研考

中国人民大学 赵 晋 主编

研究生
入学考试
复习专用教材

数 学

研考

北京教育出版社

研究生入学考试

数学复习专用教材

主编　赵　晋
编者　朱来义　李其荣

北京教育出版社

研究生入学考试数学复习专用教材
YANJIUSHENG RUXUE KAOSHI
SHUXUE FUXI ZHUANYONGJIAOCAI
赵　晋　主编
*
北京教育出版社出版
（北京北三环中路6号）
邮政编码：100011
北 京 出 版 社 总 发 行
新　华　书　店　经　销
水利电力出版社印刷厂印刷
*
787×1092 毫米　16 开本　24.50 印张　520 千字
1995 年 9 月第 1 版　　1996 年 3 月第 2 版第 2 次印刷
印数 1－8000 册
ISBN 7-5303-0832-7
G・803　定价：25.80 元

前　言

为了帮助广大参加研究生入学数学考试的学生熟悉考试内容、题型，并能够在短时间内全面、系统地复习应试知识，提高应试能力，我们在总结考前辅导，及对历年考题的题型分析和阅卷经验的基础上，根据国家教委最新制定的全国工学、经济学硕士，MBA 研究生入学考试数学大纲的要求，对 95 版研考数学复习专用教材做了必要的增删与修改，使本书更具有可读性和实用性。

教材旨在正确引导考生按考试大纲的要求进行系统复习，所以在编写上不同于其它考前辅导用书，本书具有以下几个特点：

1. 一书在手，可纵览应考全部内容。

2. 叙述严谨，通俗易懂。

3. 题型选择全面，引历年考题为素材，使本教材更具典型性、覆盖面广、分析详尽，富于启发性。

4. 配以[注]的形式强调对概念的理解，区分易混淆的概念，归纳解题方法，步骤及技巧(包括一题多解法)；帮助学生开拓解题和证明的思路。

5. 为适应不同专业考生的不同需要，每章后按题型配备了一定量的习题，层次清楚，并附有提示与答案，用以巩固复习内容。

6. 从临场实考出发，精心安排了两套仿真模拟试题，以褒读者自测之用。

7. 本书附有 1996 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题(1-5 类)，参考答案及评分标准。

8. 本书不仅作为研考数学复习用书，也可作为工科，财经院校学生的数学参考用书。

参加本书编写的人员还有朱来义(博士，副教授)，李其荣(硕士，讲师)。

限于时间仓促，水平有限，书中难免有疏误之处，诚恳希望读者提出宝贵意见。

赵　晋
于中国人民大学
1996 年春

考 试 说 明

为了使广大考生对数学一～数学四的考试概况有一清楚的了解，现将有关情况做如下简要的说明：

数学一

一、适用的招生专业

力学、仪器仪表、动力机械及工程热物理、电工、电子学及通信、计算机科学与技术、自动控制、管理工程、船舶、原子能科学及技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术。

机械设计与制造、金属材料、冶金、土建、水利、测绘、非金属材料、化学工程和工业化学、地质勘探、矿业石油、铁道、公路、水运、纺织、轻工、林业工程。

二、考试内容

1. 高等数学

(1)函数、极限与连续；(2)一元函数微分学；(3)一元函数积分学；(4)向理代数与空间解析几何；(5)多元函数微分学；(6)多元函数积分学；(7)元穷级数；(8)微分方程。

2. 线性代数

(1)行列式；(2)矩阵；(3)向量；(4)线性方程组；(5)矩阵的特征值和特征向量；(6)二次型。

3. 概率论

(1)随机事件和概率；(2)随机变量及其概率分布；(3)二维随机变量及其分布；(4)随机变量的数字特征；(5)大数定律和中心极限定理；(6)数理统计。

三、试卷结构

1. 内容比例　(1)高等数学约68%；(2)线性代数约20%；(3)概率论12%。

2. 题型比例　(1)填空题与选择题约30%；(2)解答题(包括证明题)约70%。

数学二

一、适用的招生专业　建筑学、技术科学史。

二、考试内容

高等数学(只考如下内容)

