高等学校辅导教材

新编高等数学题解（下册）

（第三版）

同济高等数学（四版）习题选解

是非题题解 · 综合题题解

王东生 周泰文 主编

王东生 周泰文 刘后邗 俞 政 编

华中理工大学出版社

高等学校辅导教材

新编高等数学题解

（第三版）

（下 册）

同济高等数学（四版）习题选解

是非题题解·综合题题解

王东生　周泰文　主编

王东生　周泰文　刘后邗　俞　政　编

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学题解(第三版)(下册)/王东生 周泰文 主编
武汉:华中理工大学出版社, 2000年1月
ISBN 7-5609-0902-7

Ⅰ. 新…
Ⅱ. ①王… ②周… ③刘… ④俞…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-题解
Ⅳ. O13

新编高等数学题解
(第三版)(下册) 王东生 周泰文 主编

责任编辑:李立鹏 封面设计:刘 卉
责任校对:戴文逻 监 印:张正林

出版发行:华中理工大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

经销:新华书店湖北发行所

录排:皇荣文化发展有限责任公司照排室
印刷:华中理工大学出版社沔阳印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:16.25 字数:390 000
版次:2000年1月第3版 印次:2000年1月第11次印刷 印数:100 001—110 000
ISBN 7-5609-0902-7/O·118 定价:18.00元

内 容 简 介

本书是学习工科“高等数学”,准备“高等数学”考试,以及“高等数学”教学的参考书．本书题解详细,很多题给出多种解法,并附有思路分析等内容,能起到深入学习“高等数学”的辅导作用．

本书分上下两册出版．下册内容为多元函数微分法及其应用;重积分;曲线积分与曲面积分;无穷级数;微分方程等．每章内容由四部分组成:①内容提要;②习题选解;③是非题题解;④综合题题解．

前　　言

“高等数学”是工科院校的一门重点基础课，近年来被许多部委和省市列为教学的重点评估课程之一．在全国硕士学位研究生考试中被指定为全国统考科目．每年有一大批新同学升入高等院校本科、专科、电大、职大、函大、夜大学习高等数学，他们渴望有一本切合实际的参考书；每年还有一批同志准备硕士学位研究生考试，他们渴望有一本针对性强的复习资料．本书编者根据多年来从事“高等数学”教学的经验，力图靠近这一目标．

本书分上、下册，每章由四部分组成：

第一部分是“内容提要”．书应该越读越薄，每一章中真正应该牢记并成为解题武器的内容其实并不多，这一部分就是为这方面准备的，特别对那些曾经学过高等数学，而又急于捡起这门课的同志，无疑将起到立竿见影的效果；

第二部分是“习题选解”．高等数学学习效果的一个重要标志是会不会做题．我们采用同济大学主编的“高等数学”第三版，对其中大部分习题（包括所有较难解和带 * 号的题）给出了解答．值得强调的是，我们采用该书的习题，是因为该书是我国高等学校使用量最大的一本数学教材；它在全国优秀教材评选中荣获国家教委一等奖；并被许多院校指定为研究生考试的复习教材．该书的习题难易适度，联系实际，比较准确地反映了学习高等数学应达到的水平．我们从多年习题课教学的经验出发，在许多习题的解答前后加了“思路分析”、“注意”，并且给出了多种解法．我们希望读者重视这些方面．在使用这部分时，初学者应该先独立思考，自己解答，然后与题解对照，做到理解原理、明确步骤、掌握方法和技巧．只有这样，才能有效地提高自己的解题能力．如果只是抄袭而不求理解，那就使我们大大地失望了；

第三部分是“是非题题解”. 在这一部分里,我们汇集了一些重要的正误判断题,弄清这些问题,学习就深入了一步;

第四部分是“综合题题解”. 培养学生解综合题的能力,是教学中的一个难点,针对这一点,我们编写了这一部分.

