数学分析新讲

第三册

张筑生 编著

北京大学出版社

北京大学教材

数学分析新讲

第三册

张筑生 编著

北京大学出版社

登记证号：（京）159号

北京大学教材
数学分析新讲
第三册
张筑生 编著
责任编辑：刘 勇
*
北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
850×1168毫米 32开本 14印张 360千字
1991年9月第一版 1991年9月第一次印刷
印数：0001—2,000册
ISBN7-301-01577-1/O·0254
定价：4.30元

内 容 提 要

本书的前身是北京大学数学系教学改革实验讲义。改革的基调是：强调启发性，强调数学内在的统一性，重视学生能力的培养。书中不仅讲解数学分析的基本原理，而且还介绍一些重要的应用（包括从开普勒行星运动定律推导万有引力定律）。从概念的引入到定理的证明，书中作了煞费苦心的安排，使传统的材料以新的面貌出现。书中还收入了一些有重要理论意义与实际意义的新材料（例如利用微分形式的积分证明布劳沃尔不动点定理等）。

全书共三册。第一册内容是：一元微积分，初等微分方程及其应用。第二册内容是：一元微积分的进一步讨论，广义积分，多元函数微分学，重积分。第三册内容是：微分学的几何应用，曲线积分与曲面积分，场论介绍，级数与含参变元的积分等。

本书可作为大专院校数学系数学分析基础课教材或补充读物，又可作为大、中学教师，科技工作者和工程技术人员案头常备的数学参考书。

目　　录

第五篇　曲线、曲面与微积分

第六篇　级数与含参变元的积分

第 五 篇

曲线、曲面与微积分

第十四章　微分学的几何应用

几何学有悠久的历史，至今仍是最重要的数学学科之一，是数学思想的重要源泉。笛卡尔的坐标法，开辟了用分析方法解决几何问题的道路。微积分创立时期的数学家，对于用新方法解决几何问题，有很浓厚的兴趣。从那时开始，一个以无穷小分析方法为特征的几何学分支——微分几何——迅速发展起来。著名的数学家高斯(Gauss)、黎曼(Riemann)、嘉当(E.Cartan)等人，都对微分几何学的发展作出过永志于史册的贡献。

学习微分几何，当然需要单独的一门课程。但在微积分课程中，仍有必要初步了解无穷小分析方法怎样处理几何问题。

在本章中，所涉及的空间只限于通常的三维欧几里德空间 $\mathbb{R}^3$。另外，对于本章中所讨论的问题，最好把点和向量稍加区别。因此，我们约定用大写字母表示点，用粗黑体字母表示向量。

对于两个向量 $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$，我们用记号

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$$

表示这两向量的内积(数量积)，又用记号

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2]$$

表示这两向量的外积(向量积或叉积)。于是

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = [\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

§1 曲线的切线与曲面的切平面

1.a 曲线的切线

考察 $\mathbf{R}^3$ 中的一条参数曲线

$$(1.1)_1 \qquad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \qquad t \in J.$$

在这里，我们假设函数 $x(t), y(t)$ 和 $z(t)$ 都在区间 J 连续可微并且满足条件

$$(1.2)_1 \qquad (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 \neq 0.$$

如果把从原点 $(0,0,0)$ 到点 (x,y,z) 的向径记为 $\boldsymbol{r}$，那么参数方程 $(1.1)_1$ 可以写成更紧凑的形式

$$(1.1)_2 \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad t \in J,$$

这里 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 是连续可微的向量值函数，它满足条件

$$(1.2)_2 \qquad \|\boldsymbol{r}'(t)\| \neq 0.$$

当然，$(1.1)_1$ 与相应的 $(1.1)_2$ 本来是一回事。在以下引用时，我们就不再加以区别了，都编号为(1.1)。同时，也就把 $(1.2)_1$ 和 $(1.2)_2$ 都编号为(1.2)。

