工程数学解题方法

陈启浩　符天波　编著

人民邮电出版社

内 容 提 要

本书是介绍工程数学解题方法的自学参考书。

全书共分十七节，分别介绍了工程数学中的矩阵，线性变换，复变函数的解析性和级数展开，复变函数积分的计算，保角映射的作法，多值函数初步，积分变换的计算，积分变换的应用，梯度、散度和旋度的计算，特殊函数的计算，分离变量法，行波法，格林函数，随机事件概率的计算，随机变量分布的计算，随机变量数字特征的计算以及数理统计初步等，并对解决以上问题的方法和技巧进行了总结。

读者对象：具有工程数学初步知识的工科院校学生，电大、函大学生以及报考研究生的青年。

工程数学解题方法

陈启浩　衡天波　编著

责任编辑　董乐前　郑文进

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

开本：787×1092 1/32　　1987年10月第一版

印张：$18^{28}/_{32}$　页数：302　　1987年10月河北第1次印刷

字数：440千字　　印数：1—8 500 册

统一书号：15045·总3342—无6402

定价：3.50 元

前　言

工程数学是高等数学的继续和发展，但其广度和难度都较高等数学大。根据我们的经验，掌握必要的解题方法和计算技巧，是把工程数学学到手的关键之一。

鉴于这样的原因，我们继《高等数学解题方法》之后编写了这本《工程数学解题方法》。本书拟通过对工程数学中的一些基本问题解题方法的归纳总结，对二百余个典型例子的分析和解答，帮助读者提高分析问题和解决问题的能力。在编写过程中，力求做到以解题方法为全书的主线，而举一些典型的带技巧性的例子，只起到使解题方法具体化的作用；并且通过解题方法的总结，把工程数学的各个分支互相联系起来，使读者对工程数学有一个整体的认识。

本书可供具有工程数学基本知识的工科院校学生，电大、函大学生学习工程数学，进一步提高解题能力时使用，也可供报考研究生的青年复习工程数学时参考。

限于我们的水平，这本书中难免留有疏漏和错误之处，欢迎读者指正。

编著者

1984.9

目　　录

第一节 矩 阵

一、秩的计算方法

设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则称A的不为零的子式的最高阶数为它的秩，记为rank(A)。

矩阵秩有以下三种计算方法：

方法一 根据矩阵秩的定义进行计算，即通过计算矩阵的不为零子式的最高阶数，来计算该矩阵的秩。

【例1.1】 求rank(A)，其中

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

解：A是4×3矩阵，因此rank$(A)\leqslant 3$。由于A的四个三阶子式都为零：

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

而二阶子式

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

所以，rank$(A)= 2$

【例1.2】设

$$M(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{pmatrix}$$

试对不同的实数 λ 讨论$M(\lambda)$的秩。

解：因为

$$\det M(\lambda)① = \lambda^2(\lambda-1)$$

所以，$\lambda\neq 0$，1时，rank$[M(\lambda)]= 3$

$$M(0)=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

显见 $|M(0)| = 0$，而它的二阶子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

所以，rank$[M(0)]= 2$

$$M(1)=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

显见，$|M(1)| = 0$，而它的二阶子式

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

---

①设A是n阶矩阵（即它的行数与列数都为n），用$detA$，或者$|A|$表示它所对应的行列式。

所以，$\text{rank}[M(1)]=2$

综合上面所述，得

$\lambda\neq 0$，1时，$\text{rank}[M(\lambda)]=3$

$\lambda=0$ 或 1 时，$\text{rank}[M(\lambda)]=2$

方法二 由于矩阵的秩＝列向量组的极大线性无关向量的个数＝行向量组的极大线性无关向量的个数，因此可以通过计算列(行)向量的极大线性无关向量的个数来计算该矩阵的秩。

【例1.3】 求$\text{rank}(A)$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

解：A是 4×5 矩阵，所以$\text{rank}(A)\leqslant 4$，因此$A$的列向量组的最大线性无关向量的个数至多是 4 。顺序记A的五个列向量为α_1，α_2，α_3，α_4，α_5，易证α_1，α_3，α_4，α_5线性无关。事实上，设

$$k_1\alpha_1+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4+k_5\alpha_5=0 \tag{1}$$

(k_1，k_3，k_4，k_5是常数)，将α_1，α_3，α_4，α_5的具体式子代入(1)得方程组

$$\begin{cases} k_3-k_4+2k_5=0 \\ -2k_3-2k_4=0 \\ -k_3+k_4+k_5=0 \\ k_1+k_4-k_5=0 \end{cases}$$

解此方程组得$k_1=k_3=k_4=k_5=0$，也就是说，(1)只在$k_1=k_3=k_4=k_5=0$时成立，所以α_1，α_3，α_4，α_5线性无关。因此$rank(A)=4$。

方法三　我们知道，对矩阵施行初等行变换不改变其秩，而且对任何一个矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$施行一系列初等行变换后可以化为形如下式的阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' & \cdots a_{1k}' & a_{1k+1}' \cdots a_{1n}' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & \cdots a_{2k}' & a_{2k+1}' \cdots a_{2n}' \\ 0 & 0 & a_{33}' & \cdots a_{3k}' & a_{3k+1}' \quad \cdots a_{3n}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots a_{kk}' & a_{kk+1}' \cdots a_{kn}' \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \quad \cdots 0 \\ & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \cdots \quad 0 \end{pmatrix}$$

