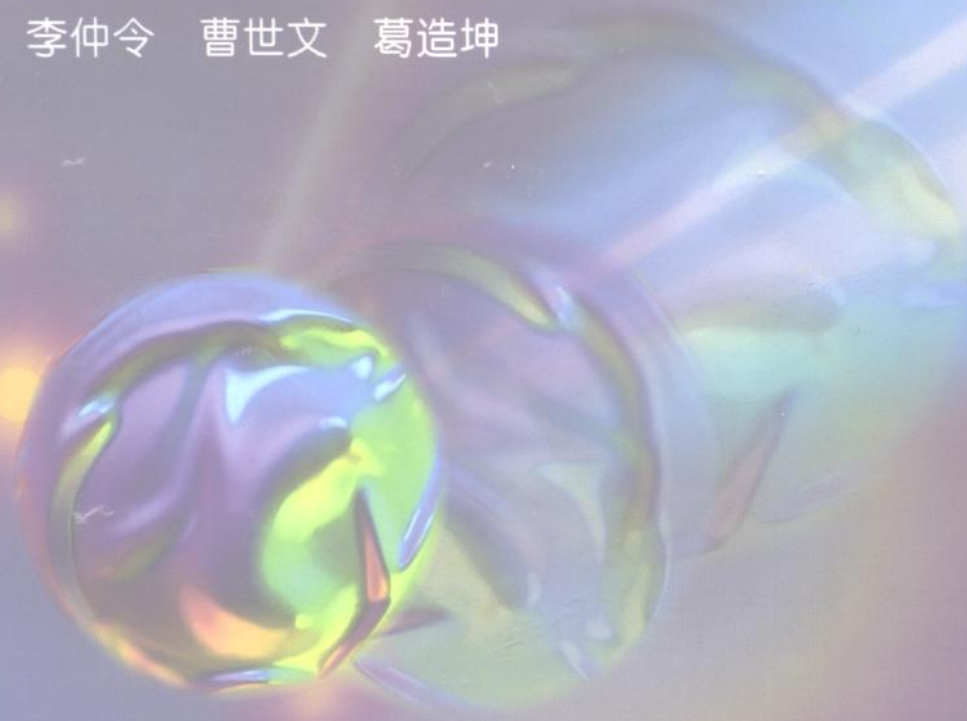


现代通信系统 仿真及应用

李仲令 曹世文 葛造坤



电子科技大学出版社

UESTC PUBLISHING HOUSE

11/1/14
L4c

415831

现代通信系统 仿真及应用

李仲令 曹世文 葛造坤



00415861

电子科技大学出版社

DX12/06
内 容 提 要

本书系统地介绍现代通信系统的仿真技术。全书共分五个部分。第一部分（一～三章）介绍仿真的概念、随机信号的分析、建模和产生；第二部分（四～六章）介绍线性时不变系统、线性时变系统和非线性系统的分析与建模；第三部分（七～八章）介绍通信链路和通信系统的建模；第四部分（九～十一章）介绍系统性能的仿真、仿真的方法和评估技术；第五部分（第十二章）介绍仿真的各种应用实例。

本书内容丰富，叙述深入浅出，既可作高等学校有关专业的本科生或研究生教材，也可作广大工程技术人员进行通信系统仿真的参考用书。

声 明

本书无四川省版权防盗标识，不得销售；版权所有，违者必究，举报有奖。
举报电话：(028) 6636481 6241146 3201496

现代通信系统仿真及应用

李仲令 曹世文 葛造坤

出 版：电子科技大学出版社 （成都建设北路二段四号 邮编：610054）
责任编辑：舒 标 黄 明 李 洋
发 行：新华书店
印 刷：四川建筑印刷厂
开 本：787×1092 1/16 印张 23.25 字数 565.8 千字
版 次：1998 年 3 月第一版
印 次：1998 年 3 月第一次
书 号：ISBN 7-81043-940-5/TP·102
印 数：1-3000 册
定 价：26.00 元

序 言

现代通信系统的发展使通信系统和通信设备日益复杂。为使通信系统在一定的条件下具有最佳性能，必须在设计时就能了解各种参数对性能的影响以及它们之间复杂的相互依存关系。通信系统仿真用尽可能接近真实的方法模拟通信系统性能的一些侧面。很明显，我们现在仿真的工具是数字电子计算机。早期的计算机仿真用模拟计算机。模拟计算机可以灵活地调整部件，使这些部件互相连接后非常接近要仿真的系统。这一方法的主要限制在于，任何待仿真的系统必须能以可用模块的组合表示。一般说来这些结构模块的性质更适于作控制系统而非通信的仿真。

