

集成光学

下 册

《光学技术》编辑部 主编

金 锋 范俊清 编著

国防工业出版社

集成光学

下 册

《光学技术》编辑部 主编

金 锋 范俊清 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

《集成光学》一书由浅入深地论述了介质光波导的理论，并用耦合模理论统一论述了光波导器件的原理。全书共分三册。

本书是《集成光学》的下册，共三章。第六章和第七章扼要地介绍了光波导调制器和薄膜激光器的工作原理和制备工艺，并对上述各种器件的优缺点进行了评述。第八章简要地介绍了光波导探测器的工作原理，对探测器和探测器与激光器及光波导调制器的集成片等制备工艺亦进行了介绍。

本书可供从事集成光学和光纤通讯专业的科技人员和大专院校有关专业的师生参考。

集 成 光 学

下 册

《光学技术》编辑部 主编

金 锋 范俊清 编著

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₃₂ 印张 5¹/₄ 110千字

1983年5月第一版 1983年5月第一次印刷 印数：0,001—3,600册

统一书号：15034·2386 定价：0.57元

目 录

第六章	光波导调制器	1
§ 6.1	光波调制的一般问题	1
§ 6.2	用于光波调制的物理效应	8
§ 6.3	各向异性介质波导的耦合振幅方程	26
§ 6.4	光波导相位调制器	31
§ 6.5	干涉式强度调制器	40
§ 6.6	共线模式转换调制器	46
§ 6.7	非共线衍射调制器	55
§ 6.8	电光定向耦合调制器和开关	67
第七章	薄膜激光器	74
§ 7.1	激光器的一般原理	74
§ 7.2	结型半导体激光器	84
§ 7.3	分布反馈激光器	96
§ 7.4	分布布拉格反射激光器	113
§ 7.5	F-P 型薄膜激光器	122
§ 7.6	激光器和调制器的单片集成	129
第八章	光波导探测器	135
§ 8.1	p-n 结光二极管	136
§ 8.2	p-n 结雪崩二极管	147
§ 8.3	肖特基光二极管	149
§ 8.4	各种光波导探测器	151
§ 8.5	探测器同激光器和光波导的单片集成	159

第六章 光波导调制器

光波调制就是将电信号加在激光载波使之变成光信号的过程。光波调制按其调制方式分为内调制和外调制，内调制只适用于注入式半导体激光器，而外调制不仅适用于不能进行内调制的固体和气体激光器，且还适用于注入式半导体激光器的宽带调制。在以大容量光纤通讯和高速光信息处理为应用目标的集成光路中，因外调制速率大于内调制速率，故一般采用外调制。承担外调制功能的光导器件叫作光波导调制器，它可以起到导波光束的调制、开关和偏转等作用。光波导调制器的性能优于分立的块状调制器，它具有宽带、高速、低功耗和易于同其他光波导器件相连接等优点。

在这一章里，首先概述光波调制的一般概念和用于光波调制的物理效应。在此基础上叙述各种光波导调制器的工作原理和特性。本章叙述的光波导调制器主要有：相位调制器、干涉式强度调制器、模阶数和偏振转换器、衍射式调制器和电光定向耦合调制器。至于截止调制器^{[6.1][6.2]}、电吸收调制器^{[6.3][6.4]}、平面电光棱镜^{[6.5][6.6]}和双稳器件^[6.4]等光波导调制器，读者可以参阅有关文献。

§ 6.1 光波调制的一般问题^[6.7]

作为信息载波的激光具有振幅、强度、频率、相位和偏振等载波参数。利用电信号连续地改变任一载波参数均可以

实现光波调制,根据被调制的载波参数分别称为振幅调制、强度调制、频率调制、相位调制和偏振调制,而这些调制方式统称模拟调制。由于光探测器的输出电信号直接与入射光波的强度有关,而相位调制和频率调制必须采用外差接收来解调,在技术上比较复杂和困难,所以在光波的模拟调制中一般采用强度调制。

用电脉冲信号将连续的光载波改变成间歇的载波(即光脉冲),叫做脉冲调制。其中,光脉冲的持续时间、脉冲间隔和在脉冲持续时间内的其他载波参数均可以携带信息。此外,对光脉冲的“有”和“无”两个状态实现二进制编码,这样的调制方式叫作脉冲编码调制,又称数字调制。