为了便于查找各章、各部分的题解,对题号的意义规定如下:

“习题”题号由表示章序、习题序、题序(小题序)的三个或四个数码构成,例如,4.4.1(2)是指同济“高等数学”(第三版)第四章习题 4-4 中第 1 题的第(2)小题,题解中所指教材,也都是指同济“高等数学”(第三版);

“是非题”题号由表示章序、题序的两个数码构成,加圆括号. 例如(4-6)是指本书中第四章是非题部分的第 6 题;

“综合题”题号由表示章序、题序的两个数码构成,加方括号. 例如[5-14]是指本书中第五章综合题部分的第 14 题.

由于水平有限,时间仓促,不足之处一定难免,恳请广大读者指正.

编 者

1994 年 5 月

第三版　　前　　言

本书自1994年10月出版以来，已发行10万余套，1996年2月被全国大学出版社协会评为“畅销书”并授予“荣誉奖”.

几年来，本书配合同济大学主编的《高等数学》(三、四版)及其他工科《高等数学》教材，对学生学习和考研者复习高等数学，均起到了积极的辅导作用；对教师备课和批改作业，亦提供了有益的参考. 深受广大学生和教师的欢迎.

考虑到同济教材习题中，有一些学生易于解答，有一些题型重复，为节省篇幅，我们精心仅选解了该书题量的63%(约)，并在是非题、综合题中增补了各种题型，以适应提高素质和应试需要.

为了更好地贯彻“科教兴国”战略，更有益于学习和备考，我们对第二版作了局部的修改和补充.

此次修订，使本书更具下述特点：

一、内容提要、习题选解比第二版更精炼；

二、是非题、综合题、试题选更贴近近年来各类考试的要求. 1997、1998两年全国硕士研究生入学统考数学1、2的全部试题已分别选入各章的综合题中. 1999年(研)数学1、2试题及解答已全部录入下册试题选中；

三、目录中简要标明了各节习题的内容，以便教学查阅.

关于题目的符号，除第一版中已有的说明外，本版对精选的研究生考题，都用方括号标明年份和卷别附于题后，如[98—1、2].

本版由王东生、周泰文主编，刘后邗、俞　政参加了修改工作.

借此机会，对广大读者、同行对本书的关切、支持，对华中理工大学出版社的同志为本书付出的巨大辛劳，表示衷心的感谢.

由于时间仓促，定有不妥之处，切望读者、同行指正.

编　者

1999年8月

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

一、内 容 提 要

本章内容与一元函数微分法有很多类似之处，学习时应对比一元，搞清异同．

1. 基本概念和性质

设点函数 $U=f(P)$，点 P 可以是 $1,2,\cdots,n$ 维的．当 $n\geqslant 2$ 时，称此函数为**多元函数**．定义域 D 与对应法则 f 为其两要素．

(1) $Z=f(x,y)$ 的图形 $M=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D, Z=f(x,y)\}$ 是空中一张曲面．

(2) $f(P)$ 在点 P_0 处的**二重极限**、**连续**、**可导**、**可微**的定义及关联．

$$\left[\begin{array}{l}\forall\ \varepsilon>0,\quad \text{必存在 }\delta>0\\ \text{当 } 0<|PP_0|<\delta \text{ 时}, |f(P)-A|<\varepsilon\end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{array}{l}\text{沿任何线路 } P\to P_0\\ (\text{或}(x,y)\to(x_0,y_0))\text{时,}\\ \text{的极限都存在且相等.}\end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \Longleftrightarrow \boxed{\text{极限}} \;\not\rightleftarrows\; \boxed{\text{连续}} \Longleftrightarrow \lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$$

$$\uparrow \ (\text{可微}\Rightarrow\text{连续})$$

$$\text{各偏导数都存在} \Longleftrightarrow \boxed{\text{可导}} \rightleftarrows \boxed{\text{可微}} \Longleftrightarrow \Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\searrow\underline{\text{偏导数连续}}\nearrow$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \triangleq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} \text{ 与 } \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \text{ 均存在}. \quad \boxed{\begin{array}{l}\text{全微分 } dz\triangleq A\Delta x+B\Delta y\\ \qquad =\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy\end{array}}$$

注意 1　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{\substack{P\text{沿某线}\\ \to P_0}} f(x,y)$ 仅当前者存在时，方能相等，

注意 2 二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$与二次极限$\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$不同.