数字计算机为解决上述问题提供一种根本不同的方法。数字计算机允许我们处理抽象的事情。用数学模型可以表示一物理系统的每个单元和这些单元的组合，数字计算机可以作为该系统的数据库。这样的模型是软件模型。我们可以随意地改变模型参数或改变模型的构成，观察所得结果而无需用硬件实现，直到我们对正在考虑的设计相当满意为止。在本书中我们主要讨论软件模型。显然，通信系统仿真需要大量的计算，只有计算机具有足够的处理速度，才能进行实际的仿真。现在，由于计算技术的发展，通信系统的仿真已日益普遍，它已成为今天设计和分析通信系统的主要工具。在通信系统仿真广泛应用以前，通常用传统的分析方法得到通信系统的初步分析与设计结果。这种方法希望提出一个公式将各种不同设计参数与所研究的性能指标联系起来。为了提供较好的分析结果，对多数实际系统必须将公式简化。这就使得用分析法分析复杂系统面临很多困难。而计算机仿真则一般不会为这些因素所拖累而使分析困难。这也是计算机仿真广为使用的主要原因。当然，仿真并不能代替分析，实际上这二种方法是相辅相成的。后面我们会看到，一些很有效的性能评价技术将分析和仿真这二种方法很好地结合在一起。

通信系统的含义是很广泛的，它指任何传输信息的系统，这种信息可以是模拟的或数字的，本书的讨论重点自然是后者。所考虑的系统可以用方框图表示，其中每一个模块包括通信会遇到的各种功能。我们将研究如何描述这种一般性模块以及有关它们仿真的问题。

通信系统仿真是一种多学科行为。它涉及很多不同专门领域的理论，其中有些是关于传统通信学科，而另一些则属于仿真范畴。涉及的传统领域可以列出：通信系统，通信原理，系统的数学模型和各种信源（即信号和噪声）的数学模型。除了上述学科外，对仿真有更直接影响的学科是：仿随机码（序列），统计理论，蒙特卡罗（Monte Carlo）估计和其他估计方法。仿真方法论将讨论仿真的准确性和计算量之间的关系及仿真在通信系统工程中的应用。讨论的重点是仿真的原理和技术而不是仿真软件的实际构造。

如上所述，仿真实际上是很多学科的综合应用，仿真的困难多半是由于对这些学科的某些方面缺少了解。因此本书的内容包括两个方面：仿真应用的基本理论和特定的纯仿真技术。

本书第一章是绪论，简要地介绍通信系统仿真技术发展的历史，系统性能评估的方法以及仿真在通信系统设计方面的应用。第二章讨论概率和随机变量的基本概念。第三章较

详细地介绍随机过程及其变换以及它们在通信系统仿真中的应用,随机数的产生以及测试。第四章讨论线性时不变系统的频域表示以及拉普拉斯变换。第五章介绍离散线性系统的分析方法,讨论了离散福里哀变换以及在仿真时如何将连续信号与系统映射为离散形式。第六章讨论了时变线性系统和非线性系统的分析处理方法。第七章讨论通信系统链路的建模。第八章着重于载波传输系统的建模。模型可能以各种不同的等级存在,本章我们建立子系统级的模型,并讨论各种功能模块的建模基础和方法。第九章论述仿真的性能量度估计问题,包括波形的平均电平和平均功率估计,信噪比和差错概率估计,波形幅度的概率密度和分布函数估计,过程的功率谱密度估计等。由于任何蒙特卡罗仿真运算可视为被测数字值可变的实验,我们的目的是以某种方式量化这种可变度。第九章还介绍了一些减少蒙特卡罗仿真运行时间的技术,这些技术一般是基于某些假设,这使这些技术不如蒙特卡罗仿真通用。第十章介绍有关仿真的方法论问题,这主要包括仿真的环境和建模考虑,而第十一章则进一步介绍性能评估技术,仿真中的差错来源以及仿真结果的确认等。我们从一个好的仿真软件应具有的特点和能力出发,讨论软件的结构问题。随后讨论有效地进行通信系统仿真非常必要的一些技术。第十二章介绍了一些仿真的实际应用例子。

本书由李仲令编写第1~6章和第10章,曹世文编写第7~9章,葛造坤编写第11~12章。全书由李仲令修改定稿。

鉴于作者水平,难免有欠妥之处,敬请读者和同行专家批评指正。

编 者

1997年10月27日

目 录

第一章 绪 论

1.1 系统仿真的历史回顾.....	(1)
1.2 性能评估的方法.....	(2)
1.3 仿真方法和应用.....	(2)

