38. 用差分的導數計算法	117
39. 比例部分	120
40. 均差	121
41. 對於不等間隔的牛頓公式	123
42. 按牛頓公式的計算法	124
43. 高斯公式	125
44. 司蒂爾林公式	127
45. 貝瑟爾公式	128
46. 拉格蘭日插入公式	129
47. 插入公式的誤差的確定	131
48. 按給定的函數值與其導數值的插入法	135
第六章 級數運算	141
49. 級數、收斂性、必要條件	141

50. 收斂性的充分條件	148
51. 級數的項的調動	155
52. 收斂性的改良	156
53. 級數的加法與減法	166
54. 級數的乘法與除法	168
55. 函數項級數	173
56. 幕級數	181
第七章 方程的近似解法	185
57. 根的隔出法	185
58. 比例部分法	189
59. 牛頓法	192
60. 區間的縮小	197
61. 計算格式	199
62. 誤差的估計	200
63. 重複法	203
64. 羅巴契夫斯基法、實根的情形	207
65. 簡化計算的可能性	211
66. 變換的限度	212
67. 複數根的情形	216
68. 總結	218
69. 重根	223
70. 彼此的模數相接近的根	224
71. 線性方程組的解法	226
72. 計算的簡化	227
73. 方程的變形	228
74. 高次方程組的解法	229
第八章 最小二乘法	234
75. 最小二乘法	234
76. 非線性相關的情形	239
77. 方程的結構法與解法	241

78. 按最小二乘法用多項式來表示函數	257
---------------------	-----

第九章 數值積分法、器械積分法與圖形積分法 261

79. 梯形公式	261
80. 中間矩形公式	264
81. 辛普生公式	266
82. 梯形公式的誤差式子	269
83. 辛普生公式的誤差式子	271
84. 牛頓—柯特公式	274
85. 契伯雪夫公式	278
86. 高斯與 A. A. 馬爾可夫公式	280
87. 積分的預先變換	285
88. 縱坐標個數的選擇	285
89. 用差分的積分法	286
90. 累次積分法	289
91. 積分曲線	291
92. 極式面積器	296
93. 面積器的使用法則	298
94. 極式面積器原理	299
95. 積分器	301

第十章 諧量解析與用指數多項式表示的近似式 309

96. 傅里葉級數	309
97. 諧量解析	314
98. 奇項諧量在基本諧量上的影響	318
99. 第三與第五諧量的混合相加	322
100. 偶項諧量	324
101. 用來確定係數的方程	325
102. 在縱坐標個數是四的倍數時的計算格式	332
103. 十二個縱坐標的情形	335
104. 傅里葉級數的和式係數與積分式係數之間的關係	341
105. 二十四個縱坐標的情形	344

106. 級數的幾種特別情形	350
107. 用指數函數表示的近似式	354
108. 例	360
第十一章 微分方程的數值積分法	369
109. 尤拉法	369
110. 逐次接近法	370
111. 龍蓋法	374
112. 差分法	381
113. 一階微分方程組	387
114. 高階方程	394
115. 對高階方程的差分法的補充	396
116. 表中數字位數的增多法	401
數學常數表	408
譯名對照表	409

近 似 計 算 法

第一章 誤差理論的基本概念

1. 近似計算 人的實際生活是與數分不開的；對那些表徵出種種自然現象的量進行度量的結果是數；爲了使自然力量爲人類服務，便有一切技術設計與計劃，計算是作爲它們的基礎的，而計算的結果也是數。在自然界中所遇到的量的每一種度量，以及在工廠現場中作技術計算得出的每一種結果，按其本質來說，都不可能是準確的。度量給出了以各種一定的準確度來表示量的數^①。例如，我們量長度準確到毫米或到米，量溫度準確到 0.1° ，量速度準確到 1 厘米/秒。同樣，在任何工程建築的實施工作中，對於包含在該工程中各種零件的製造方面，我們總是限定好一定的準確度的；例如，在車床上車圓柱準確到 0.01 毫米，在鉋床上鉋平面準確到 0.05 毫米；換句話說，鉋好所處理的表面，使它與某平面的差別處處不超過 0.05 毫米。

這樣，在我們的一切活動中，都要處理那些不是準確的、而是在已知誤差之下近似地度量着所給量的數。

度量各種量時所得到的近似數值，是往後作爲技術設計的根據的，這種技術設計結果所得的近似數值，又要作爲各種工程的實施工作的基礎。常識告訴我們，在用近似數值作計算時，我們在結果中也將得到近似數值，而那時便十分自然地產生了合理地省力的要求，要求在保證能達到所給近似程度的條件下、簡化對於近似數值的算術計算工作。

