工程数学

矢量分析与场论学习指导书

谢树艺

人民教育出版社

工 程 数 学

矢量分析与场论
学习指导书

谢 树 艺

人 民 教 育 出 版 社

出版前言

本书是配合高等工业学校《工程数学——矢量分析与场论》教材的学习指导书，它说明了该教材的学习程序，对一些概念作了补充解释，还补充了一些例题与习题. 本书文字叙述清楚，可作为高等工业学校的函授与自学教材.

2P5/64

工程数学
矢量分析与场论学习指导书
谢树艺
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 2 字数 45,000
1982 年 5 月第 1 版 1982 年 9 月第 1 次印刷
印数 00,001—32,500
书号 13012·0741 定价 0.29 元

前　言

本书是为函授学生学习高等工科学校试用教材《工程数学——矢量分析与场论》(重庆大学谢树艺编 1978 年版)所写的一本学习指导书．主要是对教材的内容作一些补充解释，同时补充了一些例题和习题以及阶段性测验作业等，书末并附有补充习题的答案．函授学生可在指导教师的具体指导和安排下进行学习．此外，本书也可作为高等工科学校学生在学习上述教材时的参考书．

本书经由 1981 年 12 月在石家庄召开的高等工业学校函授教育工作会议审稿，编者对审稿同志的热忱帮助，表示衷心的感谢．

限于编者水平，并缺乏函授经验，书中不妥和错误之处在所难免，望读者不吝指正．

编　者

1981 年 11 月于重庆大学

目　　录

一、课程的目的与任务

《矢量分析与场论》乃工程数学课程之一，是继高等数学之后的一门数学基础课．通过这门课程的学习，要使学生获得矢量分析和场论的基本知识及其有关的运算技能，同时初步接触到算子的概念与其简单使用法，为尔后学习有关专业课程和进一步扩大数学知识面提供必要的数学基础．

二、一般学习方法

本课程作为一门数学课，其一般学习方法，例如教材的阅读、笔记、作业等等，总的说来和高等数学是相互一致的，故不再一一赘述．这里只简单地提出如下两点：

1．学习本课程，必须具有高等数学课程的全部知识，特别是其中关于曲线积分和曲面积分的概念和计算方法等，对于能顺利地学习本课程来说尤为重要．若在学习本课程的进程中，遇到对所学过的知识忘记或记不清了的时候，就要及时查阅，进行复习，不要轻易放过．

2．在每次作习题之前，应先回顾一下所学过的内容，如有哪些主要概念、定理、方法以及有些什么用以说明问题的典型例子等等．经过一番回顾之后再作习题；待习题作完之后还应小结一下自己的作题经验．

对于作业本，应认真书写，务使逻辑步骤清楚、文字通顺扼要，卷面整洁醒目．这样做，既能避免一些错误，又能培养认真踏实的好习惯．

三、各章学习方法

本课程各章节的学习方法，我们按照教材上各章节的先后顺序，而将其放在下面分别介绍．

第一章 矢量分析

I. 学习步骤

本章的学习步骤，建议按如下的顺序进行:

1. 参照本章“基本要求”学完教材第一章的内容;

2. 阅读本章对教材“内容的补充解释”和“补充例题”;

3. 作出教材上的“习题1”和本章的“补充习题”;

4. 作出本章的“测验作业”.

II. 基本要求

1. 正确理解矢性函数及其极限、连续、导数、微分、不定积分、定积分等概念.

2. 明确矢性函数的图形即其矢端曲线;并能建立一些简单的常见曲线的矢量方程.

3. 掌握并会应用:

(1) 矢性函数的极限运算法则;

(2) 矢性函数的导数、微分、不定积分、定积分等的计算公式.

4. 会将矢性函数的求极限、导数、微分以及不定积分、定积分等运算转化为对其三个(数性)坐标函数的相应运算.

5. 明确导矢的几何意义及其在力学上的应用.

III. 内容的补充解释

1. 这一章矢量分析，不仅是后面场论的基础知识，同时也是研究其他许多学科的有用工具，其中的几个主要概念，如矢性函数

及其极限、连续以及有关微分、积分等概念都和高等数学中研究过的数性函数的相应概念完全类似，可以看成这些概念在矢量分析中的推广. 注意到这一点，这一章的主要内容，就将是不难掌握的.