第二章 概 率 论

2.1 引论.....	(4)
2.2 概率的基本概念.....	(4)
2.3 随机变量.....	(5)
2.4 单变量模型.....	(9)
2.5 多变量模型.....	(13)
2.6 随机变量的函数.....	(15)
2.7 概率的界和近似.....	(20)

第三章 随机过程及其变换

3.1 随机过程的基本概念.....	(25)
3.2 随机过程的模型.....	(33)
3.3 随机过程的变换.....	(42)
3.4 随机过程的取样和量化.....	(45)
3.5 计算机产生随机数和随机序列.....	(52)
3.6 随机数发生器的测试.....	(62)

第四章 线性系统

4.1 信号和系统的一般描述.....	(66)
4.2 线性时不变系统.....	(70)
4.3 信号和系统的频域表示.....	(71)
4.4 信号和系统的低通等效.....	(78)
4.5 拉普拉斯变换.....	(83)

第五章 离散系统分析

5.1 用离散变换表示连续系统.....	(97)
5.2 离散系统的福里哀分析.....	(108)
5.3 连续信号和系统仿真时的映射.....	(121)

第六章 线性时变系统和非线性系统

6.1	线性时变 (LTV) 系统	(128)
6.2	线性时变系统的建模	(131)
6.3	非线性系统	(136)
6.4	有记忆的非线性系统模型	(144)
6.5	方块模型的解析方法	(146)
6.6	非线性微分方程	(150)

第七章 通信系统链路的建模

7.1	引言	(158)
7.2	信息源	(158)
7.3	信源编译码	(160)
7.4	基带调制	(163)
7.5	射频调制	(167)
7.6	解调	(173)
7.7	同步	(178)
7.8	差错控制编码	(187)
7.9	编码调制	(192)

第八章 通信系统建模

8.1	引言	(195)
8.2	信号源	(195)
8.3	噪声和干扰	(197)
8.4	滤波	(199)
8.5	通信信道的建模	(209)
8.6	复用和多址	(222)
8.7	扩频技术	(225)

第九章 用仿真估计系统的性能

9.1	预备知识	(227)
9.2	随机过程的功率谱 (PSD) 估值	(229)
9.3	波形平均电平的估计	(233)
9.4	波形的平均功率估计	(235)
9.5	信噪比 (SNR) 的估计	(236)
9.6	波形幅度分布和概率密度的估计	(238)
9.7	数字通信系统比特误码率的估计	(241)

第十章 仿真环境的建模

10.1	仿真环境	(257)
10.2	建模的若干考虑	(263)
10.3	同步分析	(266)
10.4	反馈环的仿真	(274)
10.5	仿真一个假设系统	(285)
10.6	多速率取样	(287)

第十一章 系统仿真时的性能评估技术

11.1	性能估计方法	(290)
11.2	仿真中的误差来源	(301)
11.3	验证	(305)
11.4	仿真技术在通信系统设计中的作用	(308)

第十二章 仿真的应用

12.1	光通信链路仿真	(313)
12.2	衰落条件下数字无线链路研究	(323)
12.3	卫星通信系统研究	(335)
12.4	网络拓扑优化设计仿真	(340)
12.5	自适应滤波器的性能仿真	(345)
12.6	CDMA 蜂窝系统中功率控制的仿真	(351)

附 录

附录 1	归一化低通滤波器的双二次节	(355)
附录 2	等效相位噪声过程	(359)

参 考 文 献

第一章 绪 论

1.1 系统仿真的历史回顾

在过去的二十多年里,通信和信号处理系统越来越复杂。与此同时,各种新技术的发展,如快速、价廉的数字信号处理硬件,纤维光学,集成光学器件,单片微波集成电路等,开始对通信系统的实现产生重大的影响。通信系统复杂性的增加使得分析与设计所付出的时间和精力也迅速上升。为了迅速地在商用产品中采用新技术,要求设计工作能够及时而经济地完成。显然,这只有利用计算机辅助分析和设计才能满足。

近几年来已经开发了大量的计算机辅助技术帮助通信系统的建模、分析和设计。这些计算机辅助技术可分为二类:以公式为基础的方法,计算机用来评估复杂的公式;以仿真为基础的方法,计算机用来仿真经过系统的信息流。第二种方法涉及波形的仿真,是本书研究的主要内容,它经常与分析技术结合在一起。

