控制理论基础习题集

程述声 范崇託 编

哈尔滨工业大学出版社

控制理论基础习题集

程述声　范崇讬　编

哈 尔 滨 工 业 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本习题集是与王显正、范崇讬编写的《控制理论基础》（国防工业出版社1980年9月出版）相配合的教学用书。内容包括：自动控制系统的基本原理、拉普拉斯变换在自动控制理论中的应用、物理系统的数学模型、传递函数、频率特性、线性系统的稳定性分析、控制系统的误差分析和计算、瞬态响应分析、根轨迹法、线性控制系统的设计与校正、离散时间系统和Z变换法、非线性控制系统和现代控制理论等十二章的例题（约140个）和习题（约200个）。书末附有习题答案。

本习题集可作为高等院校的液压与气动专业、机械类专业、机电工程类专业、工业仪表自动化专业和船舶电气自动化专业的师生的参考书，也可供有关工程技术人员参考。

DY08/15

控制理论基础习题集

程述声　范崇讬　编

*

哈尔滨工业大学出版社出版

黑龙江省新华书店发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　印张 15.25　字数 349,000

1985年7月第1版　1985年7月第1次印刷

印数 1—5,000

书号 15341.22　定价 2.90元

前　　言

本习题集是与王显正、范崇讬编写的《控制理论基础》(国防工业出版社1980年9月出版)相配合的教学用书。《控制理论基础》一书出版以来,深受广大读者的欢迎。在高等工科院校中，自动控制理论已成为学生必修的技术基础课。广大的科学工作者和工程技术人员也都渴望掌握自动控制理论的基本知识。为了帮助加深理解自动控制理论，我们编写了这本习题集。

书中的例题和习题大部分取材于国内外习题集和有关文献。为了便于自学，每章开始，先介绍基本理论和基本公式。本习题集选题力求通俗易懂，并具有一定的代表性。编排顺序基本与《控制理论基础》一致。书末附有习题的答案和参考书目。

本书的第六章至第十一章由范崇讬编写，其余各章由程述声编写。由程述声担任本书的主编。

本书由哈尔滨工业大学孟繁华和上海交通大学王显正担任主审。哈尔滨船舶工程学院朱春元、上海交通大学六三〇教研室和哈尔滨工业大学液压教研室对本习题集提出了许多宝贵意见在此一并表示感谢。