设 P_0 是曲线(1.1)上的一个定点（其向径 $\overrightarrow{OP_0} = \boldsymbol{r}(t_0)$），而 P 是同一曲线上的一个动点（其向径 $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}(t)$）。我们来考察沿着割线 P_0P 方向的向量

$$\frac{\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{t - t_0}.$$

当 $t \to t_0$ 时，割线 P_0P 的极限位置应是曲线在 P_0 点的切线。这

样，我们求得曲线在给定点沿切线方向的一个向量

$$(1.3)\qquad \boldsymbol{r}'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{t-t_0}.$$

于是，曲线(1.1)在 P_0 点的切线方程可以写成

$$(1.4)\qquad \frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

这里 $x_0=x(t_0)$，$y_0=y(t_0)$，$z_0=z(t_0)$。

显式表示的曲线

$$(1.5)\qquad y=y(x),\quad z=z(x),\qquad x\in I,$$

可以看作参数曲线的特殊情形——以 x 作为参数的情形：

$$x=x,\quad y=y(x),\quad z=z(x),\qquad x\in I.$$

对这种情形，切线的方程可以表示为

$$(1.6)\qquad \frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)},$$

或者

$$(1.6)'\qquad \begin{cases} y=y_0+y'(x_0)(x-x_0),\\ z=z_0+z'(x_0)(x-x_0),\end{cases}$$

这里 $y_0=y(x_0)$，$z_0=z(x_0)$。

再来看由隐式给出的曲线

$$(1.7)\qquad \begin{cases} F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$$

这里假设 F 和 G 都是连续可微函数，并且

$$(1.8)\qquad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{bmatrix}=2.$$

于是，在曲线(1.7)的每一个点(x_0,y_0,z_0)邻近，我们总可以解出某两个变元作为第三个变元的函数．这样把曲线的方程写成显式形式，然后套用(1.6)或者(1.6)′写出切线方程．但以下的讨论更有启发性：我们来考察方程组(1.7)在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$邻近的一个参数解

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in J = (t_0 - \eta, t_0 + \eta), \\ z = z(t), \end{cases}$$

$$(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0).$$

——这样的参数解一定存在，因为显式解就是一种参数解．把参数解$x = x(t)$，$y = y(t)$，$z = z(t)$代入(1.7)，就得到恒等式

$$\begin{cases} F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0, \\ G(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0. \end{cases}$$

在$t = t_0$微分这些恒等式，就得到

$$(1.9) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0} x'(t_0) + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0} y'(t_0) + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0} z'(t_0) = 0, \\ \left(\dfrac{\partial G}{\partial x}\right)_{P_0} x'(t_0) + \left(\dfrac{\partial G}{\partial y}\right)_{P_0} y'(t_0) + \left(\dfrac{\partial G}{\partial z}\right)_{P_0} z'(t_0) = 0. \end{cases}$$

我们介绍一个很有用的算子符号：

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

这里的$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$分别是$OX$轴正方向，$OY$轴正方向和$OZ$轴正方向的单位向量．这样定义的算子$\nabla$，被称为奈布拉算子(或奈布拉算符)．在点$P_0$，奈布拉算子$\nabla$作用于一个可微的数值函数$F(x,y,z)$，产生了一个向量

$$(\nabla F)_{P_0} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0} + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0} + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{P_0}.$$

利用奈布拉算子可以把(1.9)式改写为

$$\begin{cases} (\nabla F)_{P_0} \cdot \boldsymbol{r}'(t_0) = 0, \\ (\nabla G)_{P_0} \cdot \boldsymbol{r}'(t_0) = 0. \end{cases}$$

这就是说，曲线(1.7)在点 P_0 的切向量与两向量$(\nabla F)_{P_0}$和$(\nabla G)_{P_0}$正交. 因而这切向量平行于

$$(\nabla F)_{P_0} \times (\nabla G)_{P_0} = \left. \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \right|_{P_0}.$$