怎樣進行用近似數值的計算，以及怎樣確定在計算結果中所產生

① 以後我們將給出“準確到……”這句話的定義；不過，它的意義是大家都懂得的。

的誤差，這些都是近似計算理論中所要講的事。

驟看起來，好像覺得，實踐中總是能產生一些方法，使工程師或其他實際工作者用來進行既不失準確性而又保持合理地省力的計算工作；因此，近似計算理論是完全多餘的。其實，實踐常很容易引導人們走向守舊，使人墨守成規，使得在完全多餘的準確度之下去做計算工作，並且在這種計算工作上浪費時間和人民的財富。有名的造船學專家 A. H. 克婁洛夫院士在他的“造船學”教程中曾指出：過去工廠向莫斯科建築委員會提出的計劃中到 $\frac{1}{10}$ ，而有時候到 $\frac{1}{100}$ 的計算工作，白白化費在定出並計算過多的數字位數上。我們知道以前一個氣象台的實際工作中，對於各種高度的風的觀測所作的整理工作，至少要化到 2 小時；但同樣的工作，後來可減到用十分鐘的時間，對於其準確度却並沒有任何損害。另一方面，如果出於相反的願望，首先想在計算上，往後又想作為計算的根據的度量工作中，力圖省事，而把工作做得不夠準確，那將是不可補救的錯誤。近似計算理論的目的便是要避免上述的兩種極端，並且對於在所給準確度下的計算，確立其一般原則。

在近似計算理論中，最要緊的是定出所給數的誤差的問題，以及關於在用近似數值的一些運算的結果中所得的數值的誤差求法問題。本教程的第一、二兩章便講到這種問題；其他各章用來敘述用近似數值的各種運算方法。

2. 絕對誤差與最大絕對誤差 我們首先要弄清楚，根據數的哪一種特徵數值，可以用來定作所給的數的誤差。假如，在為某種工程開列預算時，我們得到數字 12147 盧布 37 戈比 = 12147.37 盧布。知道了關於所開費用的預算是或多或少地不準確的，我們便在總數中略去戈比數，而確定它的近似值等於 12147 盧布；我們所得的誤差便是 37 戈比，或 0.37 盧布；這個數叫做我們所取的近似值 12147 盧布的絕對誤差。

我們再設想，用尺量任何長度時，能清楚地保證量到 0.5 厘米，但不能保證有更高的準確度；假設量所給的長度的結果中，得到數值 344 厘

米；如果我們能保證量到不比 0.5 厘米更準確些，則我們所量的長度便是介乎 343.5 厘米與 344.5 厘米之間的；這樣，所量的長度的準確數值與其近似數值 344 厘米間的差別的絕對值，不超過 0.5 厘米。這個差稱為所給數的最大絕對誤差。

我們來確立絕對誤差與最大絕對誤差概念的一般說法。

如果某個量 A 有數 a 為其近似值，則數 A 與 a 的差的絕對值稱為數 a 的絕對誤差。

用 Δ 來記數 a 的絕對誤差，便有：

$$\Delta = |A - a|, \quad (2.1)$$

其中記號 $|A - a|$ 代表 $A - a$ 的絕對值。

從等式(2.1)可知

$$A = a \pm \Delta. \quad (2.2)$$

必須注意，對於大多數的量來說，數的絕對誤差是某個完全假想的數。在許多情形中，這個絕對誤差事實上總是不能求出來的，在有些情形中，雖然能求出絕對誤差，但還是不能準確地、而只是近似地算出它來。

我們用下列所講的例子來說明上面的注意。量某一長度保證量到 0.5 厘米時，我們不能算出絕對誤差，因為不知道所量的長度究竟等於多少。

因此，關於所量長度確實等於多少這一個問題，是沒有意義的，因為我們所量的長度的一切數據都必然是用近似量法得到的。這樣，數 A 是未知的，所以用公式(2.1)不能確定 Δ 的大小。關於度量的準確性，數據只使我們斷定絕對誤差是不超過 0.5 厘米的。

現在來確定表示數 π (圓周長與直徑長度的比) 的數 $a = 3.14$ 的絕對誤差。這裏，公式(2.1)給出了：

$$\Delta = |\pi - 3.14| = \pi - 3.14;$$

因為在任何準確度下，數 π 都是我們所知道的，所以我們也能算出具有

任意準確度的絕對誤差；例如，可以說，這個誤差由近似數值

$$\Delta = 0.00159265$$

來確定。

只在少數最不重要的情形下，我們可以準確地算出絕對誤差來。譬如，設有一筆款子，計 10541 盧布 23 戈比，而要略去戈比數使得到整數；這樣所得的數值的絕對誤差便等於：

$$\Delta = 10541 \text{ 盧布 } 23 \text{ 戈比} - 10541 \text{ 盧布} = 23 \text{ 戈比} = 0.23 \text{ 盧布}。$$