2. 本章所讨论的，仅限于一个自变量的矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$，但在后面的场论部分，所涉及的矢性函数，则全是二个或三个自变量的多元矢性函数 $\boldsymbol{A}(x,y)$ 或 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$. 对于这种多元矢性函数及其极限、连续、偏导数、全微分等概念，完全可以仿照本章将多元数性函数及其有关的相应概念加以推广而得来，为了简单起见，就未再作专门讨论.

3. 本章的重点是矢性函数的概念及其微分法. 特别要注意导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$的几何意义，即 $\boldsymbol{A}'(t)$是位于 $\boldsymbol{A}(t)$的矢端曲线上的切向矢量，且恒指向 t 增大的一方.

如果将自变量取为矢端曲线的弧长 s，即矢性函数成为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(s)$，则 $\boldsymbol{A}'(s)=\dfrac{d\boldsymbol{A}}{ds}$不仅是一个恒指向 s 增大一方的切向矢量，而且还是单位切向矢量. 这一点在几何与力学上都很重要.

4. 在矢量代数中，当引进了矢量的坐标以后，一个空间矢量就和三个数量(坐标)构成一一对应的关系，而且有关矢量的一些运算，如两矢量的和、差以及数量与矢量的乘积等等都可转化为对其三个数量坐标的相应运算. 同样，对于矢性函数，若采用其坐标表示式，则一个矢性函数，就和三个数性函数(坐标)构成一一对应的关系，而且有关矢性函数的一些运算，如计算极限、求导数、求积分等等亦可转化为对其三个坐标函数的相应运算，参看后面补充例题之例 2.

IV. 补充例题

例 1. 已知小圆半径为 a，大圆半径为 $R=4a$，设大圆固定而

小圆在大圆内相切而滚动. 求小圆上一点M所描曲线的矢量方程.

解: 如图 1-1, 设在开始时点M在点A处, 则有$\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{BA}$, 从

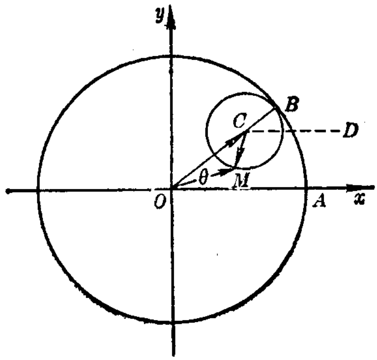

图 1-1

而有$a\cdot\angle BCM=R\cdot\theta$, 因$R=4a$, 故有$\angle BCM=4\theta$. 又作$CD\parallel x$轴, 则

$$\angle DCM=\angle BCM-\angle BCD=4\theta-\theta=3\theta$$

于是有

$$\overrightarrow{OC}=3a\cos\theta\boldsymbol{i}+3a\sin\theta\boldsymbol{j},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM}&=a\cos(-3\theta)\boldsymbol{i}+a\sin(-3\theta)\boldsymbol{j}\\&=a\cos3\theta\boldsymbol{i}-a\sin3\theta\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}\\&=(3a\cos\theta+a\cos3\theta)\boldsymbol{i}+(3a\sin\theta-a\sin3\theta)\boldsymbol{j}\\&=4a\cos^3\theta\boldsymbol{i}+4a\sin^3\theta\boldsymbol{j}\\&=R(\cos^3\theta\boldsymbol{i}+\sin^3\theta\boldsymbol{j}).\end{aligned}$$

此即所求之矢量方程. 由此可以看出, M点所描之曲线为一星形线.

例 2. 已知$\boldsymbol{A}(t)=(2t-t^3)\boldsymbol{i}+3t^2\boldsymbol{j}+(2t+t^3)\boldsymbol{k}$. 计算

(1) $\lim\limits_{t\to 1} \boldsymbol{A}(t)$;　　　　(2) $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)$;

(3) $\int \boldsymbol{A}(t)dt$;　　　　(4) $\int_0^1 \boldsymbol{A}(t)dt$.

解: 由于$\boldsymbol{A}(t)$的坐标表示式为已知，故这里的计算都可转化为对其三个坐标函数进行．依此

(1) $$\lim_{t\to 1}\boldsymbol{A}(t)=\lim_{t\to 1}(2t-t^3)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to 1}3t^2\boldsymbol{j}+\lim_{t\to 1}(2t+t^3)\boldsymbol{k}$$
$$=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

(2) $$\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)=\frac{d}{dt}(2t-t^3)\boldsymbol{i}+\frac{d}{dt}(3t^2)\boldsymbol{j}+\frac{d}{dt}(2t+t^3)\boldsymbol{k}$$
$$=(2-3t^2)\boldsymbol{i}+6t\boldsymbol{j}+(2+3t^2)\boldsymbol{k}.$$

