普通物理学

第二卷 第二分册

波与光学

[苏]И. В. 萨韦利耶夫著 雷祖猷 译 高等教育出版社

普通物理学

第二卷 第二分册

波与光学

［苏］ И. В. 萨韦利耶夫 著
雷祖猷 译

高等教育出版社

(京)112号

内容提要

本书根据前苏联科学出版社出版的И.В.萨韦利耶夫著《普通物理学》第二卷1982年增订第二版译出.

这套《普通物理学》共三卷. 内容包括:力学与分子物理学(第一卷);电磁学、波与光学(第二卷);量子光学、原子物理学、固体物理学、原子核与粒子物理学(第三卷).

这套书的主要目的在于向大学生介绍物理学的基本概念和方法,特别注意物理定律涵义的解释及其应用. 该书保持了苏联教材在叙述上严谨、简洁的特色,并在可能的情况下将物理学的近代成就(包括相对论和量子论)引入普通物理学. 这种引入不只是作一般知识性介绍,而是尽可能与普物的传统内容融为一体,使经典理论成为它的相对论或量子论表述的经典极限. 在内容、风格和处理方法上给人以"新"的感觉.

该书是莫斯科工程物理学院使用的教材,可用于高等工科院校使用多学时普物教学大纲的专业作为教学参考书. 但就其内容的深度与广度而言,它也可供我国理科物理等专业师生参考

普通物理学

第二卷 第二分册

波与光学

[苏] И.В.萨韦利耶夫 著

雷祖猷 译

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

北京市顺义县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.25 字数 170 000

1992 年 5 月第 1 版 1992 年 5 月第 1 次印刷

印数 0001—2 135

ISBN7-04-003612-6/O·1081

定价 4.70 元

目　录

第二编　波

第三编　光　　学

第二编　波

第十四章　弹　性　波

§ 93. 弹性介质中波的传播

如果弹性(固体,液体或气体)介质中某处的粒子产生振动,由于粒子之间的相互作用,这振动就会在介质中从一个粒子到另一粒子以某一速度 v 传播下去. 振动在空间中的传播过程叫做波.

波在其中传播的介质,它的粒子并不随波产生平动,而只是绕自己的平衡位置振动. 按照粒子振动方向相对于波传播方向的不同,可以划分纵波和横波. 在纵波中,介质粒子沿波的传播方向振动. 在横波中,介质粒子的振动方向垂直于波的传播方向. 弹性横波只能在具有抗剪切能力的介质中产生. 所以在液体和气体介质中只能产生纵波,而在固体介质中既能产生纵波,也能产生横波.

图93.1表示介质中有横波传播时其粒子的运动情况. 编号1,2等等用来表示彼此相距$\frac{1}{4}vT$的一些粒子,$\frac{1}{4}vT$是在粒子振动的1/4周期里波通过的距离. 在取之为零的时刻,沿着轴自左而右传播的波传到粒子1,于是这粒子开始由平衡位置向上移动,并牵动其右边的相邻粒子. 经过1/4周期,粒子1达到向上最大偏移位置,此时粒子2则开始由平衡位置向上移动. 再过1/4周期,粒子1将通过平衡位置自上向下运动,粒子2则达到向上最大偏移位置,粒

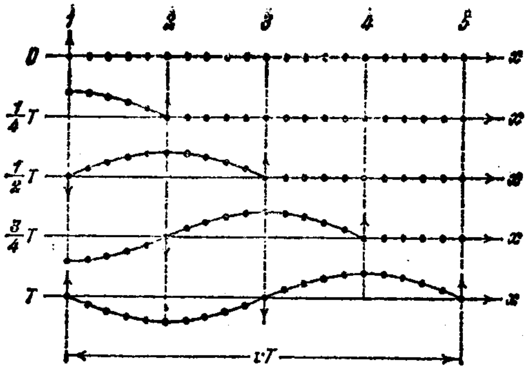

图 93.1

子 3 开始从平衡位置向上运动. 在 $t=T$ 的时刻，粒子 1 结束一次完整振动回到与初始时刻相同的运动状态，而波则通过路程 vT 传到粒子 5.

图 93.2 表示介质中有纵波传播时其粒子的运动情况. 所有涉及横波中粒子行为的讨论，只要将向上和向下的位移换为向右和向左的位移，都可适用于纵波. 由图可知，当纵波在介质中传播时，有依次交叠的粒子密部和疏部生成(粒子的密部在图中围以虚线)，它们在波的传播方向上以速度 v 移动.

