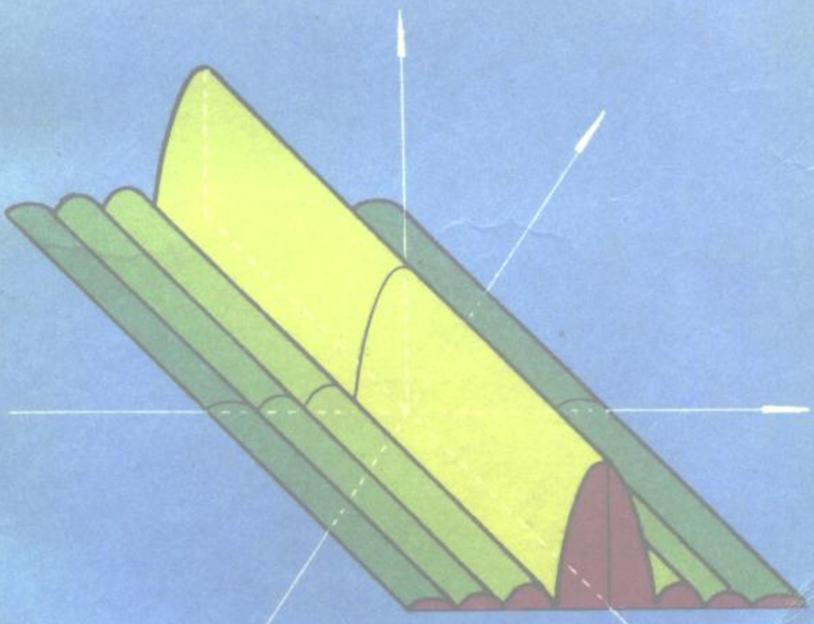
程乾生 著

信号数字处理的数学原理

（第二版）



石油工业出版社

信号数字处理的数学原理

（第二版）

程乾生　著

石 油 工 业 出 版 社

(京)新登字 082 号

内 容 提 要

本书是作者集20多年教学与研究工作的实践，并在第一版的基础上进行了重要的修订和补充而成的。主要讨论信号数字处理的基本概念，原理和方法，内容包括：傅氏级数与离散谱，冲激函数——δ函数，抽样理论，有限离散傅氏变换和哈特利变换及快速算法，镶边滤波器和最佳时窗函数，相关分析，奇异值分析，希尔伯特变换与实信号的复数表示、包络、瞬时相位和瞬时频率，离散物理可实现信号的性质和希尔伯特变换，最小相位信号、最小延迟信号及其柯氏谱，离散信号的对数谱序列（倒谱）和n级同态滤波系统，最小平方滤波，最小广义l_p模滤波，峰度和最大标准累量反褶积，递归滤波和广义帕第有理逼近，二维信号傅氏变换、Z变换、滤波，二维物理可实现信号，$\tau-p$变换，拉东变换，元波变换，信号的插值、平滑和加工。在每章后面附有问题，既作为练习，又作为正文的一种补充。

本书对从事地球物理、生物医学、自动控制、通信、雷达、声学、语音、振动等信号数字处理的科技人员及有关院校师生是一本有价值的参考书。

信号数字处理的
数学原理
（第二版）
程乾生 著

*

石油工业出版社出版
（北京安定门外安华里二区一号楼）
北京地质印刷厂排版
北京北苑印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

*

850×1168毫米 32开本 $25^{7}/_{8}$印张 685千字 印1—2,000
1993年11月北京第2版 1993年11月北京第1次印刷
ISBN 7-5021-0942-0/TE·881
定价： 22.00 元

再 版 前 言

从本书第一版于 1979 年发行到现在，已经有 13 年了。这期间，作为信息科学的一个重要分支——信号处理，在科学技术的许多领域得到了广泛的应用和深入的发展。因此，对原书进行修订和扩充是势在必行的了。

本书主要讨论信号数字处理的基本概念、原理和方法。在写法上，力求通俗易懂、深入浅出。作者相信，具有微积分和线性代数基本知识的读者，可以了解本书的大部分内容。有些章节需要的数学知识较深些，读者在初次阅读时，只要求了解结论就行了，当需要进一步钻研时，再仔细阅读，以便了解有关的数学方法和解决问题的思路。在内容上，对原书进行了修订和扩充，以适应现在的需要。为使篇幅不至过大，第二版仍然讨论的是确定性信号数字处理的数学原理。这些内容对随机信号数字处理来说也是基本的。