由于水平有限，书中定有不妥之处，恳请读者提出宝贵意见。

编　者

一九八三年二月

目　　录

第一章　自动控制系统的基本原理

内 容 提 要

一、自动控制系统中常用的术语

1. 自动控制系统

能够对被控制对象的工作状态进行自动控制的系统叫做自动控制系统。它一般由控制装置和被控制对象组成，如图 1—1 所示。

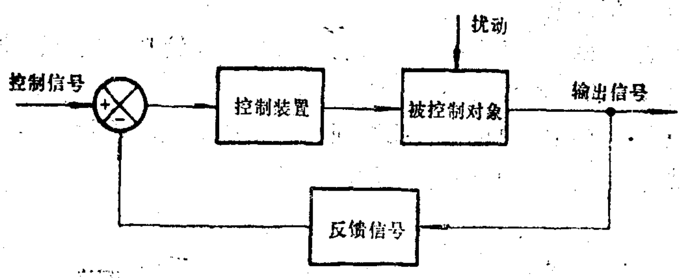

图 1—1　典型系统的方块图

2. 被控制对象（或称对象）

被控制对象（或称对象）是指要求实现自动控制的机器、设备或生产过程。例如加热炉、化学反应塔、机床或飞行器等。

3. 控制装置

控制装置是指对被控制对象施行控制作用的设备的总体。

4. 过程

任何被控制的运行状态叫做过程，如加热炉的温度状态，飞行器的工作状态等。

5. 输入给定值或称给定信号

被控制量需要达到的数值称为系统的给定值或给定信号。

6. 扰动（或称干扰）

扰动是除信号以外、对输出产生作用的信号。如果扰动产生于系统的内部叫内扰，扰动产生于系统的外部叫外扰。外扰也是系统的输入量。

7. 输入量

泛指输入到自动控制系统中的信号，如给定值和外扰，通常把系统的给定值称为输入量。

8. 反馈

把系统（或元件）的输出量馈送到输入端，并与输入信号进行比较的过程称为反馈。当与输入量比较符号相反时称为负反馈，反之称为正反馈。在自动控制系统中，通

常应用负反馈。

9. 误差

在稳定的控制系统中，误差是控制系统准确度的一种度量。定义是期望的输出值与实际的输出值之间的偏差。

10. 反馈控制

按偏差进行控制叫做反馈控制。

11. 反馈回路

把输出量取作反馈信号，引向输入端的通道称为反馈回路。

12. 前向回路

从给定信号到被控制量的通道称为前向回路。

二、开环控制与闭环控制

1. 开环控制（顺馈控制）系统

开环控制系统是指在控制系统中，只有前向回路，而没有主反馈回路的系统。

2. 闭环控制（反馈控制）系统

闭环控制系统是指在系统中包含主反馈回路的系统。闭环控制系统，一般都由以下几种基本元件或装置组成，如图 1—2 所示。

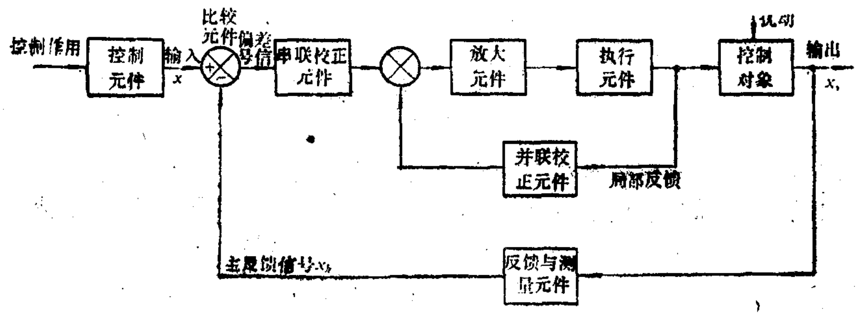

图 1—2 闭环系统的组成

1. 测量元件 对系统的输出量进行测量所用的元件叫做测量元件或称敏感元件。

2. 比较元件 对系统的输出量与给定信号进行代数运算。起信号比较作用的元件叫做比较元件。

3. 放大元件 对微弱信号进行放大或变换，输出足够的功率和要求的物理量的元件叫做放大元件。

4. 执行机构 根据放大后的偏差信号，使被控制量与输入给定量趋于一致的装置叫做执行机构。

5. 被控制对象 前面已定义。