下文不涉及模拟调制,脉冲调制和数字调制的具体技术问题,而是以相位调制和强度调制为例,简单叙述光波调制的一般概念和调制器的特征参数。

(1) 相位调制

经相位调制的光波叫作调相波,它的瞬时电场可表作

$$E(t) = A \cos[\omega t + \phi(t)] \quad (6.1.1)$$

式中 t 为时间, A 和 ω 分别为光波的振幅和角频率, 瞬时相位为 $\phi(t)$ 。 $\phi(t)$ 和归一化调制信号 $M(t)$ 的关系为

$$\phi(t) = \eta_s M(t) + \phi_0 \quad (6.1.2)$$

其中 ϕ_0 为起始相位, η_s 为调相指数。

对于正弦式调制信号 $M(t) = \sin \omega_m t$, 调相波电场为

$$E(t) = A \cos[\omega_c + \eta_s \sin \omega_m t + \phi_0], \quad (6.1.3)$$

式中 ω_m 为调制信号的角频率, 而调制频率为 $f_m = \omega_m / 2\pi$ 。设 $\phi_0 = 0$, 并由下述展开式

$$\begin{cases} \cos(\eta_\phi \sin \omega_m t) = J_0(\eta_\phi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\eta_\phi) \cos 2n\omega_m t \\ \sin(\eta_\phi \sin \omega_m t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(\eta_\phi) \sin (2n-1)\omega_m t \end{cases} \quad (6.1.4)$$

将式 (6.1.3) 展开成贝塞尔函数的级数

$$\begin{aligned} E(t) &= A J_0(\eta_\phi) \cos \omega t \\ &+ A \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\eta_\phi) [\cos(\omega + 2n\omega_m)t + \cos(\omega - 2n\omega_m)t] \\ &+ A \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(\eta_\phi) \{ \cos[\omega + (2n-1)\omega_m]t \\ &\quad - \cos[\omega - (2n-1)\omega_m]t \} \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

由此可见，调相波的电场包含一个基频项和无限多个边带项，它们的振幅由调相指数的贝塞尔函数确定。当 $\eta_\phi < \frac{\pi}{2}$ 时，只有基带和第一边带起主要作用。

(2) 相对相位调制和强度调制

单一光波的相位调制在集成光路中没有广泛的用途，但是两个光波之间相位延迟的调制可以用来构成比较实用的强度调制。

设沿同一方向传播并具有相等频率的两个调相波的瞬时电矢量为

$$\vec{E}_1(t) = \vec{A}_1 \cos[\omega t + \phi_1(t)] \quad (6.1.6)$$

$$\vec{E}_2(t) = \vec{A}_2 \cos[\omega t + \phi_2(t)] \quad (6.1.7)$$

式中 \vec{A}_1 和 \vec{A}_2 分别为两个光波的振幅矢量，且设两个光波的瞬时相位 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 均受同一调制信号 $M(t)$ 的调制。

$$\phi_1(t) = \eta_{1\phi} M(t) + \phi_{10} \quad (6.1.8)$$

$$\phi_2(t) = \eta_{2\phi} M(t) + \phi_{20} \quad (6.1.9)$$

若 $\eta_{1\phi} \neq \eta_{2\phi}$, 则两个调相波之间瞬时相位差为

$$\Delta\phi(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t) = (\eta_{2\phi} - \eta_{1\phi})M(t) + (\Delta\phi)_0 \quad (6.1.10)$$

式中 $(\Delta\phi)_0$ 为起始相位差。于是, 相位差 $\Delta\phi(t)$ 随调制信号 $M(t)$ 而改变, 这就是相对相位调制。

当 \vec{A}_1 垂直于 \vec{A}_2 时, 令 $E_1 = E_x$ 和 $E_2 = E_y$, 分别为沿 z 方向传播的单色平面波在 x 和 y 方向的电场分量, 则在式 (6.1.6) 和 (6.1.7) 中消去 t 后得到

$$\left(\frac{E_x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_2}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{A_1 A_2} \cos[\Delta\phi(t)] = \sin^2[\Delta\phi(t)] \quad (6.1.11)$$

这是一个椭圆方程, 描述一个椭圆偏振光。椭圆长轴与 x 轴的夹角 $\psi(t)$ 由下式给出

$$\operatorname{tg}[2\psi(t)] = \frac{2A_1 A_2 \cos[\Delta\phi(t)]}{A_1^2 - A_2^2} \quad (6.1.12)$$

当如下关系成立时

$$\left. \begin{aligned} \Delta\phi(t) &= m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \\ E_y/E_x &= (-1)^m A_2/A_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.1.13)$$

