光測彈性力学的原理和方法

〔英〕H. T. 吉沙普　F. C. 哈立斯著

科学技術出版社

光測彈性力学的原理和方法

〔英〕H. T. 吉沙普　F. C. 哈立斯著
周　承　倜　譯

科　学　技　術　出　版　社

內 容 提 要

本書簡明扼要地介紹了研究应力的光測彈性力学方法。这一方法是应用偏振光通过具有特殊光学性質的透明塑料所制成的模型，以測定結構構件或机械零件內各点的应力的大小和方向。所以应用这一方法可以显示出受力物体內全部的应力分布情况，从而可以进一步改进構件的形狀和尺寸，以期得到最安全和經済的設計。

本書的前几章对于应用于光測彈性力学方法中的应力和变形以及光学的基本原理，系統地作了扼要的叙述，后几章介紹了关于解决二向及三向应力問題的方法，最后并結合实际应用的例子詳細說明了方法的应用。

本書可作为科学研究机关、工业系統的实驗室以及生产工厂的設計部門的技术工作人員参考之用；同时也可作为高等工业学校各專业及綜合大学物理系的教学参考書。

光測彈性力学的原理和方法

PHOTOELASTICITY PRINCIPLES & METHODS

原著者 〔英国〕H. T. JESSOP, F. C. HARRIS

原出版者 Cleaver-Hume Press LTD. 1950 年版

譯 者 周 承 倜

*

科学技術出版社出版

（上海建國西路 336 弄 1 号）

上海市書刊出版業營業許可証出 079 号

中科藝文联合厂印刷 新华書店上海發行所总經售

統一書号：15119·509

开本 787×1092 耗 1/27 · 印張 9 7/27 · 字数 185,000

1957年5月第1版

1957年5月第1次印刷 印数 1–2,500

定价：(10) 1.40 元

目　　录

緒　言

当荷重作用于一个固体上时，例如作用于一个結構的構件或机器的零件上，固体內部就产生应力，这些应力是逐点不同的。在任何一点上，应力的大小和方向依据荷重作用的情况以及物体的形狀而定。若在某些点上发生了应力集中，那么这些点就是潛伏在物体中的弱点，但常常在改变了物体的形狀后，这些点上的应力即可減低，并且可以使整个物体中的应力的分布更为均匀。这样就增加了物体的强度。

因此，为了得到一个結構的最有利的設計，工程师必須知道在任何已知荷重系統作用的情况下，物体內部的应力是如何分布的，而且也要知道改变物体的形狀將如何影响应力的分布。

数学彈性理論是根据观察固体在最簡單形式的应力作用下的性能，由此而得出許多有价值的原理和結果，并在某些情况下，更可以得到完全的解答。然而，这种情况是发生在物体仅有一个簡單的几何形狀，并且作用在物体上的荷重系統也是簡單的。在任何实际工程問題中，这类情况是很少的。为了使得問題能够簡化成为簡單的形式，工程师通常是根据經驗的判断作出某些近似的假設，并由此而获得近似解答。但是他很难估計他所作的这些近似的假設中包含誤差到什么样程度。因此設計工程师总是在找寻那些可以校核他的計算的方法．光測彈性力学的方法是其中的一个，并且它已經成为設計师的一个有价值的工具。將光測彈性力学的方法与其他的研究方法相比較，例如与用应变仪裝在結構上或結構模型上来校核的方法相比較，那么光測彈性力学的方法是

一个省費、迅速、幷能得出很完善資料的方法。

这个方法的內容是用偏振光来測定所研究的結構的一个模型，模型的材料是具有某些特殊光学性質的透明塑料。当应用这样的方法来測定时，在模型上所作用的荷重系統应与作用在原結構上的完全相同。这时在模型中就显示出有条紋的图案，研究者就可以根据彈性理論从这些条紋而計算出模型中各点应力的大小和方向。然后，应用相似律原理可推論得知这些应力情况也在原結構中发生。

直到最近几年以前，光測彈性力学方法还只能应用在具有均匀厚度的板的結構形式中，幷且所加荷重需要与板的两面平行。新塑料的发現使我們能从事于一門新的技术，这就是可以研究具有任何形狀的物体內的三向应力。这一方法是比較新的。但若要使这个方法达到和老的方法有同样可靠的程度，还需要克服許多困难，但是它已經得出了有价值的結果，其用途的迅速发展是可以期待的了。