(3)多元函数中极限、连续、偏导数的运算法则、全微分形式的不变性、初等函数的连续性、最值定理、介值定理均有与一元函数类似或相应的性质.

(4)方向导数

$\dfrac{\partial f}{\partial l}\triangleq\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$(是数量)

[此处,动点$(x+\Delta x,y+\Delta y)$在起点为(x,y)的向量l的方向上]

$=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$,[$\varphi$是从$x$轴正向到$l$方向的转角①]

$=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$[$\alpha$、$\beta$为$l$的方向角$\alpha=(\widehat{\boldsymbol{i},\boldsymbol{l}})$,$\beta=(\widehat{\boldsymbol{j},\boldsymbol{l}})$]

注意 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$是单侧极限,$\rho\to 0$时,由于$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,所以是$\rho\to 0^+$,而$\dfrac{\partial f}{\partial x}$是双侧极限,$\Delta x\to 0$时,$\Delta x$可正、可负.因此,$\alpha=0$时,$\dfrac{\partial f}{\partial l}$与$\dfrac{\partial f}{\partial x}$不一定相等;$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$时,$\dfrac{\partial f}{\partial l}$与$\dfrac{\partial f}{\partial y}$也不一定相等.

(5)梯度 $\mathbf{grad}f(x,y)\triangleq\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}=\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right\}$,是向量.

$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta\}=\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}\right\}\cdot\boldsymbol{l}^0$

$=\mathbf{grad}f(x,y)\cdot\boldsymbol{l}^0=|\mathbf{grad}f(x,y)|\cos(\widehat{\mathbf{grad}\,f,\boldsymbol{l}^0})$,

由此可知:当l的方向与梯度方向相同时,方向导数$\dfrac{\partial f}{\partial l}$达到最大值$|\mathbf{grad}f(x,y)|$.

---

① 按规定,$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{逆}}{\text{顺}}$时针方向旋转生成的角是$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{正}}{\text{负}}$角.转角与方向角可以相等,但不一定相等,转角可正,可负,但方向角$\in[0,\pi]$.

2. 求导运算

1° 复合函数求导

①若 $\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & u \arrow[r] \arrow[dr] & x \\ z=f \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & v \arrow[ur] \arrow[r] & y \\ & x & \end{tikzcd}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

②若 $\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & x \arrow[dr] & \\ z=f \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

注意 导数记号中"∂"与"d"的区别.

2° 隐函数求导

①若 $F(x,y,z)=0$ 确定一个两元隐函数 $z=z(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

②若 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 确定两个一元隐函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$，则不必显化，用复合函数求导及解方程组的方法即可求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

3° 高阶偏导数，仿一元，按指定自变量逐阶求. 求混合偏导数时，一般与求导次序有关，但是当 f_{xy} 与 f_{yx} 均连续时，则有 $f_{xy}=f_{yx}$.

注意 当 $z=f(x,y)$ 时，f、f_x、f_{xy} 均为 x,y 的函数. 当 $\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & u \arrow[r] \arrow[dr] & x \\ z=f \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & v \arrow[uur] \arrow[r] & y \end{tikzcd}$ 时，f、f_1、f_2、f_{12} 均为以 u,v 为中间变量 x,y 为自变量的复合函数.

3. 应用

(1)几何应用

1° 空间曲线 Γ: $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$ 在其上对应 t_0 的

点(x_0,y_0,z_0)处的切线方程为：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$；

法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

对于面交式曲线Γ,可将一自变量x看成参数,按上述方法求其切线及法平面方程；

2° 空间曲面$F(x,y,z)=0$,在其上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{(F_x)_0}=\frac{y-y_0}{(F_y)_0}=\frac{z-z_0}{(F_z)_0},$$

(此处,$(F_x)_0$表示偏导数$F_x(x,y,z)$在M_0处的值.)

切平面方程为$(F_x)_0(x-x_0)+(F_y)_0(y-y_0)+(F_z)_0(z-z_0)=0.$

对于显函数$z=f(x,y)$表示的曲面,可变为

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0$$

来求其切线及法平面.

(2)极值应用

1° 求一个二元函数的极值.

利用必要条件求出各驻点,再用充分条件逐点检验.