6. 校正元件 其参数与结构便于调整，用于改善系统性能的元件，叫做校正元件。

习　　题

1—1　试举几个日常生活中的开环控制系统和闭环控制系统的例子，并说明其工作原理。

1—2　已知图 1—3 所示的开环速度控制系统，试说明它的工作原理，并画出方块图。

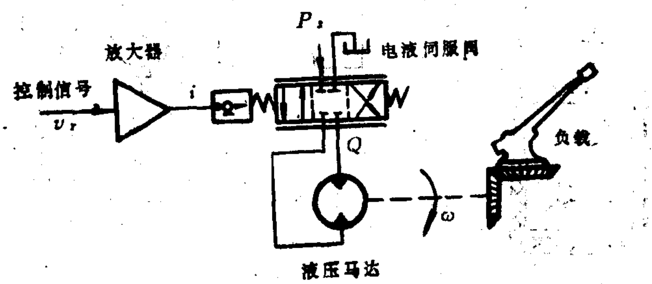

图 1—3　开环系统的原理图

1—3　已知图 1—4 所示为一个液面高度自动控制系统，说明它的工作原理，并画出方块图。

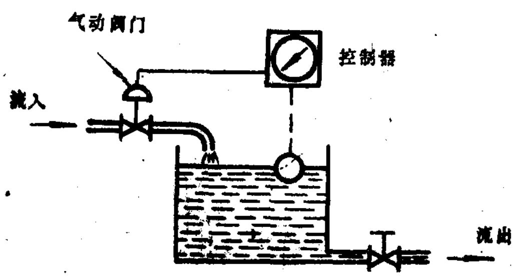

图 1—4　液面高度控制系统

1—4　图 1—5 示出一个仓库大门开闭的自动控制系统，试说明它的工作原理，并画出该系统的方块图。

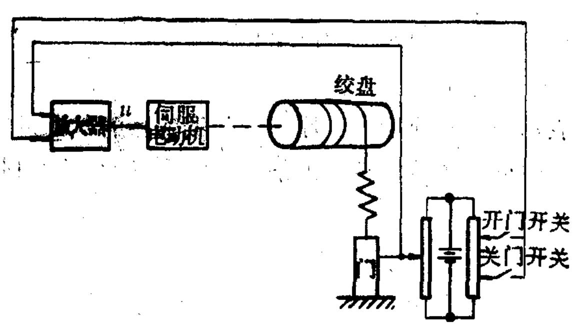

图 1—5　仓库大门开闭控制系统

1—5 图 1—6 所示为一恒温箱自动控制系统，说明它的工作原理，并画出方块图。

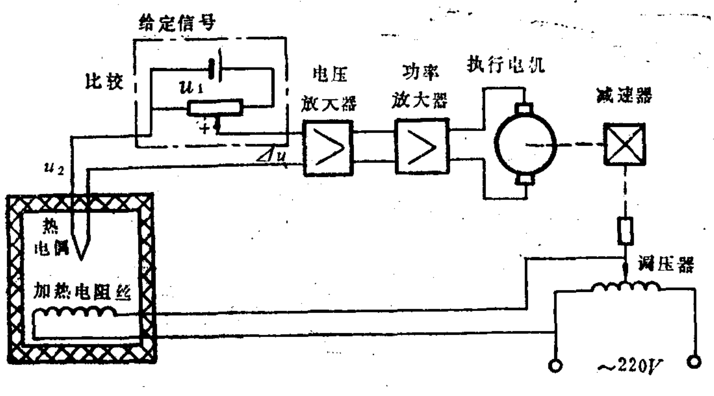

图 1—6 恒温箱自动控制系统

1—6 图 1—7 所示为一个位置控制电液伺服系统，试说明它的工作原理，并画出方块图。

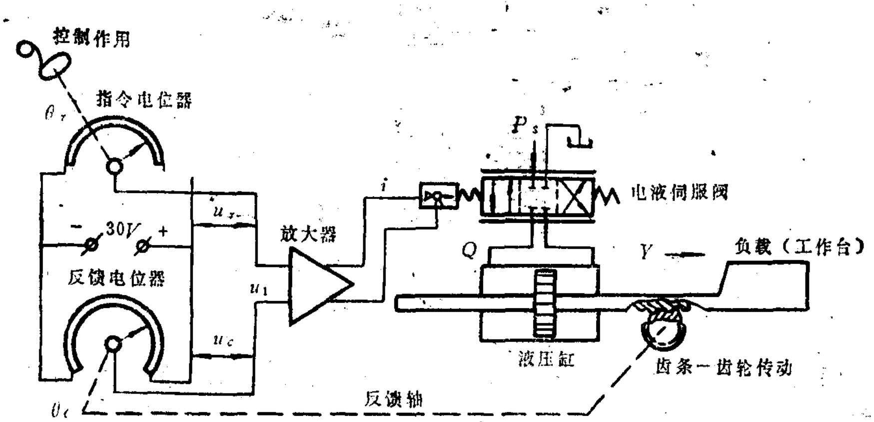

图 1—7 位置控制电液伺服系统

1—7 图 1—8 表示一个角速度控制原理图。调速器的轴通过减速齿轮以角速度 ω 转动，旋转的飞锤产生的离心力被弹簧力抵消。而所要求的速度由弹簧预应力调准。试画出该系统的方块图。

1—8　已知图 1—9 为液压系统工作原理图。输入信号 x 带动操纵活塞向左移动，使动力活塞向右移动，并带动反馈杆 AC 和它一起运动。因此使操纵活塞向右移动，这个作用一直继续到操纵活塞盖住通道为止。要求画出方块图。

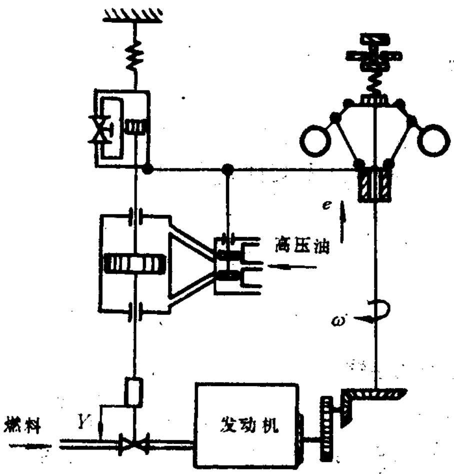

图 1—8　角速度控制系统原理图

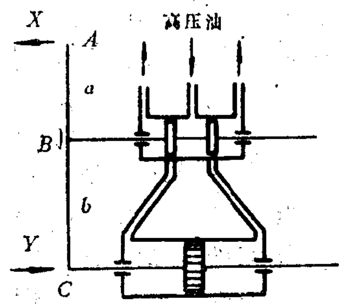

图 1—9　液压系统工作原理图

第二章　拉普拉斯变换在控制理论中的应用

内 容 提 要

一、拉普拉斯变换的定义

若函数 $f(t)$，定义 $F(s)$ 是它的拉普拉斯变换（简称拉氏变换），则

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

这里 $f(t)$ 必须满足以下条件：

1. 当 $t<0$ 时，则 $f(t)=0$；
2. 当 $t>0$，则 $f(t)$ 为第一类间断点，且分段连续；
3. 当 $t\to\infty$ 时，$f(t)$ 不比指数项增大得更快。