(1)函数、根限、连续；(2)一元函数微分学；(3)一元函数积分学；(4)常微分方程。

［注］　常微分方程的内容与数学一、二相比，只需略去以下内容：①伯努利(Bernoulli)方程；②全微分方程；③可降阶的高阶微分方程；④欧拉(Euler)方程；⑤包含两个未知函数的一阶常系数线性微分方程组；⑥微分方程的幂级数解法。

三、试卷结构　1. 填空题、选择题约30%。2. 解答题(包括证明题)约70%。

数学三

一、适用的招生专业

国民经济计划与管理(含经济系统分析)、工业经济、工业企业管理、统计学、数量经济学和技术经济学。

二、考试内容

1. 微积分　(1)函数的极限与连续;(2)一元函数微分学;(3)一元函数积分学;(4)多元函数的微积分学;(5)无穷级数;(6)常微分方程;(7)差分方程。

2. 线性代数　(1)行列式;(2)矩阵;(3)向量;(4)线性方程组;(5)矩阵的特征值和特征向量;(6)二次型。

3. 概率论　(1)随机事件和概率;(2)随机变量及其概率分布;(3)随机变量的数字特征;(4)大数定律和中心极限定理;(5)数理统计初步。

三、试卷结构

1. 内容比例　(1)微积分约50%　(2)线性代数约25%　(3)概率论约25%

2. 题型比例　(1)填空题、选择题约30%　(2)解答题(包括证明题)约70%

数学四

一、适用的招生专业

基本建设经济、农业经济、农业企业管理、商业经济、商业企业管理、运输经济、物资经济、劳动经济、财政学、货币银行为(会保险)、会计学、国际贸易、国际金融、世界经济、经济学说史、以及其它财经类专业。

二、考试内容(在数学四要求的基础上只需略去以下内容)

①一元函数积分学中的旋转体的体积计算

②多元函数微积分学中的二重积分概念及计算　③无穷级数　①常微分方程

2. 线性代数　①二次型

3. 概率论　①二元随机变量及其分布　②随机变量数字特征中的协方差和相关系数的概念和计算　③数理统计初步

三、试卷结构

1. 内容比例　(1)微积分约55%　(2)线性代数约25%　(3)概率论约20%

2. 题型比例　(1)填空题选择题约30%　(2)解答题(包括证明题)约70%

MBA 数学(与数学四相同,只是在题型比例上有所不同)

(1)填空题约20%　(2)解答题(包括证明题)约80%

目　　录

第四篇　模拟试题

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限与连续

一、基本要求

函数概念及表示法、函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性、反函数、复合函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数、简单应用问题的函数关系的建立(数学三、四和 MBA 还包括分段函数).

数列极限与函数的概念(数学一需要掌握数列极限的 $\varepsilon—N$ 定义,函数极限的 $\varepsilon—\delta$ 定义)、函数的左极限和右极限、无穷大和无穷小的概念、无穷小的基本性质和无穷小的比较、无穷小与函数极限的关系、极限的四则运算、极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则(数学三、四及 MBA 不要求)、两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\quad,\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

函数连续与间断的概念(数学一需要掌握函数间断的类型)、初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值和介值定理).

二、内容提要

1. 函数的概念

设有两个变量 x 和 y,如果对于给定数集 D 中每一个变量 x、变量 y 按某个对应法则 f 总有唯一确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记作　$y=f(x)$. x 称自变量,y 称因变量,数集 D 称定义域;函数可以用分析法或公式法,以及图示法和表格法表示.

2. 函数的几种特性

(1) 奇偶性:如果对于函数 $y=f(x)$ 的定义域内的任何 x 都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 是偶函数,且图形关于 y 轴对称. 如果对任何 x 都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 是奇函数,且图形关于原点对称.