波形级的仿真从发明模拟计算机就开始了。它首先用于控制系统的性能仿真。模拟计算机是连续系统的模拟器。系统的线性单元如积分器、相加器,用反馈直流运算放大器实现,而系统的非线性单元如相乘器、三角函数是用电磁伺服系统以及后来的分段线性近似实现。用常系数或时变系数的线性或非线性微分方程描述的系统,可以简化为能用模拟计算机部件组成的方框图。将这些部件连接起来并加上适当的激励信号,即可用模拟计算机对各种线性和非线性系统的动态性能进行仿真。

高速数字计算机和大容量存储器的发展为它们用于仿真提供了条件,并开辟了新的建模领域,如分析和编程。浮点数表示的大动态范围使用户能从辛苦的劳动中解放出来。数字仿真的一般框架源于面向块的语言如MIDAS, SCADS 和 CSMP。这些语言是在 20 世纪 60 年代初期开发的。它们在一个个部件的基础上模仿模拟计算机的行为。面向块的仿真语言是描述连续系统的一种简单而方便的方法。

利用 ECAP 和 SPICE 这类程序将数字计算机应用于电路的分析和仿真是二十世纪六十年代中期的事,这促进了信号流图的数字集成技术和拓扑逻辑简化方面的进展。

在离散时间系统和数字信号处理方面的进步导致在系统的数字仿真方面新的方法。以变换域技术(FFT, 双线性 Z 变换等)为基础的仿真软件包于二十世纪六十年代后期和七十年代早期开始出现。SYSTID, CSMP 等等软件包正是这段时间为帮助卫星通信链路的分析和设计开发的。SYSTID 的初期型式以及类似的软件包是面向语言的,并设计工作在程序组模式中,而 SYSTID 后来的版本和其他软件包如 ICSSM 则是交互式的和菜单驱动的。

在过去的十多年里,计算机硬件和软件技术经历了显著的变化。功能极强的工作站和个人计算机以高度直观和图形化的用户接口提供非常友好的计算环境。这样的框架结构就为设计人员提供了用图形化方块图表示法及用分级形式开发仿真模型的能力,并允许用户构成图形和波形级仿真,检查仿真结果,执行设计叠代。这些工具也能提供数据库管理,在线文件处理及其他业务。这样就能使一个通信系统工程师在建立、调试仿真程序时的负担减至最小程度。现在他们的注意力可以主要集中在一些重要的事务上,如建模和仿真技术,

性能量度的评估，计算效率等。这些也是本书的主要内容。

1.2 性能评估的方法

性能评估及折衷研究是分析和设计通信系统的时的中心问题，我们将把注意力集中在利用仿真评估模拟与数字通信系统的性能上，重点是数字通信系统。

通信系统性能可以根据公式进行计算，采用波形级的仿真，或通过用硬件构成样机及进行测量来评估。这样的分类并不表示这三种方法是互相排斥的，相反，好的方法经常是这三种方法的组合。

基于公式的技术对设计参数和系统性能间的关系提供透彻地了解。在设计的早期阶段为了广泛地开拓设计空间，这些方法是很有用的。但是，除了一些理想的和过分简化的情况外，仅用分析方法评估复杂的通信系统的性能是极度困难的。

根据设计样机时得到的测量数据评估性能当然是准确而可信的方法。在设计阶段后期，设计的选择限于小的子集时，这种方法是有益的。其缺点是很费钱、费时，不灵活。在设计周期的早期由于设计的选择对象可能很多，这种方法显然是不可取的。

将基于仿真的方法用于性能评估，几乎可以按要求的任意详细程度建立模型。和基于公式或测量的方法相比，设计空间更好地得到了利用。用基于仿真的方法，可以很容易地将数学的和经验的模型结合在一起，把测量的器件特性和实际信号都组合到分析和设计中去。被仿真的波形也能用作测试信号以便证实硬件的功能。

仿真法的不足之处是计算量大，只有通过仔细地选择建模和仿真技术予以缓解。

1.3 仿真方法和应用

通信系统是多种多样的，为了说明基于仿真的方法用于性能评估，让我们考察一个一般通信系统的简化模型（图 1.1）。这个模型只画出了一个典型数字通信系统的功能方框的一部分。为讨论方便起见，假定我们对评估该系统的误码率性能与滤波器参数、非线性放大器参数以及信噪比之间的函数关系感兴趣。