上面所講的事告訴我們，絕對誤差概念是不切實用的概念。通常，在度量時，我們可以保證量到不忽略某種程度的小數量（例如，量長度時到 0.5 公分）；換句話說，可以確定所允許的絕對誤差不超過某種數值。這個數值，我們便稱它為最大絕對誤差。

所謂最大絕對誤差是一個儘可能地小的數，關於它，可以使得所看的近似數值的絕對誤差不會超過它。

設量 A 是用具有絕對誤差 Δ 的數 α 來度量的，這時，如果 α 是數 a 的最大絕對誤差，按最大絕對誤差的定義，就有

$$\Delta \leq \alpha. \quad (2.3)$$

上面所看的例子中，0.5 厘米是最大絕對誤差。如果在稱重量時能保證稱到 0.5 克，則 0.5 克便是誤差的最大限度；同樣，量角度準確到 5'' 時，我們便有最大絕對誤差 5''；計算時間準確到 0.1 秒時，便得出最大絕對誤差 0.1 秒。

還要注意，最大絕對誤差差不多總是名數：它是用與量的度量時相同的單位來表示的。其次注意，有時候最大絕對誤差是預先給好了的，並且取決於我們所用的儀器的質量。反之，在另一些情形下，考慮好參加計算公式的一些數的所給定的最大誤差之後，便可以算出要求的最大絕對誤差。

結合公式(2.1)與(2.2)，不難得到最大絕對誤差的一些最簡性質。

從公式(2.1)與(2.2)便有：

$$\Delta = |A - a| \leq \alpha,$$

或者按絕對值的定義：

$$-\alpha \leq A - a \leq \alpha,$$

從此：

$$a - \alpha \leq A \leq a + \alpha. \quad (2.4)$$

如果我們知道數 A 的近似值 a_1 不超過 A ，則說， a_1 是數 A 的弱近似值；反之，如果數 A 的近似數值 a_2 不小於 A ，則說 a_2 是數 A 的強近似值。例如，數 3.14 是數 π 的弱近似值，而數 3.15 是同一個 π 的強近似值。

從弱近似值與強近似值的定義上，不難得到下列不等式：

$$a_1 \leq A \leq a_2. \quad (2.5)$$

知道了作為數 A 的近似值的數 a ，且知道了最大誤差 α 時，十分顯然，我們可以定出數 A 的弱近似值與強近似值。事實上，比較不等式(2.4)與(2.5)，我們便有：

$$a_1 = a - \alpha \quad (\text{弱近似值}),$$

$$a_2 = a + \alpha \quad (\text{強近似值}).$$

同樣，有了 A 的強、弱兩個近似值，就不難求出數 A 的任何近似值 a 的最大絕對誤差。特別，取 a 為強、弱近似值的和的一半，且以 a 作為數 A 的近似值：

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

利用 a 的這個表示式，將不等式(2.5)改寫成下列形式：

$$a - \frac{a_2 - a_1}{2} \leq A \leq a + \frac{a_2 - a_1}{2},$$

從此

$$-\frac{a_2 - a_1}{2} \leq A - a \leq \frac{a_2 - a_1}{2},$$

因此

$$|A - a| \leq \frac{a_2 - a_1}{2};$$

這樣， $\alpha = \frac{a_2 - a_1}{2}$ 是數

$$a = \frac{a_2 + a_1}{2}$$

的最大絕對誤差。

例 1. 已知 3.14 與 3.15 是 π 的弱近似值與強近似值，我們可以確定，數 $a = \frac{3.14 + 3.15}{2} = 3.145$ 是數 π 的近似值，其最大絕對誤差

$$\alpha = \frac{3.15 - 3.14}{2} = 0.005.$$

必須指出，實際上只在很少有的情形下，才給出兩個數，來作為所給要度量的量的強、弱兩近似值；通常我們總是要確定近似值與最大絕對誤差的。

3. 相對誤差與最大相對誤差 不難見到，最大絕對誤差不太能表達我們的度量工作的質量。事實上，在量街道寬度或建築物正面長度時，最大誤差 1 米便說明了丈量工作是非常粗心的；可是，同樣的誤差在量鐵路線長度時却說明工具的精密性能與丈量工作組織得好。同樣，稱載貨車重量時準確到 10 公斤便是十分準確的了；可是在實驗室中却必須以最大謹慎去對待每一個毫克和它的分量。因此，最大絕對誤差並不能表明度量工作的質量。