(2) 有界性:如果存在一个正数 M,使得当 x 取 G 内的任一值时,$f(x)$ 满足 $|f(x)|\leqslant M$,称 $f(x)$ 在 G 内有界,其中 G 是 $f(x)$ 的定义区间或定义域. 函数图形介于 $y=-M$ 及 $y=M$ 之间.

(3) 单调性:如果对函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)<f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调增加函数;当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调减少函数.

(4) 周期性:如果存在一个非零常数 T,使得函数 $f(x)$ 在其定义区间内总有 $f(x-T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,满足等式的最小正数 T 为周期.

(5) 反函数：如果 y 对 x 的函数关系 $y = f(x)$ 也可以表示为 x 对 y 的函数关系 $x = f^{-1}(y)$，则称它们互为反函数关系.

(6) 分段函数：如果函数 $f(x)$ 在不同的定义区段上有不同的表达式，则称 $f(x)$ 为分段函数. 分段函数表示的是一个函数，而不是几个函数.

(7) 复合函数：如果函数 $y = f(u)$，且 $u = \varphi(x)$，函数 $f(u)$ 的定义域与函数 $\varphi(x)$ 的值域交集非空，则称 $f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

(8) 隐函数：以方程 $F(x,y) = 0$ 形式表示的函数称作隐函数，其中 y 是 x 的函数.

(9) 基本初等函数及其性质(图形略)：

① 常数函数：$f(x) = C$ (C 为常数).

② 指数函数：$f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$，当 $a = e$ 时 $f(x) = e^x$. 运算性质有 $a^{x_1}a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, a^{x_1}/a^{x_2} = a^{x_1-x_2}, (a^x)^b = a^{bx}$.

③ 对数函数：$f(x) = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$，当 $a = e$ 时有 $f(x) = \ln x$(与 e^x 互为反函数) 运算性质有 $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$，$\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$，$\log_a x^y = y\log_a x$，$\log_a x = \log_b x/\log_b a$.

④ 幂函数：$f(x) = x^a$ (a 为常数).

⑤ 三角函数：

i) 正弦函数：$y = \sin x$，$\sin(-x) = -\sin x$，$\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

ii) 余弦函数：$y = \cos x$，$\cos(-x) = \cos x$，$\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

iii) 正切函数：$y = \mathrm{tg}x$，$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x$，$\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}x$.

iv) 余切函数：$y = \mathrm{ctg}x$，$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}x$，$\mathrm{ctg}(x + \pi) = \mathrm{ctg}x$，

$$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \mathrm{ctg}x,\quad \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{2} - x) = \mathrm{tg}x.$$

v) 正割函数：$y = \sec x$，$\sec(-x) = \sec x$，$\sec(x + 2\pi) = \sec x$.

vi) 余割函数：$y = \csc x$，$\csc(-x) = -\csc x$，$\csc(x + 2\pi) = \csc x$.

常用的三角函数公式：

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，$\sec^2 x = \mathrm{tg}^2 x + 1$，$\csc^2 x = 1 + \mathrm{ctg}^2 x$，$\sin 2x = 2\sin x\cos x$，$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$，$\sin 2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$，

$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$，$2\sin x\cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$，

$2\sin y\cos x = \sin(x + y) - \sin(x - y)$.

⑥ 反三角函数

i) 反正弦函数：$y = \arcsin x$ $(|x| \leqslant 1, |f(x)| \leqslant \frac{\pi}{2})$

ii) 反余弦函数：$y = \arccos x$ $(|x| \leqslant 1, 0 \leqslant f(x) \leqslant \pi)$

iii) 反正切函数：$y = \mathrm{arctg}x$ $(x \in R, |f(x)| \leqslant \frac{\pi}{2})$

iv) 反余切函数：$y = \mathrm{arcctg}x$ $(x \in R, 0 < f(x) < \pi)$

(10) 初等函数：

基本初等函数经有限次四则运算或有限次复合生成的函数称初等函数.