据此，我们写出曲线(1.7)在点 P_0 的切线方程

$$(1.10) \qquad \frac{x - x_0}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}_{P_0}}.$$

平面参数曲线

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in J$$

可以看作空间参数曲线的一种情形:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in J.$$

因而，平面参数曲线的切线方程可以写为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} \quad (z = 0).$$

类似地，平面显式曲线

$$y = y(x), \qquad x \in I$$

的切线方程为

$$y=y_0+y'(x_0)(x-x_0) \quad (z=0),$$

——这结果当然是大家早已知道了的。

隐式表示的平面曲线

$$F(x,y)=0$$

可以看作这样的空间曲线

$$\begin{cases} \tilde{F}(x,y,z)=F(x,y)=0, \\ \tilde{G}(x,y,z)=z=0. \end{cases}$$

这空间曲线在点

$$\tilde{P}_0=(P_0,0)=(x_0,y_0,0)$$

的切线方程可以写成

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial(\tilde{F},\tilde{G})}{\partial(y,z)_{\tilde{P}_0}}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial(\tilde{F},\tilde{G})}{\partial(z,x)_{\tilde{P}_0}}} \quad (z=0),$$

也就是

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{P_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{P_0}(y-y_0)=0 \quad (z=0).$$

1.b 曲面的切平面与法线

空间 $\mathbf{R}^3$ 中的一块参数曲面表示为

$$(1.11)_1 \qquad \begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \\ z=z(u,v), \end{cases} \quad (u,v)\in\Delta.$$

这里，设 Δ 是参数平面上的一个开区域，设 $x(u,v)$，$y(u,v)$和 $z(u,v)$是在 Δ 中连续可微的函数，并设

$$(1.12)_1 \qquad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = 2。$$

参数曲面块的方程$(1.11)_1$又可写成向量形式

$$(1.11)_2 \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v), \quad (u,v)\in \varDelta,$$

而条件$(1.12)_1$意味着

$$(1.12)_2 \qquad \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0。$$

在下文中，提到(1.11)时，指的就是$(1.11)_1$或者$(1.11)_2$；提到(1.12)时，指的就是$(1.12)_1$或者$(1.12)_2$。

设P_0是曲面(1.11)上指定的一个点，其坐标为

$$(x_0,y_0,z_0) = (x(u_0,v_0),\ y(u_0,v_0),\ z(u_0,v_0))。$$

又设

$$u = u(t),\ v = v(t),\ t\in J$$

是参数区域$\varDelta$中的一条连续可微的曲线，它满足条件

$$(u(t_0),v(t_0)) = (u_0,v_0)。$$

我们来考察曲面(1.11)上经过点P_0的连续可微曲线

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t),v(t)), \quad t\in J。$$

将上式对t求导，就得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}(u(t),v(t))) = \boldsymbol{r}_u u'(t) + \boldsymbol{r}_v v'(t)。$$

由此可知：任何一条这样的曲线，过点P_0的切线都在同一张平面上。这平面通过点P_0，并且平行于向量

$$(\boldsymbol{r}_u)_{P_0} \text{ 和 } (\boldsymbol{r}_v)_{P_0}。$$

我们把这张平面叫做曲面(1.11)在点P_0的**切平面**。切平面上任意一点P的向径

$$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{r}$$

应满足向量方程

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)_{P_0}=0.$$

据此，我们写出切平面的方程

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}=0.$$

过切点并且与切平面正交的直线，称为曲面在这点的法线。根据上面的讨论，我们得知：法线的方向向量为

$$(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)_{P_0}.$$

因而，法线的方程可以写成

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}_{P_0}}.$$

显式表示的连续可微曲面

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D, \tag{1.13}$$

可以看成以(x,y)为参数的参数曲面：

$$\begin{cases} x=x, \\ y=y, & (x,y)\in D. \\ z=f(x,y), \end{cases}$$

这曲面过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的切平面的方程可以写成

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0,y_0) \end{vmatrix}=0,$$

即

$$z=z_0+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$