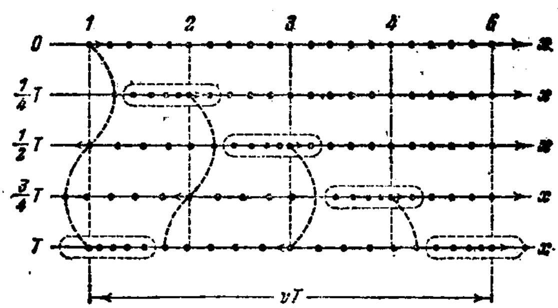

图 93.2

图 93.1 和 93.2 表示平衡位置位于x轴的粒子的振动情况. 实

际上，不仅位于 x 轴上的粒子而且包含于某一体积中的所有粒子都在振动．从振源传播出来后，波动过程将遍及愈来愈大的空间范围．振动在时刻 t 所传到之点的轨迹，叫做**波前**．波前是这样一个曲面，它把波动过程已在其中引发的空间和振动尚未在其中产生的区域划分开来．

以相同相位振动的点的轨迹，叫做**波面**．通过波动过程所牵涉空间中的任意点可以作出波面．因此波面有无限多个，而每一时刻的波前却只有一个．波面保持静止（它们通过以相同相位振动的粒子的平衡位置），而波前则总是在向前推移着．

波面可以有任意的形状．在最简单的情况下，它们是平面或者球面．相应地，在这些情况下的波称为**平面波**或**球面波**．在平面波中，波面是一系列彼此平行的平面，而在球面波中，波面则是一系列同心球面．

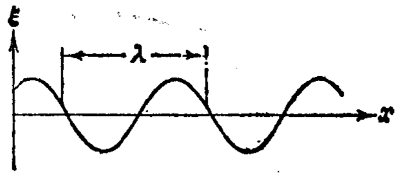

图 93.3

设平面波沿 x 轴传播．在这种情况下，介质中凡其平衡位置具有相同 x 坐标的点（它们的 y 坐标和 z 坐标可以有不同的值），都将以相同相位振动．在图 93.3 上画出一条曲线，它给出某一时刻具有不同 x 值的各点从平衡位置算起的位移 ξ．不要以为这个图是波的可见形象．图中所表示的是某确定时刻 t 之下函数 $\xi(x, t)$ 的图形．这样的图形既可对纵波作出，也可以对横波作出．

在介质中的粒子完成一次完整振动所花的时间（振动周期）里，波所传过的距离 λ，叫做**波长**．显然，

$$\lambda = vT, \tag{93.1}$$

式中 v 为波速，T 为振动周期．波长也可以定义为介质中相位差为 2π 的最邻近两振动点之间的距离（见图 93.3）．

在关系式(93.1)中以 $1/\nu$ 代替 T（ν 是振动频率），便得

$$\lambda\nu = v. \tag{93.2}$$

从下述推理也可以得出这个公式. 波源在 1 秒内作 ν 次振动，而每次振动都要在介质中产生一个波峰和一个波谷. 在波源即将完成 ν 次振动的时刻，第一个波峰应已通过路程 v. 可见，ν 个波峰和 ν 个波谷连起来应有 v 这么长.

§ 94. 平面波和球面波的方程

波的方程是指这样的表式，它给出振动粒子的位移 ξ 与粒子坐标 x, y, z(此处系指粒子平衡位置的坐标）和时间 t 这四者的函数关系:

$$\xi = \xi(x, y, z; t). \tag{94.1}$$

这函数不管是相对于时间 t，还是相对于坐标 x, y, z 来说，都应当是周期性的. ξ 所描写的是坐标为 x, y, z 之点的振动，从这一点可看出相对于时间的周期性，而相对于坐标的周期性则可从这样一个事实看出：彼此相距为 λ 的点，它们的振动情况将完全相同.