3. **极限**

(1) 数列的极限：如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$，总存在正数N，当$n > N$时，有$|y_n - A| < \varepsilon$恒成立，则称当n趋于无穷大时，数列y_n以A为极限. 记作$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$. 如果一个数列有极限，称这个数列是收敛的，否则称它是发散的. 数列y_n以A为极限，称数列y_n收敛于A.

(2) 函数的极限

①$x \to \infty$时，$f(x)$的极限：如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$，总存在一个正数M，使得当一切$|x| > M$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$恒成立，则称当x趋于无穷大时，函数$f(x)$以A为极限. 记作$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$. 类似地，可以定义$x \to +\infty$或$x \to -\infty$时$f(x)$的极限.

②$x \to x_0$时，$f(x)$的极限：如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$，总存在一个正数δ，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$恒成立，则称x趋于x_0时，函数$f(x)$以A为极限. 记作$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

$f(x)$在$x \to x_0$时以A为极限与$f(x)$在x_0处有没有定义无关.

类似地，可以定义$x \to x_0^-$或$x \to x_0^+$时$f(x)$的极限，称为x趋于x_0时$f(x)$的左极限或右极限. 记作$f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$或$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$成立的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

ii) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，而且$A > 0$(或$A < 0$)，则总存在一个正数$\delta$，使当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$f(x) > 0$(或$f(x) < 0$).

iii) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，而且$f(x) \geqslant 0$(或$f(x) \leqslant 0$，则$A \geqslant 0$(或$A \leqslant 0$).

(3) 无穷大与无穷小

① 无穷小量：以零为极限的变量，称为无穷小量，即对$\forall\, \varepsilon > 0$，变量$y$在某一变化过程中，总存在一个时刻，在该时刻以后有$|y| < \varepsilon$恒成立，记作$\lim y = 0$.

i) 如果α是无穷小量，y是有界变量，则$\lim \alpha y = 0$.

ii) $\lim y = A$成立的充分必要条件是：$y = A + \alpha$，其中α是无穷小量.

② 无穷大量：如果对于$\forall\, E > 0$，变量y在某变化过程中，总存在一个时刻，在该时刻以后，有$|y| > E$恒成立. 称变量y为无穷大量.

③ 无穷大与无穷小的关系

i) 如果变量y在某变化过程中是无穷大量，则$\dfrac{1}{y}$是无穷小量.

ii) 如果变量$y(y \neq 0)$在某变化过程中是无穷小量，则$\dfrac{1}{y}$是无穷大量.

(4) 无穷小量的阶：若α、β在同一过程中都为无穷小量.

① 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称$\beta$是比$\alpha$较高阶的无穷小量. 记作$\beta = 0(\alpha)$.

② 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$，($C$为常量)，则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小量. 特别地，当$c = 1$时，称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小量，记作$\alpha \sim \beta$.

③ 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 较低阶无穷小量.

(5) 极限的四则运算：设 $\lim f = A, \lim g = B$，其中 f，可以是函数，也可以是数列，则

① $\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g = A \pm B$；

② $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g = A \cdot B$；

③ $\lim(f/g) = \lim f/\lim g = A/B \quad (\lim g = B \neq 0)$.

(6) 极限存在的准则：

① 如果在某个变化过程中，三个变量 x, y, z 有关系 $y \leqslant x \leqslant z$，且 $\lim y = \lim z = A$，则 $\lim x = A$.

② 如果数列 $\{y_n\}$ 是单调有界的，则 $\{y_n\}$ 必有极限存在.

(7) 两个重要极限：

① $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；　　$\lim\limits_{\varphi(x) \to 0} \dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$；

② $\lim\limits_{x \to \infty}(1 + \dfrac{1}{x})^x = e$，　　$\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$，

$\lim\limits_{x \to \infty}(1 + \dfrac{k}{x})^x = e^k$，　　$\lim\limits_{\varphi(x) \to 0}(1 + \varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}} = e$，

4. 函数的连续性

(1) 函数的点连续：设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 与其等价的表达形式为 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，其中 Δx 为 x 在点 x_0 处的改变量，$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$，为相应 y 的改变量.