全书共分十三章。第一、二章讨论傅氏级数和傅氏积分，着重建立信号的频谱概念。由于δ函数在信号处理中的重要性，第二版增加了这方面的内容。第三章系统地讨论了各种情况下的抽样问题，建立了由连续信号转化为离散信号的理论基础。第四章讨论滤波和褶积的概念，离散信号的 Z 变换，滤波器的串联、并联和反馈。在这一章，还详细地讨论了连续信号的希尔伯特变换及有关的包络、瞬时相位和瞬时频率问题。第五章讨论有限离散傅氏变换和快速傅氏变换，以及有关的循环褶积问题。此外，还讨论了有限离散哈特利变换，研究了广义中值函数与余弦变换、正弦变换、哈特利变换、傅里叶变换等变换快速算法之间的关系。第六章讨论一维滤波和窗函数。比较详细地讨论了镶边方法、最大振幅比时窗函数和最大能量比时窗函数。第七章讨论相关的

概念和性质，以及有关算法。第八章着重从理论上讨论离散物理可实现信号（单边信号）的性质。对最小相位信号和最小延迟信号的性质，给出了完整而富有特色的分析。对离散物理可实现信号，讨论了褶积分解和希尔伯特变换，利用褶积型矩阵讨论了纯相位序列的特征和由振幅谱重构物理可实现信号的问题。在这一章的最后，讨论了信号的相位谱，最小相位信号和柯氏谱，对数谱序列（即倒谱），提出了 n 级同态滤波系统的概念。第九章讨论最小平方滤波及其解法，s 阶偶项信号和最小平方偶项褶积反演方法，广义 l_p 模和最小广义 l_p 模滤波，峰度和最大标准累量反褶积。第十章比较详细地讨论奇异值分解（SVD）及其与最小平方问题的关系。第十一章讨论递归滤波的概念、性质和设计，以及和递归滤波密切相关的广义帕第有理逼近。第十二章讨论信号的插值、平滑和加工。第十三章讨论二维信号傅氏变换、Z 变换、滤波，二维物理可实现信号的性质。最后，在傅氏变换的基础上，讨论了 $\tau—p$ 变换、拉东变换和元波变换。

信号数字处理的数学原理的内容十分丰富而且在不断发展和充实。作有数学原理，作为基础，它几乎可应用到科学技术的各个领域中去，反过来，在各个领域中的应用与发展又推动了信号数字处理数学原理的发展。声学、语音与信号处理的密切关系已为大家所熟悉。医学上计算机层析装置（CT）研制的成功极大地推动了层析数学原理和技术的发展（参见第十三章第六节）。对于地球物理勘探与信号处理的关系，许多人还不甚了解或还没有引起足够的重视。事实上，地震信号处理的研究对信号处理的数学原理至少作出了三大贡献。第一，最小能量延迟信号（简称最小延迟信号）的概念是由从事地震信号处理的学者提出来的，这个概念对信号分析起着重要作用（对于最小延迟信号性质完整、严格而简单的证明是作者于 1974 年给出的，见第八章第四节）。第二，最大熵谱方法是研究地震记录中的反射系数时提出的，熵谱方法现已成为谱估计的一个主要方法。第三，元波变换是研究作为时变信号的地震记录时提出的，现在元波变换已成为信号处

理的热门研究课题（见第十三章第七节）。以上所举的例子不仅是为了说明地震数据处理与信号处理的关系，还想要说明科学研究中的“墙内开花墙外香”现象。最大熵方法和元波变换方法并没有很好地解决方法提出者们原先所要解决的问题。由于地震子波和反射系数的复杂性，最大熵方法求取反射系数并不比常规方法好多少。由于地震道频率的缓变特点，元波变换的效果并不比常规的窗函数方法更显著。但是，最大熵方法和元波变换方法在其它的信号处理问题中获得了应用并取得巨大的成功。“墙内开花墙外香”现象应引起我们重视，一方面要大胆地从实际问题中抽象出数学问题、提出解决问题的方法和理论，一方面要宏观地“跨学科”、“跨领域”地评价理论的意义，只有这样才能更好地推动应用科学基础的发展。

本书是作者在教学工作和研究工作的基础上写成的。由于水平有限，敬请读者批评指正。

最后，作者要诚挚地感谢石油工业出版社的孔秀兰同志，不仅因为她的约稿和督促才有了过去的第一版和现在的第二版，还因为她为编辑此书付出了巨大心血。

程乾生

1992年7月

于北京大学承泽园

目　录

第一章　傅氏级数与离散频谱

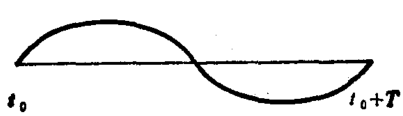
一个复杂的连续信号，一般来说，总可以分解为许多简单的正弦信号的叠加。这样，我们就可以进一步了解复杂的连续信号的性质，并对它进行分析和处理。