我们来求出振动具有简谐性质时，平面波情况下函数 ξ 的形式. 为简单起见，我们在选定坐标轴方向时使 x 轴与波传播方向一致. 在这种情况下，波面将垂直于x轴，而既然波面上一切点的振动情况都相同，那么位移 ξ 将只与 x 和 t 有关：$\xi = \xi(x, t)$. 设位于 $x = 0$ 平面（图 94.1)上的点的振动可表示为

$$\xi(0, t) = a\cos(\omega t + \alpha).$$

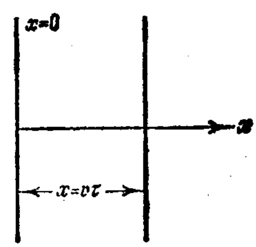

图 94.1

我们来求出任意 x 值所对应平面上诸点的振动表示式. 波从$x=0$的平面传到这个平面所需要的时间是 $\tau = x/v$ (v 是波传播速度).

可见，平面 x 上粒子的振动比平面 $x=0$ 上粒子的振动落后一段时间 τ，即平面 x 上粒子的振动表式为

$$\xi(x, t)=a\cos[\omega(t-\tau)+\alpha]=a\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right].$$

于是，在 x 轴方向上传播的平面波(不论是纵波还是横波)，其方程取如下形式:

$$\xi=a\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha\right]. \tag{94.2}$$

量 a 是波的振幅. 波的初相位 α 决定于 x 和 t 两者计算起点的选择. 在研究一列波时，时间和坐标的计算起点通常选择得使 α 等于零. 但在研究几列波的叠加时，要使它们的初相位都等于零，通常是办不到的.

使方程(94.2)中的相位取某一固定值，即令

$$\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\alpha=\text{const}. \tag{94.3}$$

这个表式确定着时间 t 和相位取固定值处的 x 值这两者之间的关系. 由这表式导出的 dx/dt 表示该相位值的移动速度. 将表式(94.3)微分，得到

$$dt-\frac{1}{v}dx=0,$$

于是

$$\frac{dx}{dt}=v. \tag{94.4}$$

由此可见，方程(94.2)中的波传播速度 v 是相位的移动速度，由于这样，我们把它称为相速度.

根据(94.4)，$\dfrac{dx}{dt}>0$. 因而方程(94.2)描写在 x 增大方向上传播的波. 在相反方向上传播的波为如下方程所描述:

$$\xi=a\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)+\alpha\right]. \tag{94.5}$$

关于这点，可说明如次：使(94.5)所表示的波的相位等于常数并将所得等式微分，可得关系式

$$\frac{dx}{dt}=-v,$$

由这个关系式便可推知，(94.5)表示的波朝 x 减小方向传播.

可以把平面波的方程式写成关于 x 和 t 为对称的形式. 为此我们引入一个量

$$k=\frac{2\pi}{\lambda},\tag{94.6}$$

它称为波数. 将表式(94.6)的分子和分母同乘以频率 ν，可以将波数表示成

$$k=\frac{\omega}{v}\tag{94.7}$$

[见公式(93.2)]. 将(94.2)的圆括号打开，并注意到(94.7)，便可得到沿 x 轴传播的平面波的如下方程式:

$$\xi=a\cos(\omega t-kx+\alpha).\tag{94.8}$$

沿 x 减小方向传播的波的方程式与(94.8)的区别仅在于 kx 项的符号.

在推导公式(94.8)时，我们曾假定振幅与 x 无关. 对于平面波，仅当介质不吸收波的能量时，情况才是如此. 当波在吸收能量的介质中传播时，波的强度将随离开振源而逐渐减小，即我们将观察到波的衰减现象. 实验表明，在均匀介质中，这样的衰减是按指数规律发生的：$a=a_0e^{-\gamma x}$[请与衰减振动振幅随时间的减小情况进行比较；见卷一公式(58.7)]. 相应地，平面波的方程式具有如下形式:

$$\xi=a_0e^{-\gamma x}\cos(\omega t-kx+\alpha)\tag{94.9}$$

(a_0 为 $x=0$ 平面上诸点的振幅).

