

27

52.7
225

流体力学与应用数学讲座 (4)

计算流体力学

朱家毓 讲授

赵国英 吴汉明 整理

ZK549/17

科学出版社

1990.12.5

内 容 简 介

本书内容包括：流体力学的偏微分方程及初边值条件，实用数值分析基础，数值耗散与弥散，数值分析中常遇到的几个问题，混合初边值问题，气体动力学中的数值方法，Navier-Stokes 方程的数值解，定常问题的解法，数值方法应用示例等。其中不少内容是作者近年来的研究成果。

本书概念清晰，内容丰富，深入浅出，可供高等院校应用数学、流体力学、计算数学、计算物理、大气海洋等专业师生，研究生及有关专业科技工作者参考。

流体力学与应用数学讲座 (4)

计算流体力学

朱家鲲 讲授

赵国英 吴汉明 整理

责任编辑 魏茂乐 杨 岭

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1985年11月第一版 开本：850×1168 1/32

1985年11月第一次印刷 印张：5 1/4

印数：0801—6,300 字数：136,000

统一书号：13031·296

本社书号：4214·13-2

定价：1.50 元

序 言

一九八二年五月至七月，中国科学院委托力学所在北京举办了第二次流体力学与应用数学讲习班。美国哥伦比亚大学应用物理与核工程系主任朱家鲲教授应邀在班上讲学，讲授的题目是“流体力学中的数值方法”。此书是根据朱教授的讲稿经过整理、补充写成的，并经他亲自修改。

本书的内容以差分法为主，比较详细地阐述了流体力学数值方法的基本原理、各种数值方法的性质、精度和虚假的物理现象，一些技巧和强调这些特点的结果，并指出当前的发展方向。全书采用模型方程分析的叙述方法，图文并茂，从简到繁，深入浅出地讲述了计算流体力学中出现的各种现象的本质、数值计算工作者经常碰到的困难和问题以及解决方法。此外，本书还给出了作者多年来积累的一些生动实例。这些都是同类书籍所不及的。

近年来，作者以此内容在上海交大和美国的一些大学作过多次讲演。这次他又增添了这门学科中的一些新进展，其中包括他本人尚未发表的工作。

前来参加本届讲习班的同志共二百多位，他们来自三十多个科研机构和高等院校。由于朱家鲲教授在计算流体力学方面作了不少研究工作，是一位站在前沿的学者，因此他的讲座能解决计算流体力学中经常碰到的一些具体问题，有助于对本学科的深入研究，使参加者颇有收益，从而受到讲习班同志的好评和欢迎。班内外同志曾多次要求将讲稿整理成书出版。这一点现在实现了。

借本书出版的机会，我们感谢朱家鲲教授为出版此书付出了辛勤的劳动，同时也热切期望包括科研单位和大中专院校中从事流体力学、计算数学、大气物理与海洋工程等方面的广大工作者和读

者,能从这本《计算流体力学》开拓视界,得到启发与提高,并把大家的工作推向前进。

周培源

1983年11月

目 录

第一章 绪论	1
§ 1 引言.....	1
§ 2 偏微分方程的适定性.....	3
§ 3 偏微分方程初值问题的数值解.....	4
§ 4 数值解的一个简单例子.....	6
§ 5 数值解的稳定性.....	12
第二章 流体力学的偏微分方程及初边值条件	15
§ 1 流体力学的偏微分方程组及其类型.....	15
§ 2 适定的流体力学问题初边值条件的提法.....	22
第三章 实用数值分析基础	32
§ 1 一个模型方程的差分化.....	32
§ 2 几个定义和 Lax 等价定理.....	35
§ 3 数值稳定性的分析方法和 von Neumann 条件.....	38
§ 4 常用差分格式的示例分析.....	42
第四章 数值耗散与弥散	48
§ 1 物理耗散与弥散.....	48
§ 2 数值格式的耗散与弥散.....	51
§ 3 物理耗散与数值耗散同时存在的情形.....	56
§ 4 耗散与稳定性.....	57
第五章 数值分析中经常遇到的几个问题	60
§ 1 隐格式和大时间步长.....	60
§ 2 追赶法简介.....	62
§ 3 方向交替法和分裂法.....	64
§ 4 非线性不稳定性.....	66
第六章 混合型初边值问题	73
§ 1 初边值问题中常见的几个问题.....	73
§ 2 初边值问题数值稳定性初论.....	76