工程实际中遇到的函数都能满足这些条件。这里要注意：当 $f(t)$ 在 $t=0$ 处包含一个脉冲函数时，下限 0 应从 0_- 算起，其它情况在工程上都从 0_+ 算起。

二、常用的拉普拉斯变换定理

1. 线性定理

若 $g(t)=f_1(t)+f_2(t)$

则 $G(s)=L[g(t)]=L[f_1(t)+f_2(t)]=F_1(s)+F_2(s)$

若 $g(t)=Kf(t)$　（K 是常数）

则 $G(s)=K\cdot F(s)$

2. 位移定理

若 $g(t)=f(t)e^{-at}$

则 $G(s)=F(s+a)$

3. 延迟定理

若 $g(t)=f(t-\tau)$

则 $G(s)=e^{-\tau s}F(s)$

4. 积分定理

若 $g(t)=\int f(t)dt$

则 $G(s)=F(s)/s+f(0)/s$

5. 微分定理

若 $g(t)=df(t)/dt$

则 $G(s)=sF(s)-f(0)$

6. 初值定理

$$f(0_+)=\lim_{s\to\infty}s\cdot F(s)$$

7. 终值定理

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

必须注意终值定理的使用条件是 $\lim_{t \to \infty} f(t)$ 存在，且 $sF(s)$ 在复平面右半面（包括虚轴）上没有极点。例如 $f(t) = \sin\omega t$，因为 $\lim_{t \to \infty} \sin\omega t$ 不存在，且

$$s \cdot F(s) = s\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

在 $s = \pm j\omega$ 处有极点。因此不满足应用条件，故 $f(\infty)$ 不存在。

三、拉普拉斯反变换（简称拉氏反变换）

定义

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

按此定义求解不便于工程上应用。一般 $F(s)$ 是 s 的有理代数分式，可将它分成部分分式，然后查拉普拉斯反变换表，逐项求出原函数。

四、应用拉普拉斯变换求解微分方程式

步骤

1. 考虑初始条件，对微分方程进行拉氏变换，将时域的微分方程变为 S 域的代数方程；
2. 求解代数方程，得微分方程在 S 域中的解；
3. 求 S 域解的拉氏反变换，即得微分方程的时域解。

例　　题

例 2—1　求单位阶跃函数 $f(t) = 1(t)$ 的 $F(s)$。

解　单位阶跃函数的定义

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

根据拉氏变换的定义有

$$F(s) = L[f(t)] = L[1(t)] = \int_0^\infty 1(t)e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

例 2—2　求单位脉冲函数 $f(t) = \delta(t)$ 的 $F(s)$。

解　单位脉冲函数的定义

$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0,\ t > \varepsilon \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \end{cases}$$

并设 ε 为无穷小量。

根据拉氏变换的定义有

$$F(s)=L[f(t)]=L[\delta(t)]=\int_0^{\varepsilon}\delta(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}e^{-st}dt=-\frac{1}{\varepsilon s}e^{-st}\Big|_0^{\varepsilon}=\frac{1-e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s}$$

根据罗毕达法则有

$$\lim\frac{1-e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s}=1$$

故 $F(s)=L[\delta(t)]=1$

还可以将 $1-e^{-S\varepsilon}$ 展成级数

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon s}\left[1-\left(1-\frac{\varepsilon s}{1!}+\frac{(\varepsilon s)^2}{2!}-\frac{(\varepsilon s)^3}{3!}+\cdots\right)\right]$$

忽略高阶无穷小量，则有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon s}[1-(1-\varepsilon s)]=1$$

故 $F(s)=L[\delta(t)]=1$

例 2—3 求单位斜坡函数 $f(t)=t$ 的 $F(s)$。

解 单位斜坡函数的定义

$$f(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ t & t>0\end{cases}$$

应用分部积分法 $\int udv=uv-\int vdu$ 可得

$$F(s)=L[f(t)]=L[t]=\int_0^{\infty}te^{-st}dt$$

$$=t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}-\frac{e^{-st}}{s}dt=-\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s^2}$$