(2) 连续区间：如果函 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上每一点都连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，称 $[a,b]$ 为 $f(x)$ 的连续区间.

(3) 初等函数在其定义区间内是连续的.

(4) 闭区间上连续函数 $f(x)$ 的性质：

① 有界性：如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

② 有最大、小值：如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定有最大、小值.

③ 介值定理：如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 之间的任一实数 C，即 $(m < C < M)$，至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi) = C$.

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi) = C$.

④ 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在同一区间上连续，则它们的和、差、积、商在此区间上也连续(商的连续应假定分母在此区间上不取 0 值).

⑤ 设函数 $z = \varphi(x)$ 在 x_0 处连续，$z_0 = \varphi(x_0)$，函数 $y = f(z)$ 在 z_0 处连续，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处也连续.

(5) 函数的间断：

① 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义(x_0 可以除外)，如果 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续(即 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义，或无极限，或极限不等于函数值)，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断.

② 第一间断点：对于 $f(x)$ 在 x_0 点的左、右极限存在的间断点，称第一类间断点.

③ 不属于第一类间断点的间断点，称为第二类间断点.

三、题型与分析

1. 填空与选择

（1）填空：

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=$ ________

分析 此题可有多种解法.

方法 1 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1+1-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot 9$

$=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{2}=4.$

方法 2 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\cdot\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot 4=4.$

方法 3 原式$\overset{(\frac{0}{0})}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x+3\sin 3x}{2x}\overset{(\frac{0}{0})}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x+9\cos 3x}{2}=4.$

② $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{2+n}-\dfrac{n}{2})=$ ________.

分析 本题是数列的极限，先求出第一项的部分和，然后变形，即得解.

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{2+n}-\dfrac{n}{2})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n(n+1)-n(2+n)}{2(n+2)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-n}{2(2+n)}=-\dfrac{1}{2}$

③ 设 $f(x)=\dfrac{4x^2+3}{x-1}+ax+b$，若已知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 则 $a=$ ________.
$b=$ ________.

分析 先将 $f(x)$ 变形，有 $f(x)=\dfrac{4x^2+3}{x-1}+ax+b$

$=\dfrac{4x^2+3+ax(x-1)+b(x-1)}{x-1}=\dfrac{(4+a)x^2+(b-a)x+(3-b)}{x-1}$ 由已知，需使 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，则要求 $f(x)$ 的分子必须是 x 的 0 次多项式，从而有 $4+a=0$，$b-a=0$ 故得 $a=-4$，$b=-4$.

④ 设 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\begin{cases}x-\pi & x\leqslant 0\\ x+\pi & x>0\end{cases}$，则 $f[g(x)]$
$=$ ________，其连续区间为________.

分析 因为 $f[g(x)]=\sin[g(x)]=\begin{cases}\sin(x-\pi) & x\leqslant 0\\ \sin(x+\pi) & x>0\end{cases}=\begin{cases}-\sin x & x\leqslant 0\\ -\sin x & x>0\end{cases}$
$=-\sin x\quad x\in(-\infty,+\infty)$.

⑤ 设 $f(x)=(\dfrac{1-x}{1+x})^x$ 则 $\lim\limits_{x\to -1}f(x+1)=$ ________.

分析 令 $t=x+1$ 则有

$\lim\limits_{x\to -1}f(x+1)=\lim\limits_{t\to 0}f(t)=\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{1-t}{1+t})^t=e^{\lim\limits_{t\to 0}t\ln\frac{1-t}{1+t}}=e^0=1.$

（2）选择题：

① 设 $f(x-1)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 2 & x=0 \\ -\dfrac{\sin x}{x} & x>0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=(B)$.

$(A)-2$　　$(B)-1$　　$(C)1$　　$(D)2$

分析　令 $t=x-1$，则有 $\lim\limits_{t\to -1} f(t)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x-1)$ 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x-1)$

$=\lim\limits_{x\to 0^-} x-1=-1$，　$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x+1)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-\dfrac{\sin x}{x})=-1$，所以有 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$=-1$.