§ 3	处理边界不稳定性的几个例子	78
§ 4	边值条件差分格式应用举例	80
第七章	气体动力学中的数值方法	86
§ 1	一维非定常流动的特征线理论	86
§ 2	激波关系	90
§ 3	人工粘性法	93
§ 4	随机选取法	97
§ 5	Lagrange 方法与 Euler 方法	102
§ 6	网格质点法	106
§ 7	隐格式与显格式	109
第八章	Navier-Stokes 方程的数值解法	112
§ 1	流函数涡量法	112
§ 2	二维轴对称流	117
§ 3	对大 Reynolds 数的限制	118
§ 4	大 Reynolds 数下的流函数涡量法	119
§ 5	用原始变量速度 u 和压力 p 作应变量的求解方法	121
§ 6	大 Reynolds 数下可压缩流体的 Navier-Stokes 方程的求解方法	123
§ 7	具有涡面的无粘流动——Hill 涡旋形成过程的数值研究	127
第九章	定常问题的解法	132
§ 1	非定常方程精度和定常方程精度的关系	132
§ 2	Poisson 方程的直接解法	135
§ 3	多重网格法	141
第十章	数值方法应用举例	145
§ 1	初值过滤法	145
§ 2	磁流体动力学中的多重尺度法	147
§ 3	关于孤立波的计算	152
参考文献		160

第一章 绪 论

§1 引 言

高速电子计算机的出现已使科学研究发生了影响深远的变化。自现代科学产生以来，科学研究都是用理论分析和实验测量进行的，可是现在它也可以用数值方法来进行了。由于理论分析，实验研究和数值方法(或数值模拟)各自最适宜解决的问题并不相同，因此这三种方法的灵活使用起着互为补充相得益彰的作用，并能促使人们迅速建立某些物理观念。恰当地使用数值分析不仅能使我们理解和解释实验，而且也能使理论给出有效的预测并得以推广。

流体力学是一门古典的学科，它的发展历史悠久，因此分析方法和实验手段都比较成熟。然而流体力学恰好也是一个从数值分析得益最深的领域，这里包含着深刻的内在因素。

众所周知，实验结果较为真实，它是理论分析和数值方法的基础，因此从原则上讲，实验的重要性不容低估。然而，实验方法往往受到一定的限制，首先要受到模型尺寸的限制，例如，为了模拟真实流动，安排实验时最好使几个无量纲参数都能满足要求，但这在实际上总会遇到困难。对这些无量纲参数，我们只能择其主要牺牲其余。其次是实验还要受到边界的影响，如一架飞机在无穷大的空间中飞行，用风洞模拟这种情况时要受到洞壁的干扰。此外，在实验中，杂质和测量本身都会影响所得的结果。另一方面，实验往往耗费大量人力、物力，因此经常遇到许多困难。

理论分析的优点在于所得的结果清晰、普遍，许多流动的解析解与实验结果一样对于流体力学及其发展是极其有价值的。但是它的研究对象在物理性质上必须简单，在几何表现上必须很规则，

而且常常是针对线性的控制方程的,对于非线性的情况,只有少数流动才能给出解析结果。

尽管流体力学方程是非线性的,因而难于进行理论分析,然而制约它的物理规律却比较简单,而且相对地讲,流体力学的非线性方程组在形式上并不十分复杂,通常它们的类型都很标准,因此很适合于数值计算。表 1.1 列出的各种情况下流动方程的类型便深刻地说明了这一点。

表 1.1 各种情况下流体力学方程的类型

流 动	方程类型
位势流	拉普拉斯
非定常可压缩无粘流	双曲型
非定常可压缩粘性流	抛物型
非定常不可压缩粘性流	抛物型
非定常不可压缩无粘流	除特殊情况外,非标准
定常亚音速流	椭圆型
定常超音速流	双曲型
定常跨音速流	混合型

经过计算流体力学家们的长期努力,这个领域已取得了许多重要的进展,不仅建立和开创了许多理论和方法,而且使流体力学这门包含着丰富物理现象的学科取得了许多重要的进展。今天,数值方法已发展成了流体力学不可缺少的三种重要手段之一了。

过去几十年间,正当计算力学的应用范围日益广泛之时,这门科学与艺术偶然也遭到了某些不恰当的非议,一些理论家把计算看作是一种简单的例行公事,因而他们仍然趋向于低估它对智力发展的作用和它必将飞速发展的灿烂前景;而一些专业人员则往往忽视它的精度,高估了它的正确性。