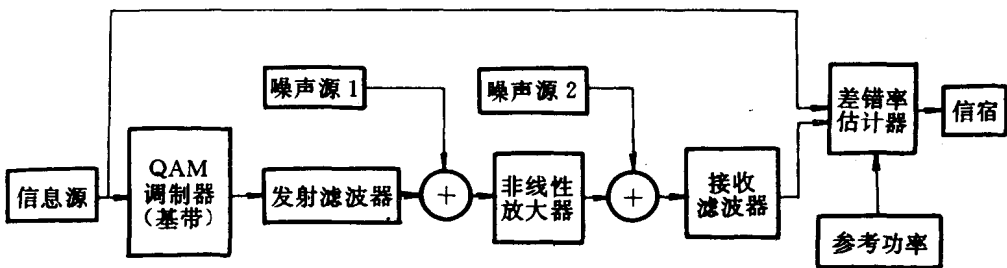


图 1.1 仿真的通信系统

由于滤波器及非线性的存在，分析法评估该系统的性能是困难的。带宽受限的滤波器

引入符号间干扰 (ISI), 而噪声经过非线性单元会导致非高斯和非加性现象, 这些都是很难描述和分析的。可以做某些近似, 如忽略非线性单元前的滤波器的影响, 将二个噪声源合并, 并将这二个噪声源的总效应当做加性、高斯噪声源处理。这样的简化对于得到系统性能的初步的评估是有用的, 但对于进行详细的性能分析则不够准确。

仿真在通信系统设计和工程实现的所有阶段都能起到重要作用, 从早期的概念设计到各个工程实现阶段, 以及现场试验。

设计过程一般从概念定义开始, 即对系统予以高层说明如信息速率, 性能目标等。任何通信系统的性能由二个重要因素控制: 信号噪声比 (S/N) 和累积的信号失真。一般说来, 它们互相影响, 必须作一些折衷。在大多数通信系统中。利用链路预算来跟踪影响 S/N 的各种因素。

通信系统的设计者从候选系统和有关的设计参数表开始。在设计早期阶段, 信噪比和信号质量下降的估计都是用较简单的模型和理论推测得到的。例如, 为计算 S/N , 滤波器可以用有一定带宽的理想低通滤波器作模型, 实际滤波器引入的失真用信噪比 S/N 的下降等效。若初始设计产生的候选系统满足性能目标, 则设计继续进行下一步。否则, 设计的拓扑逻辑就不得不改变, 失真的参数也必须修改。

下一阶段的设计是对子系统和部件拟定详细的规格及验证信号失真。例如, 若一个滤波器规定为七阶巴特沃斯滤波器, 带宽-符号时间积为 0.7, 则波形级仿真可用来证实滤波器引入失真大小。若经过仿真得到的性能下降小于规定值, 则这儿的节省可用来放松其他一些部件的要求。对于这种折衷研究和建立硬件开发的详细规格, 仿真灵活而有效, 经常是唯一可用的方法。

硬件开发开始时涉及关键部件/子系统的建立和测试。这些原型部件的硬件测量特性用于仿真中以便证实该系统的端-端性能。若仿真对性能目标产生满意的值, 则建立其余的部件硬件, 将整个系统的模型硬件连在一起并予以测试。否则, 必须修改技术条件, 部分设计必须重做。

当系统的硬件模型完成后, 就对它进行测试, 并将测试结果与仿真结果比较。硬件和仿真结果之间吻合的程度是仿真是否有效的基础。有效的仿真模型可以用关键部件因老化推断的特性预测系统的寿命 (EOL)。

总之, 仿真在通信系统设计中起重要作用。在概念定义阶段, 导出高层的技术条件; 在设计进行和开发过程中, 与硬件开发一起确定最后的技术条件并检查子系统对整个系统性能的影响; 在运行情况下, 仿真可作检修故障的工具, 并预计系统的 EOL 性能。

必须指出, 要使系统仿真的结果精确地与实际情况一致, 仿真的模型就应尽可能详细。这样, 仿真占用的资源和耗费的时间与精力也就随之而增加。如何在模型复杂性与仿真的准确性之间找到合适的平衡和折衷, 将是实现仿真时需要注意的。

第二章 概 率 论

2.1 引 论

在电系统中我们用电流或电压波形作为采集、传输以及处理信息的信号，也用来向各种设备提供控制以及能源。无论是电流或是电压波形，信号都是时间的函数。按照它和时间的关系可分为确定信号或随机信号。确定信号是以时间 t 为独立变量的函数。这样的信号不能传递信息。和确定信号形成对照，随机信号总是有一些不确定因素加入，因此在任意指定时刻，都不可能确切地确定其值。信号的不确定性越大，它包含的信息越多。

存在不确定性或随机性的模型在通信系统的分析和设计方面起着重要作用。这些模型应用于多种多样的场合，这些场合中的信号以及系统参数都是随机的。

呈现随机变化的波形集合（包括信号和噪声）可用随机变量和随机过程来模拟。随机变量和随机过程是本章和下章讨论的主要课题，目的是为通信系统的仿真分析和设计提供背景知识。