② 无穷大量与无穷小量的乘积一定是(D).

(A)无穷大量　　(B)有界变量　　(C)常数　　(D)以上结论都不对

分析　无穷大量与有界变量的乘积不一定是无穷大量. 例 1°，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=x$，$g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ 为有界变量，而 $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}\xrightarrow[(x\to\infty)]{}\infty$；

2°，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=x\to\infty$，$g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界变量，而

$f(x)\cdot g(x)=x\sin\dfrac{1}{x}\xrightarrow[(x\to\infty)]{}1$；

3°，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=x\to\infty$，$g(x)=\sin^2\dfrac{1}{x}$ 为有界变量，而

$f(x)\cdot g(x)=x\sin^2\dfrac{1}{x}\xrightarrow[(x\to\infty)]{}0$；

故应选 D.

③ 当 $x\to 1$ 时，函数 $y=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$ 的极限(B).

$(A)\infty$　　$(B)\dfrac{1}{2}$　　$(C)-\dfrac{1}{2}$　　$(D)2$

分析　本题是 $\infty-\infty$ 型的极限，先将 y 变形，即 $y=\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$，其极限应使用罗必塔法则.

$$\lim_{x\to 1}(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\overset{(\frac{0}{0})}{=\!=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

④ 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}=(C)$

$(A)0$　　$(B)1$　　$(C)\dfrac{1}{3}$　　$(D)\infty$

分析　本题是带有变上限积分的极限题. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x \sin t^2 dt=0$，$\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$，原式可使

用罗必达法则. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

⑤ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{7X}-e^{2x}}{x}=(B)$

$(A)9$ $(B)5$ $(C)7$ $(D)2$

分析 令 $u=e^{5x}-1$ 则 $x\to0$ 时 $u\to0$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{7X}-e^{2x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}(e^{5x}-1)}{x}=\lim_{u\to0}\frac{u(1+u)^{\frac{2}{5}}}{\frac{1}{5}e_n(1+u)}=5\lim_{u\to0}\frac{(1+u)^{\frac{2}{5}}}{\ln(1+u)\frac{1}{u}}=5.$$

[**注**] 本题可以使用罗必达法则.

2. **计算题**

(1)(94 年数学五)求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$

解 令 $t=\dfrac{1}{x}$,则原式 $=\lim\limits_{t\to0}[\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}\ln(1+t)]=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

(2)(94 年数学四)设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=0$,$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$,求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$.

解 令 $u=x^n-t^n$,则 $F(x)=\dfrac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)du$,有 $F'(x)=x^{n-1}f(x^n)$.

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{2nx^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{1}{2n}f'(0).$$

(3)(94 年数学三)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\text{tg}^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n})$.

解法一

$$\lim_{n\to\infty}\text{tg}^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+\text{tg}\frac{2}{n}}{1-\text{tg}\frac{2}{n}}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\text{tg}\frac{2}{n}}{1-\text{tg}\frac{2}{n}}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\text{tg}\frac{2}{n}}{1-\text{tg}\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\text{tg}\frac{2}{n}}{2\text{tg}\frac{2}{n}}\cdot\frac{4\text{tg}\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{1-\text{tg}\frac{2}{n}}}=e^4.$$

解法二

$$\lim_{n\to\infty}\ln\text{tg}^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{1+\text{tg}\frac{2}{n}}{1-\text{tg}\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\ln\left|1+\frac{1+\text{tg}\frac{2}{n}}{1-\text{tg}\frac{2}{n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{2\text{tg}\frac{2}{n}}{1-\text{tg}\frac{2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\text{tg}\frac{2}{n}}{\left[1-\text{tg}\frac{2}{n}\right]\cdot\frac{2}{n}}=4\quad\therefore\lim_{n\to\infty}\text{tg}^n(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n})=e^4.$$