则式 (6.1.11) 变为直线方程, 故称为线偏振态。

当如下关系成立时

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_2 = A \\ \Delta\phi(t) &= \pm \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.1.14)$$

式 (6.1.11) 成为

$$E_x^2 + E_y^2 = A^2 \quad (6.1.15)$$

则为圆方程，故称为圆偏振态。 $\Delta\phi(t) = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ 称为左旋圆偏振， $\Delta\phi(t) = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi$ 称为右旋圆偏振。用复数表示电场分量： $E_x = A_1 \exp[j(\omega t + \phi_1)]$ 和 $E_y = A_2 \exp[j(\omega t + \phi_2)]$ 得到

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{线偏振} & E_y/E_x = (-1)^m A_2/A_1 \\ \text{右旋圆偏振} & E_y/E_x = \exp\left[-j\frac{\pi}{2}\right] = -j \\ \text{左旋圆偏振} & E_y/E_x = \exp\left[j\frac{\pi}{2}\right] = j \\ \text{椭圆偏振} & E_y/E_x = (A_2/A_1) \exp[j\Delta\phi(t)] \end{array} \right. \quad (6.1.16)$$

由此可见，这一光波的偏振态随着相位差 $\Delta\phi(t)$ (即随调制信号 $M(t)$) 改变而改变，故称之为偏振调制。它是相对相位调制的一种特例。

在 \vec{A}_1 垂直于 \vec{A}_2 情形下两个调相波通过偏振器 (其轴向与 \vec{A}_1 成 45°) 而相互干涉，或者 \vec{A}_1 平行 \vec{A}_2 的情形下两个调相波在调制器的输出处相互干涉，其合成波的瞬时电场均可写成如下形式

$$E_{12}(t) = A_{12}(t) \cos[\omega t + \phi_{12}(t)] \quad (6.1.17)$$

式中 瞬时振幅 $A_{12}(t)$ 和瞬时相位 $\phi_{12}(t)$ 都是随着调制信号 $M(t)$ 而变化的。在光波周期内，合成波的平均光强为

$$I(t) = [A_{12}(t)]^2 / 2 = (1/2)^{\rho'+1} \{ A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos[\Delta\phi(t)] \} \quad (6.1.18)$$

式中 $\rho' = 1$ 和 0 分别对应于 \vec{A}_1 垂直于 \vec{A}_2 和 \vec{A}_1 平行于

\bar{A}_2 。因合成波的光强随着相位差 $\Delta\phi(t)$ (即随着调制信号 $M(t)$) 变化而变化, 故称之强度调制。对于正弦式调制信号 $M(t) = \sin\omega_m t$ 不难证明: 由式 (6.1.17) 表示的调强波类似于调相波, 也包含有一个基带和无限多个边带。

(3) 强度调制的调制深度

在集成光路中, 导波的相对相位调制、定向耦合、二维衍射和偏振转换等均可构成强度调制, 但不管何种调制机构, 我们都可以统一用调制深度 (也称调制效率)、调制带宽、最大调制频率、单位带宽的驱动功率等来描述强度调制的性能。

调制深度 η_I 定义为:

$$\eta_I = \begin{cases} |I - I_0|/I_0, & I_0 > I_m \\ |I - I_0|/I_m, & I_m > I_0 \end{cases} \quad (6.1.19)$$

式中, I 为施加某一调制信号时的调强波光强, I_0 为无调制信号时的光强, I_m 为外加最大调制信号时的光强。对由式 (6.1.18) 所示的调强波光强, 当起始相位差为 $(\Delta\phi)_0 = 0$ 时, 其调制深度为

$$\eta_I = \frac{4A_1A_2}{(A_1 + A_2)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \quad (6.1.20)$$

由此可见, 调制深度取决于相位差, 并且当 $A_1 = A_2$, $\Delta\phi = (2m-1)\pi$, ($m = 1, 2, 3, \dots$) 时可以实现 100% 调制深度。在模拟强度调制中, 为了保持调强波的光强与调制信号的线性关系, 以避免光信号畸变, 起始相位差应当选择为 $(\Delta\phi)_0 = \frac{\pi}{2}$ 。

