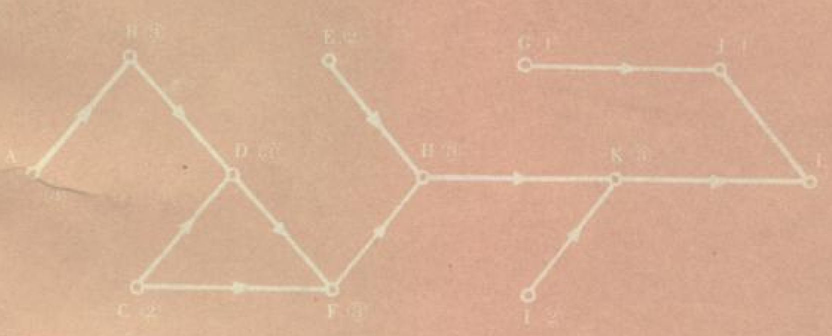
动态规划原理

[美] 罗伯特·E·拉森　约翰·L·卡斯梯 著
陈伟基　王永县　杨家本 译　郑维敏 校



PRINCIPLESOF DYNAMIC PROGRAMMING

清华大学出版社

动态规划原理

——基本分析及计算方法

[美] 罗伯特·E·拉森
约翰·L·卡斯梯 著

陈伟基 王永县 杨家本 译

郑维敏 校

清华大学出版社

内 容 简 介

本书主要论述动态规划理论、计算方法及其应用。第一章描述多阶段过程的基本特性，第二章提出动态规划的基本理论，第三章讨论动态规划的计算方法。第四章介绍无限阶段过程、前向动态规划等问题。

本书概念清楚、深入浅出、注重实用，备有许多应用实例，可做为自动化、系统工程、经济管理等方面高等院校教师、研究生、高年级学主以及科技工作人员的教科书或参考书。

动 态 规 划 原 理

罗伯特·E·拉森等著

★

清华大学出版社出版

北京　清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

★

开本：787×1092 1/32　印张：9 1/2　字数：221 千字

1984 年 1 月第一版　　1984 年 1 月第一次印刷

印数：1～25000

统一书号：15235·91　定价：1.20 元

序　言

我们生活在一个日益复杂、千变万化的时代。在现代生活的各个领域中，社会、经济以及自然科学的压力已产生了根据被控制过程的有限信息从而作出高水平的决策的需求。根据上述固有的不确定性，决策方法必须保持灵活性并具有适应瞬时变化需要的能力。换句话说，复杂系统的管理是一个在仅知其部分特点的环境范围内实现多阶段决策的过程。

几年以前，理查德、贝尔曼（Richard Bellman）便开始系统地和精确地研究这种决策。这个首创工作是根据十分重要的反馈系统理论的概念，即决策规则应当以所研究的过程现有的（也许是过去的）状态作为依据。生活在具有高度文化知识的现代社会，这些基本概念似乎是显而易见的；而在当时，它却代表着一种重要概念上的进展，这种进展使决策者实现用不确定的方法处理以时间展开的过程。贝尔曼和他的同事继续研究名为“动态规划”的反馈决策概念，并把这些概念应用到经济、工程、运筹学和数学范畴内的各种问题之中。由于当时（大约 1960 年）受计算技术的限制，使得多数实际所关心的问题的计算难于处理，因此可以认为这一首创工作的大部份是领先于时代的。

近些年来，由于精确的计算方法的发展以及计算机技术急剧的进步，人们已经把适合于动态规划论述问题的范围扩展到能够有把握地着手解决实际有意义的问题。诸如能源、环境、工业生产力和经济等领域的危机已迫使决策者更加认真地

去研究它们的方案，这些研究已导致人们继续对能为复杂过程提供最优策略的方法论感兴趣。因此，现在比以往任何时候都更加需要动态规划。

上述理由已很清楚地表明：现在是最适于重新审查动态规划作为多种领域中解决有意义问题的工具的时候。为了满足上述需要，并按照大学生能够接受的形式，我们编写了这本叙述动态规划基本分析和计算方法的书。本书为两册之中的上册。下册将以上册的材料为基础来研究先进的题目及其应用。

本书（上册）专门研究“理论和基本计算方法”。读者需要先修的课程为一个学期的普通微分方程和初等线性代数。由于本书要求的基础课程极少，所以甚至大学二年级学生也能够接受。我们把一些已经解决的问题也收集在本书中用来说明书中的每一个关键，这些问题对于比较复杂的模型以及加深对基本动态规划方法的理解是很有用的。另外，每章的后面还备有一组补充习题以说明前面几节未涉及的理论。