用光測彈性力学解答工程上的二向应力問題的价值，已經被許多研究所充分表示，其中柯克尔与菲隆的工作尤应注意。这些被研究的問題为鉄路貨車的車輪与其輪緣內的应力、齿輪齿部的应力、滚动軸承內的应力、桥梁構件內的应力、在建筑物的三角頂与檐板內的应力、在海船甲板內以及各种飞机結構內的应力等。在这許多問題中，已由研究指出了至今已无庸怀疑的应力集中現象；幷且都得到了关于应力大小的很有价值的資料，使得我們在許多情况下改进了設計。

本書幷不希望成为一本光測彈性力学的理論著作；如果讀者希望研究全部理論，可參閱柯克尔和菲隆合著的內容丰富的权威性著作。然而，由于两个理由，著者覺得还需要有这样一本書。第一，光測彈性力学方法的价值已經普遍地为工程师們所承認，以致許多工业部門已經把这一方法介紹到它們自己的研究所中去了；

而同时开始教这一門功課的工业学校也在增多。于是就必需要有一本可供那些不具备淵博数学知識的工程师們閱讀的書。第二，近年來光測彈性力学技术的迅速发展使得有必要叙述一下目前所应用的有关的实驗材料和方法。

所以本書是为了那些希望从事于应力研究的实际工作者而写的。書中的主要数学部分已經尽可能的簡化了，只有那些被認为專为正确了解原理所必不可少的証明才包含在本書中。当原理和方法应用到标准方程式的推导或專用工作步驟的策划时，本書均予以加重說明，因为只有在不断的应用基本原理后，研究者才有可能进一步探索那些新問題和新方法，不致有发生重大錯誤的危險。

第一章和第二章簡略地叙述了本書所包含的原理及平面应力分布的数学分析所采用的方法。三向应力被延緩到第七章中去考慮，因为在研究了二向模型中的光測彈性效应后，將会帮助我們去解釋和更迅速地理解三向問題。

三向应力系統的光測彈性研究已用"冻結应力"法在本書內作了簡略的叙述。这是一个至今認为具有实用价值的唯一方法，但是它还沒有充分发展到超过在应用时指示一般步驟的程度。作者希望从本書所給出的关于三向研究的那些必要条件中可以使得讀者对于研究这一方法和其他方法成为可能。

在光学这一章內作者企图給出一个总結，这不仅是为了光測彈性理論中所必須的光学知識，同时也为了理解那些应用在实用光測彈性力学中的光学系統所必須的事实和原理。

关于討論实际問題的那些章內所包括的各种資料、指示、提示及注意点等材料，有些是从各方面收集來的，有些則是作者实际試驗的結果。所有这些材料希望对于从事初步研究的許多讀者在节約时間方面会有相当帮助。

在第十章中所給出的那些例題，希望仅作为說明应用各种方法來对观察結果进行解釋和归納的例子。在这些例子中幷不要求

得到完全的照相图或者去获得很精确的結果，但是它們表明了从模型所获得的若干資料，而在那些模型上也并沒有因为很精細地加工而化費过多的时間。

在附录中有少量数学分析較难的例子。对于理解二向問題的正常步驟來說，并不需要研究这些例子，但是它們是作为分析方法的一种而列入本書的；这一分析方法是当二向条件不再被适用时作为对观察所获得的結果进行解釋的指示。

习用标号与符号

很抱歉，作者为了要避免麻煩曾企图找寻但是沒有找到前人所作的表示应力和应变的标号的特定形式可供本書之用。因此，作者为了不致于混淆起見所以用以下标号代替。

标 号 表

$n, r, t, s, p, q, x, y, z$……………方向。

$(xx), (yy), (zz), (yz), (zx), (xy)$ 直角座标应力。

$(rr), (nn), (tt)$……………………徑向、法向及切向应力。

$(pp), (qq)$……………………………主应力。

X, Y, S………………………………通过板的平均应力。

P, Q……………………………………平均主应力。

$S_x, S_y, S_z, S_{yz}, S_{zx}, S_{xy}$……………法向及切向应变。

S_r……………………………………………在 r 方向的伸長。

S_p, S_q………………………………………主应变。

S_x, S_y, S_{xy}……………………………通过板的平均应变。

S_p, S_q………………………………………平均主应变。

习用符号——对讀者來說，一件极其重要的事是要知道所有在本理論中应用的数学公式是以符号通过一定的习用方法来代表量而作为推导的基础的。特别是对于在应用标准公式的任何例子