(4) 调制带宽和最大调制频率

对于强度调制, 调制带宽为调制深度 η_I 降到最大调制深度 $(\eta_I)_{\max}$ 的一半所对应的两个频率间隔, 记做 Δf , 而对

于相位调制, 调制带宽相位差和调制深度的等价关系来确定。调制带宽是度量光载波能够携带的信息容量的重要参数。电光调制器的调制带宽由器件的电容量和负载电阻值确定, 而声光调制器的调制带宽, 一般由声波通过光波束宽的渡越时间确定。

最大调制频率 f_{\max} 是中心调制频率的最大值。电光调制器的最大调制频率由光波通过调制器的渡越时间确定, 而声光调制器的最大调制频率则受电-声换能器带宽的限制。

(5) 单位带宽的驱动功率

无论相位调制或强度调制, 要把一定数量的信息加在光载波上就要消耗一定的功率。强度调制器的功耗可由单位带宽的驱动功率 $P_I/\Delta f$ (其量纲为 mW/MHz) 来描述, P_I 是实现某一调制深度 η_I 所需的驱动功率。相位调制器的功率可由 $P_\phi/\Delta f(\eta_\phi)^2$ (其量纲为 $\text{mW}/\text{MHz}\cdot\text{rad}^2$) 来描述, P_ϕ 是实现某一调相指数 η_ϕ 所需的驱动功率。为了比较强度调制器和相位调制的驱动功率, 取它们之间的等效关系, 即调制深度 $\eta_I = 84\%$ 对应于调相指数 $\eta_\phi = 2\text{rad}$, 然后比较它们间的功率即可。

$P_I/\Delta f$ 与调制区域的长度 L 和横截面积 S 的关系为

$$P_I/\Delta f \propto S/L \quad (6.1.21)$$

在光波导调制器中, S 取 $1 \times 10^{-6}(\mu\text{m})^2$ 数量级; 而在块状调制器中 S 取 $1 \times 10^2 \sim 1 \times 10^4(\mu\text{m})^2$ 数量级。两类调制器的 L 是相等的。因此, 光波导调制器的功耗比分立调制器小 $10 \sim 1000$ 倍。

(6) 光开关

光开关的基本功能是把光束从一个位置拨动到另一个位

置，以此实现“开”和“关”两种状态。光开关不仅可以用来构成开关网络，而且还可以用于脉冲调制和数字调制。光强制和束偏转器件均可用作光开关。

表征开关性能主要有消光比 r_s 和开关时间 τ_s 两个参数。

(A) 消光比：

$$r_s = \frac{I_{op} - I_o}{I_{op}}$$

式中 I_{op} , I_o 分别为光开关的“开”和“关”两种状态的输出光强。

(B) “开”和“关”两个状态相互转换所需时间叫做开关时间 τ_s ，其和调制带宽 Δf 的关系式可写作

$$\tau_s = 1/2\pi\Delta f \quad (6.1.22)$$

在脉冲调制中，单位时间内所通过的脉冲数称为调制速率，它由开关时间确定。

(7) 插入损耗

设进入调制器的光强为 I_{in} ，则插入损耗为

$$L_s = \begin{cases} 1 - I_m/I_{in}, & I_m \geq I_o \\ 1 - I_o/I_{in}, & I_o \geq I_m \end{cases} \quad (6.1.23)$$

插入损耗可用分贝 (dB) 表示。在集成光路中，一般要求它小于 1dB。

§ 6.2 用于光波调制的物理效应^{[6.8]~[6.10]}

实现光调制需要利用各种物理效应，如：电光效应、声光效应、磁光效应、电吸收效应、自由载流子吸收效应、电注入增益效应等。前三种效应是使调制材料的介电常数受到电场、声波和磁场等外场作用而发生变化，由此可以实现光

波的强度调制、束偏转和光开关等功能。后三种效应是使调制材料的吸收系数或增益系数随着调制信号的变化而变化，从而使光波强度直接得到调制。下面，在概述介电张量的基础上主要叙述前三种物理效应。

(1) 介电张量

光波调制器多半使用各向异性晶体，其中电场矢量 \vec{E} 和电位移矢量 \vec{D} 的关系为

$$\vec{D} = \hat{\epsilon} \cdot \vec{E} \quad (6.2.1)$$

或

$$\vec{E} = \hat{A} \cdot \vec{D} \quad (6.2.2)$$

式中 $\hat{\epsilon}$ 为介电张量， \hat{A} 为 $\hat{\epsilon}$ 的逆张量，即 $\hat{A} = [\hat{\epsilon}]^{-1}$ 。 $\hat{\epsilon}$ 和 \hat{A} 均是二阶对称张量，有六个独立的元素。在笛卡儿坐标系 x'_i ($i = 1, 2, 3$) 中， $\hat{\epsilon}$ 和 \hat{A} 的矩阵形式为