還有一種情況，使絕對誤差對於估計準確度方面成為不十分恰當的量。因為絕對誤差是名數，所以當被我們用來度量所處理的量的單位有所更改時，絕對誤差的數值是會改變的。

根據所有這些緣故，有必要採用別的量來表徵我們的近似值的準確度；這種量便是相對誤差。

數 a 是數量 A 的近似值，所謂數 a 的相對誤差 ∇ 便是數 a 的絕對誤差與它自己的比：

$$\nabla = \frac{\Delta}{a}, \quad (3.1)$$

而且以後將數量 a 看作是正的。

如果在量 20 米寬的街面時，絕對誤差是 1 米，則相對誤差便等於 $\frac{1}{20} = 0.05$ ；而在量 500 公里長度時，有絕對誤差 1 公里的話，相對誤差便等於 $\frac{1}{500} = 0.002$ 。

這兩個數值說明了：第二種度量工作中雖然有大得多的絕對誤差，在質量上是遠高於第一種丈量工作的（超過 20 倍）。

相對誤差總是抽象的數，並且不論用怎樣的單位來度量我們所考慮的量時，在同一準確度的度量之下，我們總會有同樣的相對誤差的。在實用上相對誤差通常或者用百分數（%， $1\% = 0.01$ ）來表示，在更準確的度量下，或者用千分數（‰， $1‰ = 0.001$ ）來表示；只在極少有的實際情形下，相對誤差才是簡單地用十進小數來表示的，並且更少用到簡單分數。

在上節中我們所講到過的、關於決定絕對誤差的一切困難，全都可以在逐句重複到相對誤差上面來。因此在實用上不看相對誤差，而看所謂最大相對誤差：它是儘可能小的量 δ ，對於它，可以保證使得相對誤差不會超過它：

$$\frac{\Delta}{a} = \nabla \leq \delta. \quad (3.2)$$

從最大絕對誤差的定義便知，用它按公式

$$\delta = \frac{\alpha}{a}, \quad (3.3)$$

總可以求出最大相對誤差來；事實上，因為 $\Delta \leq \alpha$ ，所以 $\frac{\Delta}{a} \leq \frac{\alpha}{a}$ ，也就是 $\nabla \leq \delta$ ，因此 δ 便是所找的最大相對誤差。

我們以後很少用到絕對誤差與相對誤差本身的概念，因此，為了講得簡略起見，有時候便略去了“最大”兩字，簡稱“相對誤差”來代替“最大相對誤差”，並不致於發生誤解。

顯然，最大相對誤差可以用百分數或千分數來表示。

我們來指出一些顯然的公式，用來說明絕對誤差與相對誤差的性

質。

從公式(3.1)與(3.3)便有：

$$\Delta = a\gamma; \alpha = a\delta. \quad (3.4)$$

這兩個等式把絕對誤差用相對誤差來表示。用不等式(2.4)與公式(3.4)的第二式，我們求出：

$$a(1-\delta) \leq A \leq a(1+\delta), \quad (3.5)$$

而從這個不等式可以看到：在 a 上乘以介乎 $1-\delta$ 與 $1+\delta$ 之間的數，便得到 A ，這就是說，在 a 上乘以數值 $1+\theta\delta$ 便得到 A ，其中 θ 是在 -1 與 $+1$ 間的分數；這樣便有：

$$A = a(1+\theta\delta); (-1 \leq \theta \leq +1). \quad (3.6)$$

在某些情形下，最大相對誤差的講法，規定為最大絕對誤差與準確數值 A 的比，而不是與數 a 的比。我們來證明：不論用剛纔說的定義，或是用從公式(3.3)所表示的最大相對誤差定義，在實用上都是一樣的。事實上，如記比值 $\frac{\alpha}{A}$ 為 δ' ，便有：

$$\delta - \delta' = \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha}{A} = \frac{\alpha}{a} \left(1 - \frac{a}{A}\right),$$

從此，按公式(3.6)求出：

$$\delta - \delta' = \delta \left(1 - \frac{a}{a(1+\theta\delta)}\right) = \frac{\theta\delta^2}{1+\theta\delta};$$

換句話說，差數 $\delta - \delta'$ 是與 δ 的平方同級的，而因 δ 通常是非常小的量，大都用某一百分數來表示，所以它的平方可以被忽略，而差數 $\delta - \delta'$ 便會是極微小的。

可是，必須指出，取絕對誤差與所度量的量的準確數值的比作為相對誤差的定義，是不方便的，因為這個準確數值是未知的。

例 2. 在稱某一重物時，我們得到數值 5.31 公斤，其中已知最大絕對誤差等於 2 毫克，要求最大相對誤差。