中，其代表量的符号必須严格注意。这一点对于用积分法确定平板中分离应力是特别重要的，此时对于主应力的方向和曲率必須謹愼考慮。

1. 角度——在所有包含角度的公式內，除另附說明外，角度均以弳來度量。一个角度的弳是圓心角所对該圓的弧長用圓的半徑來除。

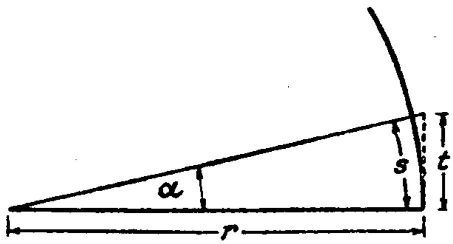

图 X—$\alpha = s/r$ 弳；若角度很小則 s/r 近似等于 t/r。

在平面內度量角度的正方向，对于观察者而言，总是反时針方向。

2. 座标軸——在任何一組軸內，三个軸的方向通常是以順序連續的三个字母表示的，例如 x, y, z; r, s, t。所謂一組正軸(或右手軸)是当以循环次序取三个字母时，其第一軸向第二軸轉动时的轉动方向对于第三軸而言，其关系宛如一个右手螺旋的向前旋进(在下图中，z 軸方向为向着紙平面之外并指向讀者)。

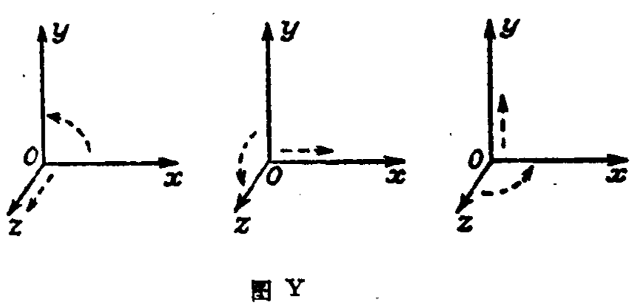

图 Y

(如果上述条件中有一个被满足时,則其余的也必須随着满足)。

同时"右手"法則也可以应用:假想將右手手掌对着原点,而手指指向从 x 到 y 的轉动方向,則伸出的拇指方向將成为 z 軸方向。

当考虑平面問題时,其中未包含第三軸,那么就应該这样来选擇在平面內的两軸,即依所用字母順序的轉动方向作为正的,或者即是对观察者来說是反时針方向。

3. 曲率——如果在一个平面內运动点 P 的位置是以距离 s 來确定的。s 是从 P 点的运动途徑中某一任意选定点量起的。又如果 ψ 是 P 点的切綫与平面內某一固定方向所成的角,那么 P 点的途徑的曲率可以 $d\psi/ds$ 來确定(当然,ψ 是从固定方向以反时針方向用弧度量的)。于是曲率半徑 ρ 为 $ds/d\psi$。

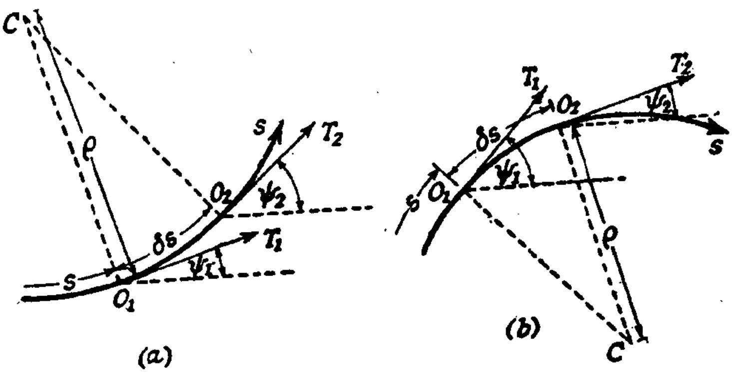

图 Z

因此,如果有一点在 s 增長的方向从 O_1 点向 O_2 点移动,則 s 的增長是 $O_1O_2=\delta s$,δs 是正的。于是,如在图 $Z(a)$ 中所示,若 ψ_2 大于 ψ_1,則 $\delta\psi$ 也將是正的,曲率及曲率半徑亦都是正的。如果,如图 $Z(b)$ 中所示,ψ_2 小于 ψ_1,$\delta\psi$ 將是負的,曲率及曲率半徑亦將是負的。因此,曲率是正的或是負的要看当我們沿 s 方向行进时曲率中心 c 是在曲綫的左边还是在右边而定。必須注意,途徑的切綫方向是依 s 增長的方向所取得的。

第一章 应 力

§1. 一点应力的定义

当一固体受到外力作用时，这些外力將借助于物体內質点間的內力而从物体的一部分傳递到物体的另一部分。

一般說來这些內力的大小和方向在物体內是逐点不同的，而在任何一点使材料分离的力是以材料在該点所傳递的力的强度来度量的。

考察在应力作用下的固体內部的任一微小面积單元 δa，处于該面积單元一边的質点通常將对該面积單元另一边的質点发生作用力。为了方便起見，我們可指定面积單元的法向矢量 n 的方向来定該面积單元的取向，并把面积單元上画出法綫的那一边称之为面积單元的正面。