现在我们来找出球面波的方程式. 一切实在波源都具有一定

的广延度．但是如果我们仅限于研究离波源的距离远大于波源线度处的波，则波源可看成点源．在各向同性的均匀介质中，点源所产生的波将是球面波．假定点源所在之处的振动相位等于 $(\omega t+\alpha)$，于是位于半径为 r 的波面上的点将以相位

$$\omega(t-r/v)+\alpha=\omega t-kr+\alpha$$

而振动（波通过路程 r 所需时间为 $\tau=r/v$）．在这种情况下，即使波的能量不被介质吸收，振幅也不能保持不变，而是随离波源距离的增大按 $\frac{1}{r}$ 的规律减小（见 § 98）．因而球面波的方程式为

$$\xi=\frac{a}{r}\cos(\omega t-kr+\alpha), \tag{94.10}$$

式中 a 是一个常数，数值上等于离波源单位距离处的振幅．a 的量纲等于振动量的量纲乘以长度的量纲．对于吸收介质，在公式 (94.10) 中需要附加一个因子 $e^{-\gamma r}$．

我们提醒一下，由于前述假定，方程 (94.10) 仅当 r 远大于波源线度时才成立．当 r 趋于零时，振幅的表式变为无限大．出现这个荒谬的结果，是由于该方程式对于小的 r 不适用．

§ 95. 沿任意方向传播的平面波的方程式

现在我们来寻求传播方向与坐标轴 x, y, z，分别交成角度 α, β, γ 的平面波的方程式．设在通过坐标原点的平面内（图 95.1），振动的表式为

$$\xi_0=a\cos(\omega t+\alpha). \tag{95.1}$$

我们在离坐标原点 l 远处取一波面（平面），在这个平面内的

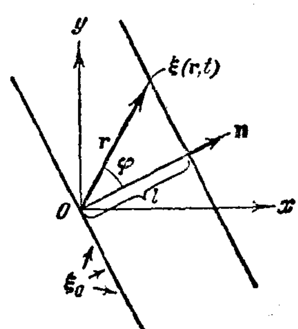

图 95.1

振动将比(95.1)所示的振动落后一段时间 $\tau=l/v$:

$$\xi=a\cos\left[\omega\left(t-\frac{l}{v}\right)+\alpha\right]=a\cos(\omega t-kl+\alpha) \qquad (95.2)$$

[$k=\omega/v$; 见公式(94.7)].

通过所考察波面上各点的径矢来表示 l. 为此我们作波面法线的单位矢量 $\boldsymbol{n}$. 由图 95.1 可见, $\boldsymbol{n}$ 与波面任意点的径矢 $\boldsymbol{r}$ 这两者的标积等于 l:

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}=r\cos\varphi=l.$$

在(95.2)中用 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}$ 代替 l:

$$\xi=a\cos(\omega t-k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}+\alpha). \qquad (95.3)$$

矢量

$$\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{n} \qquad (95.4)$$

称为波矢, 其模等于波数 $k=2\pi/\lambda$, 而其方向则沿波面的法线方向. 这样一来, 方程(95.3)可以表示为

$$\xi(\boldsymbol{r},t)=a\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\alpha). \qquad (95.5)$$

我们得到沿波矢 $\boldsymbol{k}$ 所决定方向传播的非衰减平面波的方程式. 对于衰减波, 需要在方程式中附加一个 $e^{-\gamma l}=e^{-\gamma \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}}$ 的因子.

函数(95.5)给出径矢为 $\boldsymbol{r}$ 之点在时刻 t 对平衡位置的偏移(注意 $\boldsymbol{r}$ 所决定的是点的平衡位置). 为了由点的径矢变换为其坐标 x, y, z, 我们通过两个矢量在三个坐标轴上的分量来表示标积 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_x x+k_y y+k_z z.$$

于是平面波方程式为

$$\xi(x,y,z;t)=a\cos(\omega t-k_x x-k_y y-k_z z+\alpha). \qquad (95.6)$$

此处

$$k_x=\frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha, \qquad k_y=\frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta, \qquad k_z=\frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma. \qquad (95.7)$$

函数(95.6)给出坐标为 x, y, z 之点在时刻 t 的偏移. 在 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{e}_x$ 重合的情况下，$k_x=k$, $k_y=k_z=0$, 从而方程(95.6)变为(94.8). 平面波方程式的一个非常方便的记法是

$$\xi=\mathrm{Re}\,a e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\alpha)}. \tag{95.8}$$

符号 Re 通常略去不写，这时暗指只取相应表式的实数部分. 此外，还引入复数

$$\hat{a}=a e^{i\alpha} \tag{95.9}$$

并称之为**复振幅**. 这复数的模表示波的振幅，而其幅角 α 则表示波的初相位.

由此可见，非衰减平面波的方程式可以表为

$$\xi=\hat{a} e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}. \tag{95.10}$$

这种记法的优点到后面就可明了.