例 2—4 求指数函数 $f(t)=e^{-at}$ 的 $F(s)$。

解 指数函数的定义

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-at} & t\geqslant 0\end{cases}\qquad (a\ 为实数)$$

根据拉氏变换的定义有

$$F(s)=L[f(t)]=L[e^{-at}]=\int_0^{\infty}e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^{\infty}e^{-(a+s)t}dt=\frac{1}{s+a}$$

例 2—5 求正弦函数 $f(t)=\sin\omega t$ 的 $F(s)$

解 正弦函数的定义

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \sin\omega t & t\geqslant 0\end{cases}\qquad (\omega\ 为常数)$$

根据拉氏变换的定义有

$$F(s)=L[f(t)]=L[\sin\omega t]=\int_0^{\infty}\sin\omega t e^{-st}dt$$

因为

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$$

$$e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t$$

所以

$$\sin\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$

因此

$$F(s)=\frac{1}{2j}\int_0^\infty (e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})e^{-st}dt=\frac{1}{2j}\int_0^\infty [e^{-(s-j\omega)t}-e^{-(S+j\omega)t}]dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

例 2—6 证明

$$L[e^{-\alpha t}\cdot\sin\omega t]=\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

证明：由于 $L[e^{-\alpha t}\sin\omega t]=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\sin\omega t\cdot e^{-st}dt$

$$\sin\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$$

则有

$$L[e^{-\alpha t}\cdot\sin\omega t]=\int_0^\infty\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}e^{-(s+\alpha)t}dt$$

$$=\frac{1}{2j}\int_0^\infty [e^{-(s+\alpha-j\omega)t}-e^{-(s+\alpha+j\omega)t}]dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s+\alpha-j\omega}-\frac{1}{s+\alpha+j\omega}\right]=\frac{1}{2}\ \frac{(s+\alpha+j\omega)-(s+\alpha-j\omega)}{(s+\alpha-j\omega)(s+\alpha+j\omega)}$$

$$=\frac{1}{2j}\ \frac{2j\omega}{(s+\alpha)^2-(j\omega)^2}=\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

例 2—7 若 $L[Af(t)]=AF(s)$ 成立，试证明

$$L[Atf(t)]=-A\frac{dF(s)}{ds}$$

证明：根据拉氏变换的定义

$$AF(s)=AL[f(t)]=A\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

对上式两边求 s 的微分

$$A\frac{dF(s)}{dt}=A\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=A\int_0^\infty\frac{d}{ds}[e^{-st}f(t)]dt$$

$$=A\int_0^\infty[-te^{-st}f(t)]dt=-AL[tf(t)]$$

故 $$L[Atf(t)] = -A\frac{dF(s)}{ds}$$

例 2—8 求下列指数函数的终值

1) $f_1(t)=e^{-at}$; 2) $f_2(t)=e^{at}$

解 根据拉氏变换的定义有

$$F_1(s)=L[f_1(t)]=L[e^{-at}]=\frac{1}{s+a}$$

$$F_2(s)=L[f_2(t)]=L[e^{at}]=\frac{1}{s-a}$$

故终值为

$$f_1(\infty)=\lim_{t\to\infty}e^{-at}=\lim_{s\to 0}s\cdot F_1(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s+a}=0$$

$$f_2(\infty)=\lim_{t\to\infty}e^{at}=\lim_{s\to 0}sF_2(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s-a}=0$$

显然，$f_2(t)=e^{at}$ 当 $t\to\infty$ 时的终值为0是错误的，因为不符合终值定理的使用条件：$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$ 存在，函数 $sF(s)$ 在 S 平面的右半平面和虚轴上都没有极点。

为了使用方便，将常用函数的拉氏变换列于附录Ⅱ。若附录中查不到时，可按下列三种情况求出 $F(s)$ 的反变换 $f(t)$。

第一种情况：函数 $F(s)$ 具有单极点。

例 2—9 求

$$F(s)=\frac{10(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

的拉氏反变换 $f(t)$。

解 将 $F(s)$ 写成部分分式

$$F(s)=\frac{10(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}=\frac{C_1}{s+2}+\frac{C_2}{s+3}+\frac{C_3}{s+4}$$