如果單元很小，那么材料通过單元而作用在單元正面上的所有力的合力与作用在該面积內部某一点上的一个單独力 R 近乎相等。于是 R 就是通过面积單元的合力，而 $R/\delta a$ 是为力的平均强度或通过面积單元的平均总应力。

R 可以被分解为一个法向分量 N 和一个切向分量 F，后者是沿面积單元平面內的某一方向而作用的（图 2）。于是 $N/\delta a$ 是通过面积的平均法向应力，而 $F/\delta a$ 則是通过面积的平均切向应力。

如果我們現在假想面积單元在 P 点縮小到零，則比值 $N/\delta a$ 和 $F/\delta a$ 趋近于它們的极限值，这些极限值卽表示在 P 点通过一个垂直于 n 的无穷小面积單元的法应力和切应力。

如欲充分說明切应力 $F/\delta a$，就必須要指出它在面积單元平面內的方向。这通常可以这样做：在面积單元平面內选定一对直角座标以 s 及 t 表示其方向，再將 F 依該两方向分解为两个分量 S 及 T。

于是我們就可以得到通过垂直于 n 的分界面而作用于 P 点的一个法向应力 $\mathop{\mathcal{L}}\limits_{\delta a\to 0}\dfrac{N}{\delta a}$，和方向各为 s 及 t 的切向应力 $\mathop{\mathcal{L}}\limits_{\delta a\to 0}\dfrac{S}{\delta a}$ 及 $\mathop{\mathcal{L}}\limits_{\delta a\to 0}\dfrac{T}{\delta a}$。

必須注意，这些应力并不足以确定在材料內 P 点的应力狀态，因为它們只包含面积單元 δa 两对边的質点之間的作用力。一般說来，在面积單元的同一边上的許多質点之間也有相互作用力。事实上，可以假想許多象 δa 一样的面，皆通过 P 点，但是各面都具有不同的取向，而通过每一个这样的面都可以有一組不同的法应力和切应力。

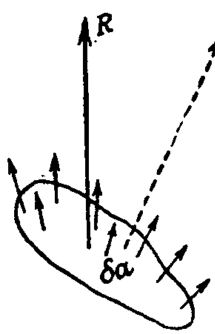

图 1

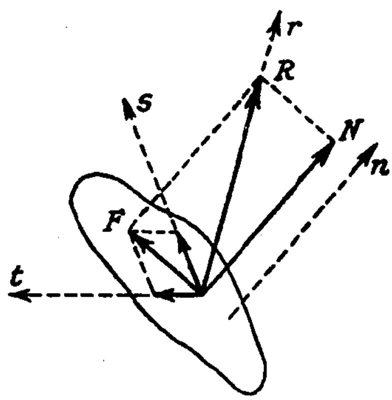

图 2

然而，我們將要指出：如果已知在 P 点的任何三个互相垂直面上的法应力和切应力，那么我們就可以从而推导出通过 P 点的任何一个平面上的应力。

标号——通过一个与 p 方向垂直的面的应力，在任何一个方

向 q 內的分量，用符号 (pq) 表示。

因此如图 2 所示，通过分界面 δa 的总应力以 (nr) 表示，此处 r 表示合力 R 的方向，而应力的法向与切向分量則为 (nn)、(ns) 及 (nt)。

如果在面积單元正面的材料对于面积單元对面材料所作用的力是沿着力軸的正方向作用的，那么这个应力的符号就作为是正的，由此可知，如果一个应力是正的，那么在面积單元負面（即反面）的材料对它的对面所产生的力应該是負方向的。

如图 2 所示，合力 R 及其分力 N、S 和 T 都是沿着軸 r、n、s 和 t 的正方向作用的，因为这些力都是由面积單元正面所产生的，所以这些应力都是正的。于是，一个正的法应力表示通过面积單元的一个張力，而一个負的法应力則表示一个推力。切应力（或剪应力）的符号沒有相应的物理意义，它只与軸的方向的选擇有关。

关于直角座标的应力——若在固体內任何一点 O，我們选定三个互相垂直的方向 x、y、z，組成一个右手直角座标系，我們就可以考察通过垂直于 Ox、Oy、Oz 的各面的应力，从而分析 O 点的应力狀态。