随机现象的产生原因，是由于对发生这种现象的机理部分地无知，或是由于现象规律可能是随机的。也存在这样一些情况，例如掷骰子时出现的点数，只要我们准确知道所有的条件（如掷的角度，骰子滚动的表面性质，投掷的力的大小等等），预测出现的结果是可能的。但是，由于准确的分析太复杂，我们也就满足于接受在平均基础上的预测结果。因此这里的随机现象是由于我们怕麻烦，不愿意进行准确的分析。

在本章中我们首先讨论概率论的基本概念，它是分析随机过程的基础。

2.2 概率的基本概念

我们首先定义一些术语。一个实验如果其结果不可能准确地预测，就叫随机实验。掷一枚硬币，从一副扑克牌中抽一张牌等都是随机实验。一个随机实验可能有几种结果。实验的样本空间 S 由所有可能的结果组成。掷骰子这一随机实验的样本空间 S 是

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (2.2.1)$$

其中整数 $1 \sim 6$ 是骰子六个面上的点数，它们是实验的样点。事件是 S 的一个子集，它可以由任意数目的样点组成。例如事件 A 定义为奇数样点集合

$$A = \{1, 3, 5\} \quad (2.2.2)$$

它由 1, 3, 5 三个奇数点组成。事件 A 的补用 $\bar{A}$ 表示，它由不包含在 A 内的偶数样点组成

$$\bar{A} = \{2, 4, 6\} \quad (2.2.3)$$

如果两个事件没有公共样点，则它们是互不相容的事件。 A 和 $\bar{A}$ 是互不相容的事件。

如果一个事件的所有样点由另外两事件的全部样点组成，则称该事件是两事件之和。例如规定事件 B 和 C 分别为

$$B = \{1, 2\} \quad (2.2.4)$$

$$C = \{1, 2, 3, 5\} \quad (2.2.5)$$

则 C 是 A 和 B 的和 $A \cup B$ 。

两个事件的交由两个事件的公共点组成。例如 $E = B \cap C$ 表示事件 B 和 C 的交，

$$E = B \cap C = \{1, 2\} \quad (2.2.6)$$

当两个事件互不相容时，它们的交是零事件，用 ϕ 表示，例如 $A \cap \bar{A} = \phi$ 。上述关于事件和与交的定义可推广到两个以上的事件。

将事件 A 与包含在样本空间 S 内的每个事件联系在一起的是它的概率 $P(A)$ 。这里我们采用公理化的概率定义，即

1. 事件 A 的概率 $P(A) \geq 0$ 。
2. 样本空间（必然事件）的概率是 $P(S) = 1$ 。
3. 设 $A_i (i=1, 2, \dots)$ 是样本空间内的事件，且有

$$A_i \cap A_j = \phi, i \neq j = 1, 2, \dots$$

则这些互不相容事件的和的概率满足

$$P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i) \quad (2.2.7)$$

2.3 随机变量

一、随机变量的基本概念

随机实验的结果可能是一实数（如掷骰子的实验），也可能不是一个数，但可以用一种状态描述（例如掷硬币时的正面和反面）。从数学观点来看，希望所有结果都有一个数值。假如有 m 个样点 $S_1, S_2, \dots, S_m$ ，我们可以利用某些规则给样点 $S_i (i=1, 2, \dots, m)$ 分配一个实数 $X(\zeta_i)$ 。例如，掷硬币实验时，我们可将数字 1 分配“正面”，将数 -1 分配给“反面”（图 2.1）。因此 $X(\cdot)$ 是一个映射函数，它将样点 $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$ 映射为实数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，即随机变量 X 的取值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。以后用大写正体表示随机变量，用小写斜体表示随机变量的值。如果一个随机变量只能取一些离散的值，则称为离散随机变量。

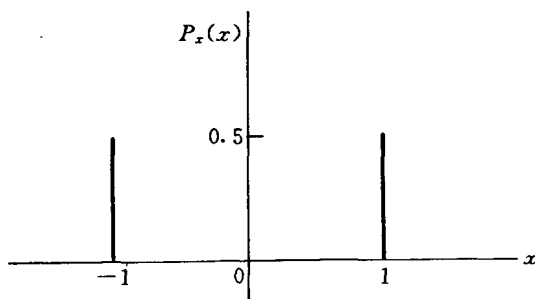


图 2.1 掷硬币实验的概率

上面所举的实验例子，其可能的结果是有限的组合。也有很多实验，它们产生的结果是连续的。一个电子放大器的噪声电压就具有连续的幅度。电压振幅 $v \in S$ 的样本空间 S 是连续的，映射 $X(v) = v$ 。这时随机变量是一连续随机变量。