把有限区间上的复杂波分解为简谐波的叠加，这在数学上称之为傅氏级数，或傅里叶级数。在这一章，我们着重从工程应用角度讨论这一问题。

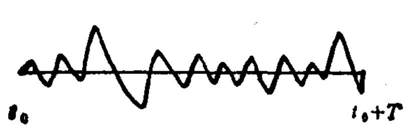
第一节　把有限区间上的复杂波分解为简谐波的叠加——傅氏级数

1．问题的提出

在工程信号的记录中，我们取其一段，即在有限时间区间〔t_0, t_0+T〕上考察信号，见图 1-1(a)，它往往是一种复杂的信号。



(*a*) 有限区间上的复杂波



(*b*) 正弦波 $A\sin 2\pi f_0(t-t_0)$　$f_0=\dfrac{1}{T}$

图 1-1　复杂波与简单波

在物理中，大家都知道，最简单的振动波是简谐波，把这个振动波记录下来，所得到的信号可以用正弦函数表示出来，即为正弦波

$$A\sin(2\pi ft+\varphi)$$

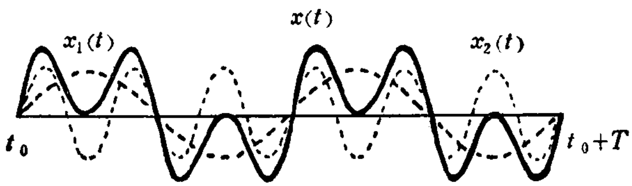
式中 A——振幅；

φ——初相位；

f——频率；$\frac{1}{f}$为谐波的周期。

对长度为T的时间区间而言，最简单的频率为 $f_0=\frac{1}{T}$，因为这时正弦波的周期正好就是T，见图 1-1(b)。再稍微简单一些的频率就是 $f_n=nf_0$，这时正弦波的周期为$\frac{1}{f_n}=\frac{T}{n}$。因此，对长度为$T$的时间区间而言，我们称$f_0=\frac{1}{T}$为基频，$A\sin(2\pi f_0t+\varphi)$为基波，$A\sin(2\pi nf_0t+\varphi)$为$n$次谐波。

当几个这样的谐波叠加在一起的时候，得到的波就比较复杂了，见图 1-2。



$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

图 1-2 两个谐波的叠加

我们的问题是：任一个复杂波能否分解成简谐波的叠加呢？一般地说是可以的，下面进行讨论。

2. 把有限区间上的复杂波分解为简谐波的叠加

复杂波与简谐波是有本质区别的，但它们又可以相互转化：当许多振幅、相位，频率都不同的简谐波叠加在一起的时候，可

以得到一个复杂波；反过来，在一般情况下，一个复杂波又可以分解为许多简谐波的叠加。这就是说，复杂波与简谐波是矛盾的对立统一。

在区间$[t_0, t_0+T]$上，对于一个不是十分复杂的波$x(t)$，可以分解为有限多个简谐波的叠加

$$x(t)=A_0+\sum_{n=1}^{N}A_n\sin(2\pi nf_0t+\varphi_n)$$

上式右端实际上是一个常量加上N个谐波。

但是，对一个十分复杂的波$x(t)$而言，有限个谐波的叠加是得不到它的，只有当N增长到无限时(记为$N\to+\infty$)，也即当无限个谐波叠加在一起时(数学上表示为$\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}A_n\sin(2\pi nf_0t+\varphi_n)$，把它记作$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}A_n\sin(2\pi nf_0t+\varphi_n)$，才能得到一个复杂波$x(t)$，即

$$x(t)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin(2\pi nf_0t+\varphi_n) \qquad (1\text{-}1\text{-}1)$$

其中$f_0=\dfrac{1}{T}$为基频，A_0为$x(t)$的直流分量或常数分量，$A_n\sin(2\pi nf_0t+\varphi_n)$为$x(t)$的$n$次谐波，特别地，把1次谐波称为基波。

关系式(1-1-1)还可改换成别的形式。把n次谐波变为

$$A_n\sin(2\pi nf_0t+\varphi_n)$$
$$=A_n\cos\varphi_n\sin 2\pi nf_0t+A_n\sin\varphi_n\cos 2\pi nf_0t$$

令

$$a_n=A_n\cos\varphi_n,\ b_n=A_n\sin\varphi_n,\ b_0=A_0 \qquad (1\text{-}1\text{-}2)$$

则(1-1-1)式变为

$$x(t)=b_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\sin 2\pi nf_0t+b_n\cos 2\pi nf_0t) \qquad (1\text{-}1\text{-}3)$$