本书共分四章。第一章描述多阶段决策过程的基本特性。本章的开始先复习微分方程的概念，另外还附加本书所需要的向量和矩阵符号以及逐步的给出多阶段决策过程的定义。

第二章提出动态规划的基本理论，特别是从基本原理推导出动态规划的基本迭代方程并详细地讨论迭代方程的重要性。

第三章讨论动态规划的计算方法。在这一章中我们将详细地描述这个方法全部的步骤以及给出实现这些方法的计算机程序流程图，并用例子详细地弄清这些步骤，以及检查计算方法的计算结论。

第四章的内容是研究前面各章中基本方法的各种推广。本章讨论没有明显阶段变量的问题和研究它们的求解方法。章节的最后还列有许多补充的题目，例如无限阶段过程、前向动态规

划、改进的计算方法等。

下册将以上册适用于动态规划全部观点的基本材料为基础。它的内容包括有：把上册的基本方法扩展到一些具有不确定性的问题并指明一些应用领域，研究随机和自适应的方法及描述过去二十年来已产生的基本计算方法的许多改进。此外，下册还包括有：把动态规划扩展到连续时间的系统，具有二次型准则线性系统的一些基本分析结果以及应用到实际大规模复杂问题的一些实例，等等。

作者认为，这两册书对动态规划领域内的全部主要结果均进行了综合论述。汇集上述材料并用许多例子进行说明的目的是：希望动态规划能够引起各个领域的许多研究工作者的注意，以便使他们确信在这一类解决问题的方法中动态规划占有中心的位置。

在承担本书时，承蒙同事们和学生们的帮助。作者之一罗伯特·E·拉森（Robert E· Larson）前几年在斯坦福大学的一门课程中，以某些方式试验了本书的大部分材料。在这里，对为这门课程甘心情愿作试验的学生给予感谢。同样，我们感谢 S·Yakowitz 教授在亚利桑那(Arizona)州立大学讲授类似的课程时所收集的意见。最后，在多年的写书过程中里查德·贝尔曼教授给予我们经常的鼓励和帮助，为此表示谢意。

罗伯特·E·拉　森
约　翰·L·卡斯梯

目　　录

第一章　系统、过程和决策

§ 1.1　引　言

动态规划的理论可以认为是多阶段决策过程最优化的基本理论。为了给后面的章节打下基础，我们先对多阶段决策的概念加以准确的说明。通过这些基本问题的讨论可以看出，动态规划提供了一种数学结构，它适用于考虑许多经典问题的普遍化，其中包括工程、物理、生物、经济和运筹学领域的一些重要问题。这些我们将在后面的章节中再详细地加以说明。

§ 1.2　向量——矩阵符号

本书比较重要的内容是分析用几个联立微分方程式描述的一些系统。在研究这些系统时，利用向量——矩阵符号是很方便的。现在简要地总结一些定义和结论。

人们把 n 个数的列称为 n 维向量。元素 x_1, x_2, $\cdots x_n$, 称为分量。

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

当两个向量 x 和 y 相应的分量全相等时，这两个向量被认是相等的。

我们把两个 n 维向量的加法定义为按分量逐个相加所组成的向量，即

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

标量 α（实数或复数）乘以向量的积定义为下面的关系式。

$$\alpha\mathbf{x}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

例 1.1 已知向量 **x** 和 **y** 分别为

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

求：

(a) $\mathbf{x}+\mathbf{y}$

(b) $2\mathbf{x}$

(c) $2\mathbf{x}+3\mathbf{y}$

解：

(a)

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$2\mathbf{x} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

向量的转置就是简单地把列阵列的量写成行阵列的量，它用上标 T 来表示。如前所述向量 $\mathbf{x}$ 的转置为：

$$\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

向量转置的转置就是原来的向量。

两个向量标量的乘积（或点积）定义为两个向量相应分量乘积的总和。换句话说，若 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 是两个 n 维向量，那么标量的乘积 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 用以下的形式表示：

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

从这个定义可以得出：$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$。

例 1.2 已知例 1.1 给出的向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 以及向量 $\mathbf{z}$

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

求：

(a) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

(b) (y, z)

解：

(a) $(x, y) = 1\cdot 2 + 0\cdot 3 + (-1)\cdot 0 = 2$

(b) $(y, z) = 2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$

有 m 行和 n 列数的矩形阵列称为 $m\times n$ 矩阵。如果 $m=n$，则 A 称为方阵。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}; \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \cdots m, \\ j = 1, 2, \cdots n \end{matrix}$$