(3) $$\int\boldsymbol{A}(t)dt=\int(2t-t^3)dt\boldsymbol{i}+\int 3t^2dt\boldsymbol{j}+\int(2t+t^3)dt\boldsymbol{k}$$
$$=\left(t^2-\frac{1}{4}t^4+C_1\right)\boldsymbol{i}+(t^3+C_2)\boldsymbol{j}$$
$$+\left(t^2+\frac{1}{4}t^4+C_3\right)\boldsymbol{k}$$
$$=\left(t^2-\frac{1}{4}t^4\right)\boldsymbol{i}+t^3\boldsymbol{j}+\left(t^2+\frac{1}{4}t^4\right)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{C}.$$

(4) $$\int_0^1\boldsymbol{A}(t)dt=\int_0^1(2t-t^3)dt\boldsymbol{i}+\int_0^1 3t^2dt\boldsymbol{j}+\int_0^1(2t+t^3)dt\boldsymbol{k}$$
$$=\frac{3}{4}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\frac{5}{4}\boldsymbol{k}.$$

例 3. 求曲线 $\boldsymbol{r}(\theta)=2\cos\theta\boldsymbol{i}+2\sin\theta\boldsymbol{j}+4\theta\boldsymbol{k}$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$处的切线和法平面方程．

解: $$\boldsymbol{r}'(\theta)=-2\sin\theta\boldsymbol{i}+2\cos\theta\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，有

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}+\pi\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\,\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\,\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

由于 $\boldsymbol{r}'(\theta)$为曲线 $\boldsymbol{r}(\theta)$的切向矢量，故所求之切线方程为

$$\frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z-\pi}{4}.$$

而法平面方程为

$$-\sqrt{2}\,(x-\sqrt{2}\,)+\sqrt{2}\,(y-\sqrt{2}\,)+4(z-\pi)=0,$$

或

$$x-y-2\sqrt{2}\,z+2\sqrt{2}\,\pi=0.$$

例 4. 设 $\quad \boldsymbol{e}(\varphi)=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j},$

$$\boldsymbol{e}_1(\varphi)=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}.$$

试证明

$$\frac{d\boldsymbol{e}(\varphi)}{d\varphi}=\boldsymbol{e}_1(\varphi),\quad \frac{d\boldsymbol{e}_1(\varphi)}{d\varphi}=-\boldsymbol{e}(\varphi),$$

且 $\quad \boldsymbol{e}_1(\varphi)\perp\boldsymbol{e}(\varphi).$

证：
$$\frac{d\boldsymbol{e}(\varphi)}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}(\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j})$$
$$=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}=\boldsymbol{e}_1(\varphi),$$
$$\frac{d\boldsymbol{e}_1(\varphi)}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}(-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j})$$
$$=-\cos\varphi\boldsymbol{i}-\sin\varphi\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{e}(\varphi).$$

显然 $\boldsymbol{e}(\varphi)$和 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)$都是单位矢量，而 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\boldsymbol{e}'(\varphi)$，由于单位矢量与其导矢互相垂直，故有 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)\perp\boldsymbol{e}(\varphi)$，如图 1-2.

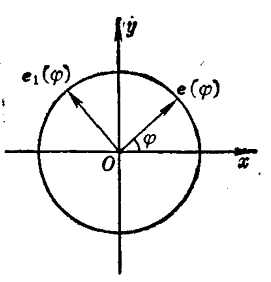

图 1-2

因为 $\boldsymbol{e}(\varphi)$的矢端曲线为一单位圆，故通常又称它为圆函数，与之相伴出现的 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)$，其矢端曲线也是单位圆. 引用圆函数，就可把圆柱螺旋线方程简写为

$$\boldsymbol{r}(\theta)=a\boldsymbol{e}(\varphi)+b\theta\boldsymbol{k}.$$

其上的切向矢量则为

$$\boldsymbol{r}'(\theta)=a\boldsymbol{e}_1(\varphi)+b\boldsymbol{k}.$$

例 5. 计算积分 $\boldsymbol{A}(\varphi)=\int\varphi\boldsymbol{e}(\varphi)d\varphi$.

解: 用分部积分法:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\varphi)&=\varphi[-\boldsymbol{e}_1(\varphi)]+\int\boldsymbol{e}_1(\varphi)d\varphi\\&=-\varphi\boldsymbol{e}_1(\varphi)+\boldsymbol{e}(\varphi)+\boldsymbol{C}.\end{aligned}$$

例 6. 求与 $\boldsymbol{A}=3\cos t\,\boldsymbol{i}+3\sin t\,\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 相垂直的一个单位矢量.