2° 求一个多元函数的条件极值

若目标函数为 $u=f(x,y,z)$

条件方程为 $\varphi_1(x,y,z)=0$; $\varphi_2(x,y,z)=0$.

令$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi_1(x,y,z)+\lambda_2\varphi_2(x,y,z)$,

解方程组 $\begin{cases}F_x=0,\\F_y=0,\\F_z=0,\\F_{\lambda_1}=0,\\F_{\lambda_2}=0,\end{cases}$ 求出x,y,z.

则(x,y,z)就是可能的极值点.再根据具体问题判定.

*(3)二元函数的泰勒公式和最小二乘法

二、习 题 选 解

习　题　8-1　基本概念

8.1.1　已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，　试求 $f(tx,ty)$.

解
$$\begin{aligned}f(tx,ty)&=(tx)^2+(ty)^2-tx\cdot ty\cdot\tan\frac{tx}{ty}\\&=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right)\\&=t^2f(x,y).\end{aligned}$$

8.1.3　已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解
$$\begin{aligned}f(x+y,x-y,xy)&=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}\\&=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}.\end{aligned}$$

8.1.4　求下列各函数的定义域：

分析　二元函数的定义域一般是平面区域，三元函数的定义域一般是空间区域.这些点集可用使函数有定义的自变量所应满足的不等式或不等式组表示．怎样去找用不等式或不等式组具体表示的这种区域呢？可用“试点法”. 以 $\varphi(x,y)>0$ 或 $\varphi(x,y)<0$ 为例，先用曲线 $\varphi(x,y)=0$ 将平面分为两个区域，在一个区域内任取一点 (x_0,y_0) 代入 $\varphi(x,y)$，如果 $\varphi(x_0,y_0)$ 为正，则在此区域内恒有 $\varphi(x,y)>0$；如果 $\varphi(x_0,y_0)$ 为负，则在此区域内恒有 $\varphi(x,y)<0$（读者可用反证法证明）.

(3)　$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

解　$y\geqslant0$ 和 $x-\sqrt{y}\geqslant0$，

即 $\quad x \geqslant \sqrt{y}, \quad x^2 \geqslant y,$

得 $\quad D=\{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 \geqslant y\}$，如图 8-1 所示．

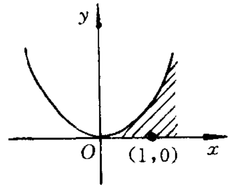

图 8-1

(6) $\quad u=\arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

解 $\quad x^2+y^2 \neq 0$，即 x,y 不同时为零；且 $\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant 1$，即 $z^2 \leqslant x^2+y^2$，所以有

$$D=\{(x,y,z) \mid z^2 \leqslant x^2+y^2, x^2+y^2 \neq 0\}.$$

8.1.5 求下列各极限：

分析 求多元函数的极限可利用函数的连续性和一元函数求极限的一些方法．

(1) $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{1-xy}{x^2+y^2}.$

解 用函数的连续性得

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{1-xy}{x^2+y^2}=\frac{1-0}{0+1}=1.$$

(3) $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}.$

解 用一元函数求极限的方法．

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})} \\ &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(5) $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}.$

解 用一元函数的重要极限．

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{y}=\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \lim_{x \to 2} x=1 \cdot 2=2.$$

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{4x^2y^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=+\infty.$$

8.1.6 证明下列极限不存在:

分析 因为二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$ 存在,是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数都无限接近于某常数 A. 所以证明极限不存在,只要 P 以某一特殊方式趋于 P_0 时,函数不趋于某一确定值,或以两个不同方式趋于 P_0 时,函数趋于不同的值,便可断定函数的极限不存在.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$.

证 如果动点 $P(x,y)$ 沿 $y=2x$ 趋于 $(0,0)$,则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=2x\to 0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x}{x-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{-x}=-3;$$

如果动点 $P(x,y)$ 沿 $x=2y$ 趋于 $(0,0)$,则

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=2y\to 0}}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{y\to 0}\frac{3y}{y}=3.$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x+y}{x-y}$ 不存在.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证 如果动点 $P(x,y)$ 沿 $y=x$ 趋于 $(0,0)$,则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4}=1;$$