两个 $m\times n$ 矩阵的相加定义为：

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}); \quad i = 1, 2, \cdots m, \quad j = 1, 2, \cdots n$$

标量与矩阵的乘积定义为：

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}); \quad i = 1, 2, \cdots m, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$m\times n$ 矩阵的转置用上标 T 来表示，它是一个 $n\times m$ 阵列，该阵列的第 i 行、第 j 列的元素是由原矩阵的第 j 行、第 i 列的元素转换来的。如果 $A = \{a_{ij}\}$，则 $A^T = \{a_{ji}\}$。前面提到向量转置的定义恰好是矩阵转置方程的一种特殊情况。

$m\times n$ 矩阵 A 乘以 n 维向量 x 的乘积定义为 m 个线性代数方程组。

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

可以写作：

$$Ax = b$$

因此，Ax 定义为这样的向量，该向量的第 i 个分量为：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,\quad i = 1, 2, \cdots, m$$

注意，如果 y 是一个 n 维行向量，即 $1\times n$ 矩阵，那么 yx* 等于

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

它是一个标量。还应当注意，如果 x 和 y 是两个列向量，那么 x^Ty 和 y^Tx 的乘积彼此相等，并等于前面已定义过的标量的乘积（x，y）。若把矩阵 Ax 看作 x 的线性变换并逐位地分析线性变换的结果，据此可以定义两个矩阵的乘积。如果 A 是一个 $m\times r$ 的矩阵和 B 是 $r\times n$ 的矩阵，那么，我们定义矩阵的乘积 AB 是一个 $m\times n$ 的矩阵，该矩阵的分量（i，j）是：

$$\{AB\}_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj},\quad i = 1, 2, \cdots m;\quad j = 1, 2, \cdots n$$

这个乘积仅适用于第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数的两个矩阵相乘。

例 1.3　已知向量

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

译注：* 原书 y^Tx 应改为 yx

矩阵
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&3\\-4&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

和
$$B=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}$$

求：

(a) AB

(b) $B\mathbf{x}$

(c) $A(B\mathbf{x})$

(d) $(AB)\mathbf{x}$

解：

(a)
$$AB=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&3\\-4&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\5&3&-1\\-9&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

(b)
$$B\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$$

(c)

$$A(B\mathbf{x})=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&3\\-4&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\\-8\\0\end{pmatrix}$$

(d)

$$(AB)\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2&0&1\\5&3&-1\\-9&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\6\\-8\\0\end{pmatrix}$$

例 1.4 已知 A 和 B（见例 1.3）和矩阵 C

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

求：

(a) BA

(b) B^TA^T

(c) $(B^TA^T)^T$

(d) BA^T

(e) AC

(f) CB

解：

(a) 因为 B 是 3×3 矩阵、A 是 4×3 矩阵，它们的乘积没有定义。

(b)

$$B^TA^T=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&1\\1&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-4&0\\0&-1&1&0\\0&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&5&-9&0\\0&3&2&1\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}$$

(c)

$$(B^TA^T)^T=\begin{pmatrix}2&0&1\\5&3&-1\\-9&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

从例 1.3(a) 的解可以得出 $AB=(B^TA^T)^T$。我们在 §1.7 的例 1.4(a) 中再来证明上述表达式一般地适用于两个任意的矩阵 A 和 B。

(b)

$$BA^T=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-4&0\\0&-1&1&0\\0&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&7&-6&1\\-1&7&10&3\\0&-1&1&0\end{pmatrix}$$

(e)

$$AC=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&3\\-4&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&3\\-4&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(f)

$$CB=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}$$

注意观察 $AC=A$ 和 $CB=B$，在下一个例子中给出有关矩阵 C 形式的一般结果。

例 1.5 远离对角线元素的值为 0，对角线上元素的值为 1 的矩阵定义为 $n\times n$ 单位矩阵 $I(I_{ij}=0$，$i\neq j$；$I_{ii}=1$，$i=1,2,\cdots n$，$j=1,2,\cdots n$。）试证明对任意的 $m\times n$ 矩阵 A，$AI=A$ 成立；对于任意的 $n\times m$ 矩阵 B，$IB=B$ 成立。

解：

应用矩阵相乘的公式和单位矩阵 I 的定义，我们得出：

$$\{AI\}_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}I_{kj} \quad 其中\ i=1,2,\cdots m,\ j=1,2,\cdots n$$

$$=a_{ij}$$

$$=\{A\}_{ij}$$

因为 AI 和 A 的分量一一对应相等，所以，我们认为 $AI=A$。同样地，我们得出：