我们在这里不是去罗列一些计算方法及其结果,而是试图比较详细地阐述现代计算流体力学的概貌及其基本原理。我们将研究数值分析的性质和困难,精度和虚假的物理现象,一些技巧,以及说明和强调这些方面的例子。

§ 2 偏微分方程的适定性

与常微分方程论中类似,我们可以求出偏微分方程的“通解”,但是可以得到通解的情形是十分稀少的,而且即使求到了,对回答实际问题也很少有帮助. 在应用中,我们通常要求一个解,它除了满足微分方程外,还要满足某些附加的要求,例如边值条件或初值条件. 我们知道,常微分方程的解常常可以通过适当确定通解中的任意常数来求得. 对于偏微分方程,这只在一些例外情况才是可能的,其原因之一是它的通解中包含的是任意函数而不是常数. 因此,对与偏微分方程有关的物理问题,我们通常不仅要给出微分方程,还要同时考虑初始条件和边界条件等.

1920年, Hadamard 着重指出,只有在一定的意义下偏微分方程的初值或边值问题才是适定的 (well-posed). 这就是解必须存在、唯一、并且连续依赖于数据. 如果发现一个具有物理来源的数学问题是不适定的,那么,这往往表明它的表述是不正确的.

下面我们给出一个反例,以说明适定性对偏微分方程求解的重要性.

如果我们要求解一维波动方程

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

同时给定初值 $u(x, 0)$ 和 $u_t(x, 0)$, 那么,根据我们关于数理方程的知识可知,问题是适定的. 或者我们来求解椭圆型方程

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

并要求其解在 $x-y$ 平面内某封闭区域的周线 l 上满足一定的边界条件(要求 u 或 u 的法向导数等于某一给定值), 那么问题也同样是适定的. 但是,如果我们在 $x-t$ 平面上(图 1.1)给出的方程为

$$u_{xx} + u_{tt} = 0,$$

而且初值条件为

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0,$$

那么在 $x-t$ 的上半平面求解 Laplace 方程会不会出现什么问题呢？回答是如果我们把所给的条件稍加改变，例如，

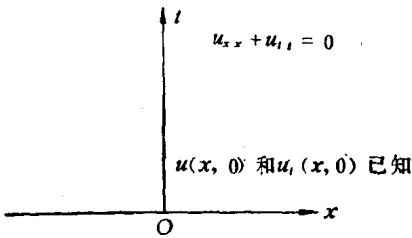


图 1.1 适定性问题的反例

所给的 u 与 u_t 是周期性的，那么，当 $t > 0$ 时，解就会在任何一点有无穷大的改变。例如，若令

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = \frac{1}{n} \sin nx,$$

利用分离变量法可求出方程的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sh} nt \sin nx.$$

上式满足 Laplace 方程，也满足初始条件，因此解是唯一存在的，所以看起来问题似乎是适定的。但是，若再令 $n \rightarrow \infty$ ，则 $u(x, 0) \rightarrow 0$ ， $u_t(x, 0) \rightarrow 0$ ，按理这时的解也应该是 $u(x, t) \rightarrow 0$ （因为当 $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ 时， $u(x, t) \equiv 0$ ）。然而当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\operatorname{sh} nt \rightarrow \infty$ ， $\forall t > 0$ ，所以在任何 $t > 0$ 的时刻， $u(x, t) \rightarrow \infty$ 。这样就无解对数据的连续依赖性可言了，也就是说，问题是不适定的。这种情况往往对我们十分有害。譬如，我们为了确定一个物理问题的初始条件，常常试图利用从某个试验得到的数据去给出。但试验的测量结果总会有一点误差，按照上面的解答，这种误差就会不断放大，以致最后变成无穷大。因而 Hadamard 关于微分方程适定性的定义中严格规定，解必须连续依赖数据。

§ 3 偏微分方程初值问题的数值解

首先我们来回答何谓求一个问题的解。在古典意义上讲，解一个问题实际上指的是求出一个满足方程及其初边值的封闭形式的公式（它可以是一个冗长而又复杂的函数），称为封闭解。专求

这种封闭解在具体计算数值时往往有很大的缺点。一般说来，封闭解只有在方程和初始数据极简单时才能得到。但是，实际的物理和工程实践中真正有用的问题，其边界条件往往相当复杂，这时一般就不可能得到封闭解。另外，有时候即使可以求出来，也可能是一个极其繁复的公式，等到要算出一些数值，也许还得花极大的精力。