已知一连续随机变量 X ，事件 $\{X \leq x\}$ 的概率 $P(X \leq x)$ 叫概率分布函数，记为 $F(x)$ ：

$$F(x) = P(X \leq x)$$

其中 x 是区间 $(-\infty, \infty)$ 内的任意实数。

对于离散随机变量 X ，它的取值是可数的（有限或无限），则 X 可以用概率质量函数 $P(X = x_i)$ 表征， $i = 1, 2, \dots$ 。概率分布函数和概率质量函数间的关系是

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(x = x_i) \quad (2.3.1)$$

如果在实线上的一个或多个集合内，随机变量 X 的取值是不可数的，则 X 是连续随机变量，它可以用概率密度函数 $f_X(x)$ 表述：

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad -\infty < x < \infty \quad (2.3.2)$$

或

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(a) da \quad (2.3.3)$$

分布函数为随机变量提供一个完备的描述。

随机变量有时用统计平均或期望值描写。一个随机变量函数的期望值定义为

$$E\{g(X)\} = \sum_i g(x_i) P(x = x_i) \quad (2.3.4)$$

这是离散随机变量的情况。对于连续随机变量则有：

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (2.3.5)$$

最经常用来表征随机变量的二种期望值是均值 μ_X 和方差 σ_X^2 ：

$$\mu_X = E\{X\} \quad (2.3.6)$$

$$\sigma_X^2 = E\{(X - \mu_X)^2\}$$

方差的平方根值叫标准偏差。随机变量的均值是它的统计平均值，而方差是随机变量值扩散的量度。当随机变量的概率分布函数未知时，可利用均值和方差及契比雪夫不等式得到概率的约束界：

$$P[|X - \mu_X| > k] \leq \frac{\sigma_X^2}{k^2} \quad (2.3.7)$$

上述契比雪夫不等式对离散随机变量和连续随机变量都适用。由此不等式可得随机变量 X 取值在 $\mu_X \pm k\sigma_X$ 范围之外的概率界。

二、多维随机变量

标量或单变量随机变量将随机实验的结果映射到实线上的点，而矢量随机变量将一个或多个随机实验的结果映射到多维空间上的点，笛卡尔坐标系统中空间飞行器的位置是三维随机矢量的一个例子。

矢量随机变量的概率定律用联合分布函数说明：

$$F_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) = P[(X_1 \leq x_1), \dots, (X_m \leq x_m)]$$

概率定律对离散和连续随机变量也可分别用联合概率质量函数和联合概率密度函数描述, 这儿以连续情况为例加以说明。

m 维随机矢量的联合概率密度函数 (pdf) 是分布函数对 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的偏导数, 定义为:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_m}(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

由联合概率密度函数, 可得边缘概率密度函数:

$$f_{X_1}(x_1) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{(m-1) \text{ 重积分}} f_{X_1, X_2, \dots, X_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_2, \dots, dx_m \quad (2.3.8)$$

这是随机变量 X_1 的边缘 pdf 。 m 个随机变量的任意子集的边缘 pdf 可以将不在子集内的变量积分掉而获得。

设 X 和 Y 是两个随机变量, 则已知 $Y=y_j$ 时 $X=x_i$ 的条件概率记为 $P_{X|Y}(x_i|y_j)$ 。显然,

$$\sum_i P_{X|Y}(x_i|y_j) = \sum_j P_{Y|X}(y_j|x_i) = 1 \quad (2.3.9)$$

$$\begin{aligned} \sum_i P_{XY}(x_i, y_j) &= \sum_i P_{X|Y}(x_i|y_j) P_Y(y_j) \\ &= P_Y(y_j) \sum_i P_{X|Y}(x_i|y_j) \\ &= P_Y(y_j) \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

类似地有

$$P_X(x_i) = \sum_j P_{XY}(x_i, y_j) \quad (2.3.11)$$

现以 $m=4$ 为例进一步说明条件概率密度函数的概念

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2, X_3|X_4}(x_1, x_2, x_3|x_4) &= \frac{f_{X_1, X_2, X_3, X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)}{f_{X_4}(x_4)} \\ f_{X_1, X_2|X_3, X_4}(x_1, x_2|x_3, x_4) &= \frac{f_{X_1, X_2, X_3, X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4)}{f_{X_3, X_4}(x_3, x_4)} \end{aligned}$$