（其中a_{11}'，a_{22}'，…，a_{kk}'全不为零，$k\leqslant\min(m,\ n)$），从阶梯形矩阵秩为k得到$\text{rank}(A)=k$。这种方法也称为初等变换法。

【例1.4】　计算$\text{rank}(M)$，其中

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

解　用初等变换法求$\text{rank}(M)$。因为

$$M\xrightarrow{\text{第 1 行}\times(-3)\text{加到第 3 行}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行}\times\left(-\frac{7}{2}\right)\text{加到第 4 行}]{\text{第 2 行}\times\left(-\frac{3}{2}\right)\text{加到第 3 行}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -\frac{5}{2} & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -\frac{11}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行}\times\left(-\frac{7}{11}\right)\text{加到第 4 行}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -\frac{5}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{43}{11} & \frac{32}{11} \end{pmatrix}$$

所以

$$\operatorname{rank}(M)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -\frac{5}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{43}{11} & \frac{32}{11} \end{pmatrix}=4$$

二、逆的计算方法

由于只有满秩矩阵（即秩等于阶数的矩阵）才有逆可言，因此计算矩阵逆是指计算满秩矩阵的逆。

设A是满秩矩阵，则它的逆是满足以下条件的矩阵B：

$$AB=BA=E$$

（E是与A同阶的单位阵），通常记为A^{-1}。

满秩矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的逆有以下三种计算方法：

方法一 设A的元素a_{ij}的代数余子式为A_{ij}，则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A_{ji})_{n\times n}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

上式的矩阵(A_{ji})称为A的伴随矩阵，因此这种计算逆的方法也称伴随矩阵法。

【例1.5】 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的逆。

解：

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-15\neq 0$$

所以A^{-1}存在。现用伴随矩阵法计算A^{-1}。

因为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-5$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix}=4$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\1&0\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\5&0\end{vmatrix}=15$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\5&1\end{vmatrix}=-9$$

所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{-15}\begin{pmatrix}1&-2&-3\\-5&-5&15\\-2&4&-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{15}&\frac{2}{15}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-1\\\frac{2}{15}&-\frac{4}{15}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

方法二 由满秩矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$构造分块矩阵

$$(A;\ E_n)=\left(\begin{array}{cccc:cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & 1 & & \\ & \cdots\cdots & & & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & & & 1 \end{array}\right)$$

（其中E_n表示n阶单位阵，矩阵中未写元素的表示此位置的元素为零，这两条在今后普遍采用，不作一一说明），并对它进行一系列初等行变换后得到

$$(E_n;\ B)=\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & & & & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & 1 & & & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & & & \cdots\cdots & & \\ & & & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

则

$$A^{-1}=B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

称这一求逆的方法为初等变换法。

【例1.6】设

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

求A^{-1}。

解：$|A|=1\neq 0$，所以A^{-1}存在，现用初等变换法求A^{-1}。为此构造矩阵$(A;\ E_4)$，并且

$$(A\vdots E_4)=\left(\begin{array}{cccc:cccc} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第1、3行互换}}\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第1行}\times(-3)\text{加到第3行}}\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第2、4行互换}}\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行}\times(-2)\text{加到第 4 行}]{\substack{\text{第 2 行}\times\ 2\text{ 加到第 1 行}\\ \text{第 2 行}\times(-4)\text{加到第 3 行}}}\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行}\times\ 2\text{ 加到第 4 行}]{\substack{\text{第 3 行}\times(-1)\text{加到第1行}\\ \text{第 3 行}\times(-2)\text{加到第2行}}}\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{第 4 行}\times(-1)\text{加到} \\ \text{第 3 行}}]{\substack{\text{第 4 行加到第 1 行} \\ \text{第 4 行加到第 2 行}}}\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{array}\right)$$

所以

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

方法三 称为分块矩阵法，即通过分块矩阵的运算计算矩阵逆的方法。

【例1.7】 用分块矩阵法重解例1.6。

解：将A分成四个子块

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ \hdashline 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c} A_1 & A_1 \\ \hdashline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

显然，A_1，A_4都是满秩二阶矩阵，它们的逆较A的逆容易计算，得

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}，\quad A_4^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

设

$$B=A^{-1}=\left(\begin{array}{c:c} B_1 & B_2 \\ \hdashline B_3 & B_4 \end{array}\right) \tag{1}$$

（这里B的子块B_1，B_2，B_3，B_4的阶数分别与A_1，A_2，A_3，A_4的一样），则由

$$AB=E_4$$

得

$$\left(\begin{array}{c:c} A_1B_1+A_2B_3 & A_1B_2+A_2B_4 \\ \hdashline A_3B_1+A_4B_3 & A_3B_2+A_4B_4 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c} E_2 & O \\ \hdashline O & E_2 \end{array}\right)$$

（其中O是二阶零矩阵，即元素都为零的矩阵），或者

$$A_1B_1+A_2B_3=E_2 \tag{2}$$

$$A_1B_2+A_2B_4=O \tag{3}$$

$$A_3B_1+A_4B_3=O \tag{4}$$

$$A_3B_2+A_4B_4=E_2 \tag{5}$$

由(3)得

$$B_2=-A_1^{-1}A_2B_4 \tag{6}$$

代入(5)得

$$B_4=(A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} \tag{7}$$

因为

$$A_4-A_3A_1^{-1}A_2=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$