(1-1-1) 式或 (1-1-3)式都称为$x(t)$的傅氏级数展开式，(1-1-1) 式或(1-1-3) 式的右端称为$x(t)$的傅氏级数。

但是在工程中使用更方便的是复数形式的傅氏级数，下面进行讨论。

第二节　复数形式的傅氏级数　离散频谱

1. 关于复数的说明

我们先对复数作一简要说明，这对以后的讨论是有用的。

1）关于复数的表示与运算

从字面上看，"复"就是"重复"的意思。复数z就是用两个实数x和y表示的一个数，记为

$$z=x+iy$$

其中$i=\sqrt{-1}$，x称为复数z的实部，记为Rez；y称为复数z的虚部，记为Imz。

复数z还可表示为

$$z=re^{i\varphi}$$

其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$，称为复数z的模，记为$|z|$；φ(ox轴与oz的夹角）称为复数z的幅角（见图 1-3)。当φ取值在$(-\pi,\pi)$内时，称为相位主值，记为Arg$Z$。一般情况下，记为arg$Z$。

在复数的运算中，下面的尤拉公式

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

起着重要作用。如果把上式中的φ取为$-\varphi$，则有$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$。把上面两式相加或相减便得

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})\\ \sin\varphi&=\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}2\text{-}1)$$

最后介绍一下复数的共轭运算。复数z的共轭复数$\bar{z}$为

$$\bar{z}=x-iy$$

z与$\bar{z}$相乘便得模$|z|$的平方，即

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2$$

两个复数 z_1、z_2 相乘，其共轭复数 $\overline{z_1\cdot z_2}$ 等于分别的共轭复数相乘，即

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$$

由尤拉公式可得到

$$\overline{e^{i\varphi}}=e^{-i\varphi}$$

2）关于复函数的运算

设 $u(t)$、$v(t)$ 为两个普通的取实值的函数，由它们可构成一个复函数

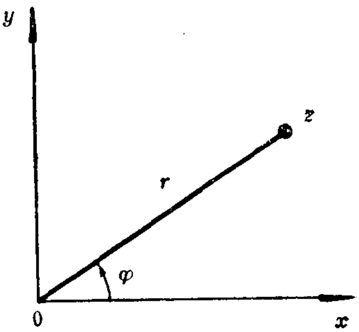


图 1-3 复数 z 的表示

$$g(t)=u(t)+iv(t)$$

复函数 $g(t)$ 的共轭函数为

$$\overline{g(t)}=u(t)-iv(t)$$

复函数 $g(t)$ 的微商为

$$\frac{dg(t)}{dt}=\frac{du(t)}{dt}+i\frac{dv(t)}{dt}$$

复函数 $g(t)$ 的积分为

$$\int_{t_1}^{t_2}g(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}u(t)\,dt+i\int_{t_1}^{t_2}v(t)\,dt$$

复函数 $g(t)$ 的积分 $\int_{t_1}^{t_2}g(t)\,dt$ 是一个复数，它的共轭复数为

$$\overline{\int_{t_1}^{t_2}g(t)\,dt}=\int_{t_1}^{t_2}\overline{g(t)}\,dt$$

例：计算 $\int_{t_0}^{t_0+T}e^{i2\pi n\frac{1}{T}t}dt$，$n$ 为整数。

因为

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{i2\pi n\frac{1}{T}t}dt=\int_{t_0}^{t_0+T}\cos 2\pi n\frac{1}{T}t\,dt+$$

$$+i\int_{t_0}^{t_0+T}\sin 2\pi n\frac{1}{T}t\,dt$$

分别计算上式右边的两个定积分，可得到

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{i2\pi n\frac{1}{T}t}dt=\begin{cases}T & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases} \tag{1-2-2}$$

上面的积分是通过分别计算实部与虚部两个积分得到的，但是也可以直接进行积分，即把 i 当成一个普通的常数，让它参与积分运算中的变量替换，例如

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{i2\pi n\frac{1}{T}t}dt \text{（当}n\neq 0\text{时）}$$

$$=\frac{1}{i2\pi\frac{n}{T}}\int_{i2\pi\frac{n}{T}t_0}^{i2\pi\frac{n}{T}(t_0+T)} e^{u}du\left(\text{令}u=i2\pi\frac{n}{T}t\right)$$

$$=\frac{1}{i2\pi\frac{n}{T}}e^{i2\pi\frac{n}{T}t_0}(e^{i2\pi\frac{n}{T}\cdot T}-1)=0$$

3）关于虚数 $i=\sqrt{-1}$ 的说明

在 16 世纪中叶，人们在解一元二次方程 $x^2+1=0$ 时，就遇到了负数开平方 $\sqrt{-1}$ 的问题。然而，在实数范围内，负数是不能开平方的，即在实数范围内是找不到方程 $x^2+1=0$ 的根的。人们就把 $\sqrt{-1}$ 称为虚数。由于在当时的生产实践中还没有发现它的用途，人们一直无法理解它。后来，随着流体力学等科学技术的发展，提出了关于实数概念进一步扩充的问题，因而，关于虚数的理论才逐渐发展起来，成为解决自然科学问题的一个重要的