§ 96. 波 动 方 程

任何一种波的方程式都是微分方程的解，这微分方程叫做**波动方程**. 为了确定波动方程的形式，我们对表示平面波的函数(95.6)求关于坐标和时间的二次偏导数，并加以比较. 将这个函数对每一变量求导两次，可得

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\omega^2 a\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\alpha)=-\omega^2\xi,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=-k_x^2 a\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\alpha)=-k_x^2\xi,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}=-k_y^2 a\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\alpha)=-k_y^2\xi,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=-k_z^2 a\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\alpha)=-k_z^2\xi.$$

将对坐标的偏导数相加，可得

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=-(k_x^2+k_y^2+k_z^2)\xi=-k^2\xi. \qquad (96.1)$$

把这个和数与对时间的导数相比较，并用$\frac{1}{v^2}$代替$\frac{k^2}{\omega^2}$［见(94.7)］，便得方程

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\ \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad (96.2)$$

而这就是波动方程. 我们可以把它写成

$$\Delta\xi=\frac{1}{v^2}\ \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad (96.3)$$

式中Δ是拉普拉斯算符［见公式(11.37)］.

不难证明，不仅函数(95.6)能够满足波动方程，而且任何一个形如

$$f(x,y,z;t)=f(\omega t-k_xx-k_yy-k_zz+\alpha) \qquad (96.4)$$

的函数也同样能够满足波动方程. 的确，若用ζ表示(96.4)右边括号内的式子，则有

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{df}{d\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=f'\omega, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\omega\frac{df'}{d\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\omega^2f'' \qquad (96.5)$$

类似地

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=k_x^2f'', \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=k_y^2f'', \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=k_z^2f'', \qquad (96.6)$$

把表式(96.5)和(96.6)代入方程(96.2)就可得出结论，如令$v=\omega/k$，函数(96.4)满足波动方程.

任何一个满足形如(96.2)的方程的函数，都描述某一种波，并且$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$这项的系数，其倒数的平方根就是这种波的相速度.

对于沿x轴传播的平面波，波动方程是

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \qquad (96.7)$$

§ 97. 固体介质中弹性波的速度

设在 x 轴方向上传播一列平面纵波. 我们在介质中分出底面积为 S 而高为 Δx 的一个圆柱体(图 97. 1). 在每一时刻, x值不同的粒子, 它们的位移 ξ 也是不同的 (见图 93.3, 其上所绘出的是ξ与 x 值的函数关系). 如果在某时刻, 坐标为 x 的圆柱底面具

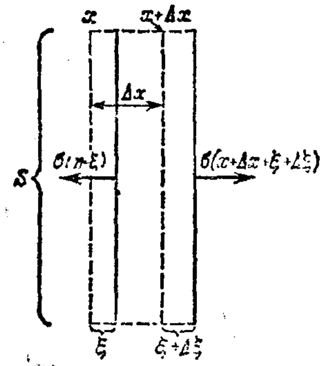

图 97.1

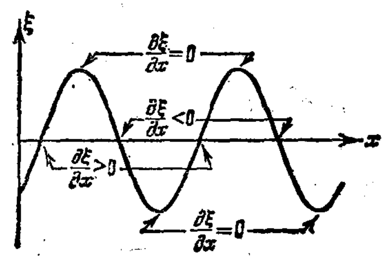

图 97.2

有位移 ξ,则坐标为 $x+\Delta x$ 的底面, 其位移将是 $\xi+\Delta\xi$. 所以,我们所考察的体积将发生形变而获得伸长 $\Delta\xi$($\Delta\xi$ 为代数量,$\Delta\xi<0$ 相应于圆柱受到压缩) 或相对伸长 $\Delta\xi/\Delta x$. 量 $\Delta\xi/\Delta x$ 表示圆柱体的平均应变. 由于 ξ 并非按线性规律随 x 变化, 所以圆柱不同截面处的真实应变值将各不相同. 为了得到在坐标为 x 的那个截面处的应变 ε,需要使 Δx 趋于零. 由此可见,

$$\varepsilon=\frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{97.1}$$

(使用偏导数符号是因为 ξ 不仅依赖于 x,而且还依赖于 t).

拉伸应变的出现表明有法向应力 σ 存在,当应变不大时,应力与应变成正比. 根据第一卷公式(14.6),