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (6.2.3)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (6.2.4)$$

式中 $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, $A_{ij} = A_{ji}$ (i 和 $j = 1, 2, 3$)。 $\hat{\epsilon}$ 和 \hat{A} 的元素之间的关系为

$$A_{ij} = \frac{\epsilon^{ij}}{\det[\hat{\epsilon}]} \quad (6.2.5)$$

$\det[\hat{\epsilon}]$ 是 $\hat{\epsilon}$ 的行列式， ϵ^{ij} 是 $\det[\hat{\epsilon}]$ 中元素 ϵ_{ij} 的代数余子式。

可利用坐标变换使 $\hat{\epsilon}$ 和 \hat{A} 均简化为对角矩阵

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \quad (6.2.6)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad (6.2.7)$$

式中 $\epsilon_i = \epsilon_{ii}$, $A_i = A_{ii}$, 且 $\epsilon_i = A_i^{-1}$ 。利用折射率 n 和介电常数 ϵ 的标量关系 $n^2 = \epsilon/\epsilon_0$ (ϵ_0 为真空介电常数), 则得

$$\epsilon_i = \epsilon_0 n_i^2 \quad (6.2.8)$$

$$A_i = (\epsilon_0 n_i^2)^{-1} \quad (6.2.9)$$

与 $\hat{\epsilon}$ 的对角矩阵相对应的坐标系, 称为晶体的主轴坐标系, 而 n_1 、 n_2 、 n_3 称为晶体的主轴折射率。

在主轴坐标系中, 七个晶系的介电张量形式为对角矩阵, 其介电常数存在如下关系:

三斜、单斜和正交晶系:

$$\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3 \quad (6.2.10 a)$$

三角晶系:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \quad (6.2.10 b)$$

四角和六角晶系:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3 \quad (6.2.10 c)$$

立方 (各向同性) 晶系:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \quad (6.2.10 d)$$

三斜晶系, 单斜晶系和正交晶系是双晶轴, 其三个主轴折射率均不相等 ($n_1 \neq n_2 \neq n_3$)。三角晶系, 四角晶系和六角晶系是单晶轴, 其两个主轴折射率相等 ($n_1 = n_2 \neq n_3$), 并记作

$$n_1 = n_2 = n_o, \quad n_3 = n_e \quad (6.2.11)$$

与 n_e 相对应的主轴称为单轴晶体的光轴，一般记作 z 轴或 c 轴。立方晶系在光学上是各向同性的，其三个主轴折射率完全相等 ($n_1 = n_2 = n_3$)。在集成光路中常用的 LiNbO_3 和 LiTaO_3 晶体属六角晶系，是单晶轴；而 GaAs 晶体属立方晶系，是各向同性晶体。

(2) 晶体的光学性质

晶体的光学性质可由麦克斯韦方程组推得：

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = 2\vec{D}/2t \\ \nabla \times \vec{E} = -2\vec{B}/2t \end{cases} \quad (6.2.12)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (6.2.13)$$

式中 \vec{E} 和 \vec{H} 分别为光波在晶体中的电场矢量和磁场矢量， $\vec{D} = \hat{\epsilon} \cdot \vec{E}$ ，且在非磁性介质中 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ 。（ μ_0 为真空磁导率）设光波为单色平面波，则

$$\vec{E}, \vec{D}, \vec{H} = (\vec{E}_0, \vec{D}_0, \vec{H}_0) \exp[j(\omega t - nk\vec{K}_0 \cdot \vec{r})] \quad (6.2.14)$$

式中 ω 为光波的角频率， $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 为真空中传播常数， n 为折射率， \vec{K}_0 为沿波矢方向的单位矢量， \vec{r} 为位置矢量。将式 (6.2.14) 代入式 (6.2.12) 和 (6.2.13) 得到

$$\begin{cases} nk\vec{H} \times \vec{K}_0 = \omega\vec{D} \\ nk\vec{E} \times \vec{K}_0 = -\omega\vec{B} \end{cases} \quad (6.2.15)$$

$$\begin{cases} \vec{K}_0 \cdot \vec{D} = 0 \\ \vec{K}_0 \cdot \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (6.2.16)$$