解: 将 $\boldsymbol{A}$ 写成 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{e}(t)+4\boldsymbol{k}$, 则与其同方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{5}[3\boldsymbol{e}(t)+4\boldsymbol{k}],$$

其导矢

$$\boldsymbol{\alpha}'=\frac{3}{5}\boldsymbol{e}_1(t).$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 为单位矢量, 故与其导矢 $\boldsymbol{\alpha}'$ 相互垂直, 即有

$$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\alpha}',$$

而 $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{A}$, 又由前一式可以看出 $\boldsymbol{\alpha}'\parallel\boldsymbol{e}_1(t)$. 所以有

$$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{e}_1(t),$$

可见 $\boldsymbol{e}_1(t)$ 即为与 $\boldsymbol{A}$ 相垂直的一个单位矢量.

V. 补充习题

1. 定长矢量与其导矢之间有何关系?

2. 若 s 为 $\boldsymbol{r}$ 的矢端曲线弧长, 则 $\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ 有什么几何特点?

3. 证明恒等式

$$\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)=\boldsymbol{e}(\varphi)\cos\alpha+\boldsymbol{e}_1(\varphi)\sin\alpha.$$

4. 用前题结果证明恒等式:

$$\boldsymbol{e}(\varphi)\cos\alpha=\frac{1}{2}[\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)+\boldsymbol{e}(\varphi-\alpha)],$$

$$\boldsymbol{e}_1(\varphi)\sin\alpha=\frac{1}{2}[\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)-\boldsymbol{e}(\varphi-\alpha)].$$

5. 计算 $\boldsymbol{A}(\varphi)=\int e^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\,d\varphi$.

6. 证明 $\int\cos\varphi\ \boldsymbol{e}(\varphi)\,d\varphi=-\frac{1}{4}\boldsymbol{e}_1(2\varphi)+\frac{1}{2}\varphi\boldsymbol{i}+\boldsymbol{c}$.

7. 广义圆函数的定义如下:

$$\boldsymbol{E}(\varphi)=\cos\varphi\boldsymbol{a}+\sin\varphi\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{E}_1(\varphi)=-\sin\varphi\boldsymbol{a}+\cos\varphi\boldsymbol{b}.$$

其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为任意常矢.

(1) 证明 $\dfrac{d\boldsymbol{E}(\varphi)}{d\varphi}=\boldsymbol{E}_1(\varphi)$, $\dfrac{d\boldsymbol{E}_1(\varphi)}{d\varphi}=-\boldsymbol{E}(\varphi)$.

(2) 计算 $\boldsymbol{E}(\varphi)\cdot\dfrac{d\boldsymbol{E}(\varphi)}{d\varphi}$.

8. 证明 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}t$ 的图形是一条直线, 其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为常矢且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

[提示: 可通过坐标找出图形的参数方程来说明.]

9. 证明 $\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{e}(\alpha)+b\sin t\boldsymbol{e}_1(\alpha)+2\boldsymbol{k}$ 的图形为一椭圆, 其中 a, b, α 为常数, 且 a, b 均不为零.

[提示: 旋转 x 轴和 y 轴使 x 轴沿 $\boldsymbol{e}(\alpha)$ 方向, y 轴沿 $\boldsymbol{e}_1(\alpha)$ 方向.]

10. 证明 $\boldsymbol{E}(\varphi)\cdot\left[\dfrac{d\boldsymbol{E}(\varphi)}{d\varphi}\times\dfrac{d^2\boldsymbol{E}(\varphi)}{d\varphi^2}\right]=0$.

11. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 均为 t 的可微函数, 计算

(1) $\dfrac{d}{dt}\left[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\right]$;

(2) $\dfrac{d}{dt}\left[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\right]$.

12. 求下列函数 $\boldsymbol{X}(t)$, 其中 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 为常矢.

(1) $\dfrac{d\boldsymbol{X}}{dt}=\boldsymbol{P}t^2+\boldsymbol{Q}e^{2t}$;

(2) $\dfrac{d^2\boldsymbol{X}}{dt^2}=\boldsymbol{P}\cos t+\boldsymbol{Q}\sin t$.

13. 一质点沿曲线 $\boldsymbol{r}=r\cos\varphi\boldsymbol{i}+r\sin\varphi\boldsymbol{j}$ 运动, 其中 r, φ 均为时间 t 的

函数.