求出系数 C_1、C_2、C_3：

$$C_1=\frac{10(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}(s+2)\bigg|_{s=-2}=-5$$

$$C_2=\frac{10(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}(s+3)\bigg|_{s=-3}=+20$$

$$C_3=\frac{10(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}(s+4)\bigg|_{s=-4}=-15$$

故 $$f(t)=L^{-1}[F(s)]=-5L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]+20L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]-15L^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right]$$

$$=-5e^{-2t}+20e^{-3t}-15e^{-4t}$$

∴ $f(t)=-5e^{-2t}+20e^{-3t}-15e^{-4t}$

例 2—10 求

$$F(s)=\frac{6}{s(s+1)(s-2)(s+3)}$$

的拉氏反变换 $f(t)$。

解 将 $F(s)$ 展成部分分式

$$F(s)=\frac{6}{s(s+1)(s-2)(s+3)}=\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{s+1}+\frac{C_3}{s-2}+\frac{C_4}{s+3}$$

求出系数 C_1，C_2，C_3 和 C_4：

$$C_1=\frac{6}{s(s+1)(s-2)(s+3)}\cdot s\Big|_{s=0}=-1$$

$$C_2=\frac{6}{s(s+1)(s-2)(s+3)}(s+1)\Big|_{s=-1}=+1$$

$$C_3=\frac{6}{s(s+1)(s-2)(s+3)}(s-2)\Big|_{s=2}=+\frac{1}{5}$$

$$C_4=\frac{6}{s(s+1)(s-2)(s+3)}(s+3)\Big|_{s=-3}=-\frac{1}{5}$$

故 $$f(t)=L^{-1}[F(s)]=-L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+\frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-\frac{1}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]$$

$$=-1+e^{-t}+\frac{1}{5}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-3t}$$

$$\therefore\quad f(t)=-1+e^{-t}+\frac{1}{5}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-3t}$$

第二种情况：$F(s)$ 具有复数极点。

例 2—11 试求

$$F(s)=\frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}$$

的拉氏反变换 $f(t)$。

解 将 $F(s)$ 展成部分分式

$$F(s)=\frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}=\frac{C_1}{s+1-j}+\frac{C_2}{s+1+j}+\frac{C_3}{s}$$

求出系数 C_1，C_2，C_3：

$$C_1=\frac{s+1}{s(s+1-j)(s+1+j)}(s+1-j)\Big|_{s=-1+j}=-\frac{1}{4}-j\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-j135^0}$$

$$C_2=\overline{C_1}=-\frac{1}{4}+j\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{j135^0}$$

$$C_3=\frac{s+1}{s(s+1-j)(s+1+j)}\,s\Big|_{s=0}=\frac{1}{2}$$

将求得的系数代入原式

$$F(s)=\frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-j135°}\frac{1}{s+1-j}+\frac{\sqrt{2}}{4}e^{j135°}\frac{1}{s+1+j}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}$$

拉氏反变换得

$$f(t)=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-j135°}e^{(-1+j)t}+\frac{\sqrt{2}}{4}e^{j135°}\cdot e^{-(1+j)t}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-t}[e^{jt}e^{-j135°}+e^{-jt}e^{j135°}]+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}\left[\frac{e^{j(t-135°)}+e^{-j(t-135°)}}{2}\right]+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}[\cos(t-135°)]+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}\sin(t-45°)+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad f(t)=\frac{1}{2}[\sqrt{2}e^{-t}\sin(t-45°)+1]$$

根据上边的运算，对于这种情况，求反变换 $f(t)$ 可归纳成一个公式：

$$f(t)=2|C_1|e^{-\sigma t}\cdot\sin(\omega_1 t+\angle C_1+90°)+\frac{1}{2}$$

式中　$|C_1|$——为系数 C_1 的模

σ——为复数极点的实部

ω——为复数极点的虚部

$\angle C_1$——为复数极点的相角

将数值代入归纳出的公式，即

$$f(t)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-t}\sin(t-135°+90°)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-t}\sin(t-45°)+\frac{1}{2}$$

现在证明公式的普遍性。

设已知 $F(s)$ 为

$$F(s)=\frac{A(s)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)}\tag{1}$$

式中 s_1 与 s_2 为 $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$，在 ζ 为 $0<\zeta<1$ 时的共轭复根

$$s_1,\ s_2=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-\sigma\pm j\omega_d$$

式中

$$\begin{cases}\sigma=\zeta\omega_n\\ \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\end{cases}\tag{2}$$

将式(1)展成部分分式