由此可见， \vec{K}_0 、 \vec{D} 、 \vec{H} 互为垂直； \vec{E} 垂直于 \vec{H} ，但一般不和

\vec{D} 平行, 即 $\vec{E} \cdot \vec{k}_0 \neq 0$ 。因此, 晶体在光学上的各向异性主要表现在其中传播光波时光波上每一点的 \vec{D} 和 \vec{E} 不平行, 即波矢量 $\vec{k} = nk\vec{k}_0$ (波前法线方向) 和玻印亭矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ (射线方向) 也不平行。

在式 (6.2.15) 中消去 \vec{H} , 得到与晶体折射率有关的方程

$$\hat{\epsilon} \cdot \vec{E} / \epsilon_0 = n^2 \{ \vec{E} - \vec{k}_0 (\vec{E} \cdot \vec{k}_0) \} \quad (6.2.17)$$

所以, 各向异性介质的折射率随波矢量方向而改变, 换句话说, 各向异性介质的折射率 n 是 \vec{k}_0 的函数。在主轴坐标系中, 将式 (6.2.1) 写成分量形式

$$n_i^2 E_i = n^2 \{ E_i - K_{0i} (\vec{E} \cdot \vec{k}_0) \} \quad (6.2.18)$$

式中 $i = 1, 2, 3$ 或 x, y, z ; 写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} n_1^2 - n^2(1 - K_{0x}^2) & n^2 K_{0x} K_{0y} & n^2 K_{0x} K_{0z} \\ n^2 K_{0y} K_{0x} & n_2^2 - n^2(1 - K_{0y}^2) & n^2 K_{0y} K_{0z} \\ n^2 K_{0z} K_{0x} & n^2 K_{0z} K_{0y} & n_3^2 - n^2(1 - K_{0z}^2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad (6.2.19)$$

使方程 (6.2.19) 有非零解的条件是它的系数行列式为零, 由此得到关于 n^2 的二次方程。可以证明, 这个方程一般存在两个不相等的实根, 分别记作 n' 和 n'' , 它们就是与矢量 \vec{k}_0 相对应的两个折射率。将 n' 和 n'' 代入式 (6.2.18) 得到两组与此相对应的比值: $(E'_x : E'_y : E'_z)$ 和 $(E''_x : E''_y : E''_z)$ 。再由关系式 (6.2.1) 得到相应的 $(D'_x : D'_y : D'_z)$ 和 $(D''_x : D''_y : D''_z)$, 这就是与 n' 和 n'' 分别对应的两个偏振态。于是, 在给定的晶体中沿着每一给定的波前法线方向 \vec{k}_0 允许两个平面波传播, 这两个波具有不同的折射率和不同的偏振态, 且相应的

射线方向也是不相同。另外可以证明，这两个偏振态的偏振面相互垂直，而只有在其光轴的特殊方向上波矢量 \vec{k} 和波印亭矢量 \vec{S} 的方向才能平行，且沿这个方向传播的光波的偏振态是不受限制的。

虽然利用式 (6.2.17) 完全可以弄清晶体的光学性质，但是人们常常使用几何方法直观地描述晶体的光学性质。我们知道，光波的能量密度为

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_{i,j} \left(\frac{1}{n^2} \right)_{ij} D_i D_j \quad (6.2.20)$$

设 $x_i = D_i / (2\omega\epsilon_0)^{1/2}$ 得到折射率椭球的方程

$$\sum_{i,j} \left(\frac{1}{n^2} \right)_{ij} x_i x_j = 1 \quad (6.2.21)$$

式中 $\left(\frac{1}{n^2} \right)_{ij} = \epsilon_0 A_{ij}$ 。在晶体的主轴坐标系中，有

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1 \quad (6.2.22)$$

由上式所示的折射率椭球示于图 6.1(a)，其中椭球的三个半轴分别为 n_1 、 n_2 和 n_3 ，如图 6.1(a) 所示，从椭球的中心出发作一波矢量 \vec{k} ，与此相垂直并经过中心作一平面，此平面与椭球面的交线构成一个椭圆，这一椭圆的两个半轴分别代表沿 \vec{k} 方向传播的平面波的两个折射率 n' 和 n'' ，而相应的两个偏振矢量 \vec{D}' 和 \vec{D}'' 分别平行于这一椭圆的两个轴，且 \vec{D}' 垂直于 \vec{D}'' 。

单轴晶体，在 $n_e > n_o$ 时称为正单轴晶体，而在 $n_e < n_o$ 时称为负单轴晶体，其折射率椭球是一个旋转椭球：