通过在 O 点垂直于 Ox 的面积單元（在图 3 中以阴影矩形表示）上的应力为

(1) 一个法应力或張力 (xx)。

(2) 一个在 y 方向內的切应力（或剪应力）(xy)。

(3) 一个在 z 方向內的切应力（或剪应力）(xz)。

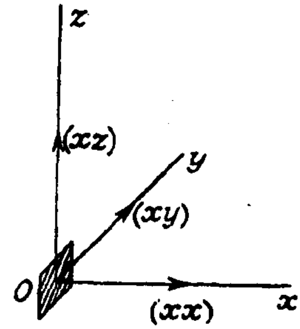

图 3

同样，通过在 O 点垂直于 Oy 的面积單元的，將有一个法应力 (yy) 和两个剪应力 (yz) 及 (yx)；而通过垂直于 Z 的面积

單元的有 (zz)、(zx) 及 (zy)。

这样就使 O 点的应力分成九个分量，但是它們不全是独立量。事实上，在考察固体在 O 点的微小單元的平衡时，就可以証明在任何一点的剪应力 (xy) 和 (yx) 是相等的；同样有 $(yz)=(zy)$，$(zx)=(xz)$。

于是对于任意选定的一个直角座标系的九个应力分量可以用六个量来确定：三个法应力 (xx)、(yy)、(zz) 和三个剪应力 (yz)、(zx)、(xy)。

因此，在外力作用下，固体內一点的应力狀态通常只是以一个三向应力系統来表示的，而对于应用实驗来确定这些应力的問題，除了某一些很簡單的情况而外，还沒有得到充分的解决。然而，在只考虑到平行于同一个平面的各种应力的情况下，光測彈性方法却可以給出一个完全的解。因此在本章的其余部分，我們將討論作用在固体內的平面应力之間的关系，而不考虑垂直于該平面的任何应力。

我們在以后的应力研究中將作一个假定：即对于那些直接作用在固体任一微小單元上的重力型的作用力，当將其与單元周圍的材料通过單元的边界作用在这个單元上的力相比較时，可以略去不計。重力型的作用力就是那些直接作用在物体內每一質点上的力，为了区别于一个質点与鄰近質点互相接触而受到的力，重力型的力有时被称为“超距离作用的力”。这些力的例子为重量、慣性力、电力和磁力。

我們不能假定忽略这种力对于整个物体的作用，然而在許多問題中，就是当物体的总重量与作用在物体上的外力相比較而可以被忽略时，我們將会遇到略去这种力的假定。在另外一些情况下，由物体的重量或慣性所引起的力正是产生我們所研究的应力的主要原因，在这种情况下，任一單元上的力与其說是由于它本身的直接力所产生的，还不如說是由于物体其他部分的重量或慣性

的傳递力所产生的來得更恰当些。所以，当我們考虑一个單元的平衡时，我們將略去單元本身的重量，而只考虑通过單元边界而傳递的力。

§2. 共面应力

我們假想在固体的內部有一极薄的薄片，位于我們称为 x、y 的平面內，我們首先考察薄片的一个微小三角形單元 OAB 的平衡（图 4），这个三角形單元是由軸 Ox 和 Oy 以及直綫 AB 所圍成的。AB 綫的法綫 n 与 Ox 成 α 角。設 t 表示 AB 的方向。

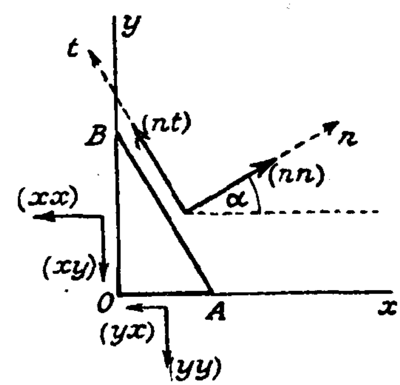

图 4

既然單元具有极其微小的厚度，則通过三角形平面而作用在三角形两面上的应力 (zz)、(zx)、(zy) 的大小可以認为是相等的，因此它們在單元上形成三对相等和相反的力，它們的取舍并不影响單元的平衡。

于是我們所要考虑的应力就只是通过边界 OB、OA、AB 而作用的应力；即是分别垂直于 x、y 和 n 的平面上所通过的法向与切向应力。

这些应力就是法应力 (xx)、(yy)、(nn) 和切应力 (xy)、(yx)、(nt)，其作用方向如图 4 的箭头所示。

（注意：如果 (xx) 是在 OB 上的一个正的法应力，它就表示一个張力，而由 OB 負面上的材料作用于單元上的力將是負方向的，对于其他应力也是同样情况）。

作用在單元的边界上的力將以每一应力与其作用面积相乘而获得，而这些力必須使單元保持平衡。

然后，令 d 为單元的极微小的厚度，而使各力的 x 方向分解力