设 $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 是随机变量的标量函数, 则其期望值可由下列多重积分定义:

$$\begin{aligned} E\{g(X_1, X_2, X_3, X_4)\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot f_{X_1, X_2, X_3, X_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \end{aligned}$$

而条件期望用下表示:

$$\begin{aligned} E\{g(X_1, X_2, X_3, X_4) | X_3 = x_3, X_4 = x_4\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, x_3, x_4) f_{X_1, X_2|X_3, X_4}(x_1, x_2|x_3, x_4) dx_1, dx_2 \end{aligned}$$

联合分布的重要参数是均值、协方差和相关系数:

$$\begin{aligned} \mu_{X_i} &= E\{X_i\} \\ \sigma_{X_i X_j} &= E\{X_i X_j\} - \mu_{X_i} \mu_{X_j} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

$$\rho_{X_i X_j} = \frac{\sigma_{X_i X_j}}{(\sigma_{X_i X_i} \sigma_{X_j X_j})^{1/2}}$$

其中 $\sigma_{X_i X_i} = \sigma_{X_i}^2$ 是 X_i 的方差。有时用 E_{X_i} , $E_{X_i X_j}$ 和 $E_{X_i | X_j}$ 分别表示 X_i 的边缘分布, X_i 和 X_j 的联合分布, 及给定 X_j 时 X_i 的条件分布的期望。当表示期望有模糊时我们就加下标说明。

随机矢量的概率定律可用矢量符号简明地表示。 m 个随机变量可以用 $m \times 1$ 的列矢量 X 表示:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad X^T = (X_1, X_2, \dots, X_m)$$

其中 T 表示矢量 (或矩阵) 的转置。 X 的值是 m 维空间 R_m 的点。 X 的特定值表示为:

$$X^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

联合 pdf 的定义是

$$f_X(X) = f_{X_1, X_2, \dots, X_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (2.3.13)$$

平均矢量为

$$\mu_X = E(X) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_m) \end{bmatrix} \quad (2.3.14)$$

协方差矩阵 C_X 是一个 $m \times m$ 矩阵:

$$\begin{aligned} C_X &= E\{XX^T\} - \mu_X \mu_X^T \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{X_1 X_1} & \sigma_{X_1 X_2} & \cdots & \sigma_{X_1 X_m} \\ \sigma_{X_2 X_1} & \sigma_{X_2 X_2} & \cdots & \sigma_{X_2 X_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_m X_1} & \sigma_{X_m X_2} & \cdots & \sigma_{X_m X_m} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

协方差矩阵描述随机矢量各分量之间的二阶关系。若

$$\sigma_{X_i X_j} = \sigma_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

则分量是不相关的。

若

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m f_{X_i}(x_i)$$

则它们是独立的。

三、复随机变量

复随机变量 Z 用二个实随机变量 X 和 Y 定义:

$$Z = X + jY$$

$g(Z)$ 的期望值是:

$$E\{g(Z)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(Z) f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

复随机变量的均值 μ_Z 为

$$\mu_Z = E\{Z\} = E\{X\} + jE\{Y\} = \mu_X + j\mu_Y$$

方差 σ_Z 的定义是

$$\sigma_Z^2 \triangleq E\{|Z - \mu_Z|^2\}$$

二个复随机变量 Z_m 和 Z_n 的协方差是

$$C_{Z_m Z_n} \triangleq E\{(Z_m - \mu_{Z_m})^* (Z_n - \mu_{Z_n})\}$$

其中 * 表示复共轭。

2.4 单变量模型

一、连续随机变量的单变量模型

下面提出连续随机变量几种有用的模型。除概率密度函数之外，对于可以用闭形式表示的情况也给出了概率分布函数。

1. 均匀分布

假设条件：随机变量在给定区间内的取值与区间长度成正比。

密度函数：

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad a < x < b \quad (2.4.1)$$

分布函数：

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad a < x < b \quad (2.4.2)$$

均值和方差：

$$\mu_X = \frac{b+a}{2} \quad (2.4.3)$$

$$\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (2.4.4)$$

应用：在仿真中，均匀分布的样值用来产生其他概率分布的样值。

2. 高斯分布

假设条件：利用中心极限定律，由大量独立的变量之和所确定的随机变量导致高斯的 pdf。

密度函数：

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} \sigma_X} \exp[-(x - \mu_X)^2 / 2\sigma_X^2] \quad -\infty < x < \infty \quad (2.4.5)$$

式中 μ_X 和 σ_X 分别是随机变量的均值和方差。其分布函数是

$$F(x) = \int_{-\infty}^x P(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^x e^{-(u-\mu_X)^2/2\sigma_X^2} du$$