(1) 求速度 $\boldsymbol{v}$ 在矢径方向及其垂直方向上的投影 v_r 和 v_φ;

(2) 求加速度 $\boldsymbol{w}$ 在同样方向上的投影 w_r 和 w_φ.

[提示: 使用圆函数 $\boldsymbol{e}(\varphi)$, 则 $\boldsymbol{e}(\varphi)$ 及 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)$ 之方向即为矢径方向及与之垂直的方向.]

VI 测验作业

1. 证明 $\boldsymbol{e}(\varphi)\times\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\boldsymbol{k}$.

2. 证明 $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{e}(\alpha)+(t^2+1)\boldsymbol{e}_1(\alpha)$ 的图形为一抛物线, (α 为常数).

3. 设 $\boldsymbol{A}(t)$ 三阶可导, 证明恒等式

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{A}}{dt^2}\right)\right]=\left(\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)\cdot\frac{d^3\boldsymbol{A}}{dt^3}.$$

4. 求曲线 $\boldsymbol{r}(t)=e^t\cos t\,\boldsymbol{i}+e^t\sin t\,\boldsymbol{j}+e^t\boldsymbol{k}$ 在 $t=0$ 处的切线和法平面方程.

5. 已知

$$\frac{d^2\boldsymbol{X}}{dt^2}=(\boldsymbol{P}\sin t-\boldsymbol{Q}\cos t)\times\boldsymbol{R},$$

其中 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ 均为常矢, 求函数 $\boldsymbol{X}(t)$.

6. 设 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+2\sqrt{t}\,\boldsymbol{j}+2\sqrt{t}\,\boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

问 t 为何值时 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|$ 为最小?

[提示: 求出使 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})^2$ 为最小的 t 值即可.]

7. 一质点以常角速度在圆周 $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{e}(\varphi)$ 上运动, 证明其加速度为

$$\boldsymbol{w}=-\frac{v^2}{a^2}\boldsymbol{r},$$

其中 v 为速度 $\boldsymbol{v}$ 的模.

第二章　场　　论

I. 学习步骤

本章的学习步骤，建议按如下的顺序进行:

1. 参照本章“基本要求”1—2，学完教材第二章第一节的内容;

2. 阅读本章对教材“内容的补充解释”1—2，和“补充例题”的例1—例2;

3. 作出教材上的“习题2”和本章的“补充习题”1—4;

4. 参照本章“基本要求”3—4，学完教材第二章第二节的内容;

5. 阅读本章对教材“内容的补充解释”3—4，和“补充例题”的例3—例8;

6. 作出教材上的“习题3”和本章的“补充习题”5—7;

7. 参照本章“基本要求”5—6，学完教材第二章第三节的内容;

8. 阅读本章对教材“内容的补充解释”5—6，和“补充例题”的例9—例12;

9. 作出教材上的“习题4”和本章的“补充习题”8—13;

10. 参照本章“基本要求”7—8，学完教材第二章第四节的内容;

11. 阅读本章对教材“内容的补充解释”7—8，和“补充例题”的例13—例15;

12. 作出教材上的“习题5”和本章的“补充习题”14—18;

13. 参照本章“基本要求”9—10，学完教材第二章第五节的

内容；

14．阅读本章对教材“内容的补充解释”9—11，和“补充例题”的例16—例19；

15．作出教材上的“习题6”和本章的“补充习题”19—24；

16．作出本章的“测验作业”。

Ⅱ．基本要求

1．明确数量场和矢量场的概念及二者的数学表示法．

2．了解数量场的等值面、矢量场的矢量线的概念及其作用；并掌握求等值面和矢量线的方法．

3．正确理解方向导数和梯度的概念；并熟悉梯度的重要性质．

4．能熟练计算数量场的方向导数和梯度；并会运用梯度运算的基本公式．

5．正确理解通量和散度的概念；并了解其物理意义．

6．能熟练计算矢量场的通量和散度；并会运用散度运算的基本公式．

7．正确理解环量、环量面密度和旋度的概念；并了解其物理意义．

8．能熟练计算矢量场的环量、环量面密度和旋度；并会运用旋度运算的基本公式．

9．明确有势场、管形场、调和场的概念．

10．能熟练计算有势场中的势函数及平面调和场中的一对共轭调和函数．

Ⅲ．内容的补充解释

1．这一章是本课程的主要内容，按其特点，可将其划分为三