在有了电子计算机以后，人们关于解的观念已逐步发生了改变。求解一个问题往往按照下列步骤来进行。

1. 首先必须证明问题的表述是适定的。一般，唯一性的证明比较容易，但存在性的证明却是一件极为困难的事，因而对于后者我们在本书中不作讨论，而是留给纯粹数学家在代表性的情况下去完成。作为计算流体工作者，我们总是根据纯粹数学家们的这些工作去对力学问题作出数学表述，并且总希望问题的这种表述是适定的（虽然一般情况下不能加以证明）。

2. 利用纯粹数学的知识去描述或推测解的各种性质。例如，我们知道，对于双曲型方程，它的解可能有弱间断面或强间断面（激波），而两者的区别在于弱间断面出现在线性或非线性方程中，强间断面（激波）出现在非线性方程中。又如解椭圆型方程时，它们的解总是极为光滑，有无穷多阶导数，甚至是解析的（可以把它按 Taylor 级数展开，在一定的范围内收敛）。如果我们先研究一下这些解的性质，这就会在直觉上对我们求解方程有很大的帮助。

3. 寻求一种真正有用的求近似解的方法。这里有很多可供人们选择的自由。我们可以采用有限差分法，也可采用有限元法，或者去用 Rayleigh-Ritz 方法等等。总之，把一个偏微分方程组或常微分方程组变成一个代数方程组，而且最好是线性代数方程组，也可说是对于一个无限维函数空间，我们用一个有限维函数子空间来近似，把一个定义在无限维函数空间中的微分算子，用一个有限维函数子空间中的算子来近似。显然，在这一过程中我们必然会遇到三个问题：（1）必须保证代替适定问题微分方程组的近似

代数方程组也是适定的，如若这些近似方程组的未知变量数目与方程个数不相等，则近似方法便毫无意义；(2)要设计一个真正有用的求解代数方程的方法；(3)我们还可以考虑计算复杂性，也就是设法用软件去使计算时间大大缩短。现在，这第三点正是计算工作者们遇到的一个相当普遍的问题。但是我们在本书中将不去详细讨论。

4. 近似解和精确解之间的关系。尽管我们的近似方程与用它所代替的微分方程表面上极为相似，但它们的解可以相差很远，甚至毫不相关。所以对这一关系的研究是十分重要的。对于近似方程，往往有一个表征其近似程度的参数 h (对于有限差分法，它可以是网格的大小，对于有限元，它可以是最大有限元的直径)。我们希望，当 $h \rightarrow 0$ 时，(i) 近似解必须有界；(ii) 近似解趋向于精确解，即具有收敛性；(iii) 对于有限的 h ，近似解必须有一定的精度。

§ 4 数值解的一个简单例子

我们举一个例子具体说明上述各个观念。我们假定在图 1.2 的区域 D 上，Laplace 方程成立，即

$$\nabla^2 u = 0,$$

并满足边界条件

$$u|_r = f(s),$$

其中 s 是从边界 B 上某点算起的弧长。

关于 Laplace 方程边值问题解的存在性，我们这里不去证明，读者可以在标准的偏微分方程书籍中找到。关于解的唯一性，我们简要地作如下的证明。

如所周知，对于任何满足 Laplace 方程的函数（通称调和函数），有一个中值定理和极值原理。中值定理指出，如果 u 在以 A 为圆心 r 为半径的圆上（见图 1.3）满足 Laplace 方程，那么在 A 点的值等于圆周上的中值，也等于整个圆上的中值。这个定理的证

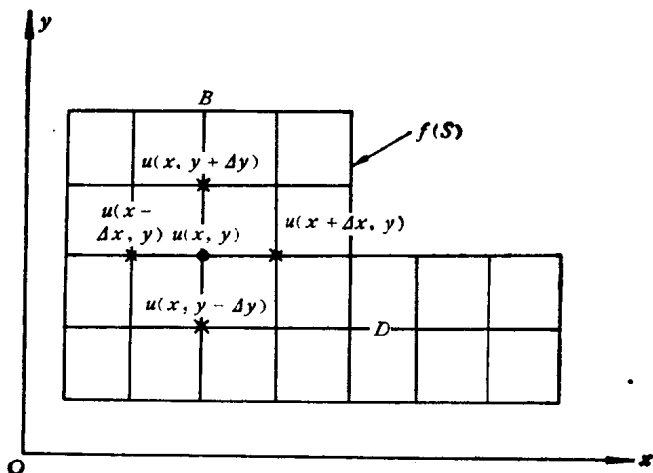


图 1.2 Laplace 方程边值问题差分法示意图

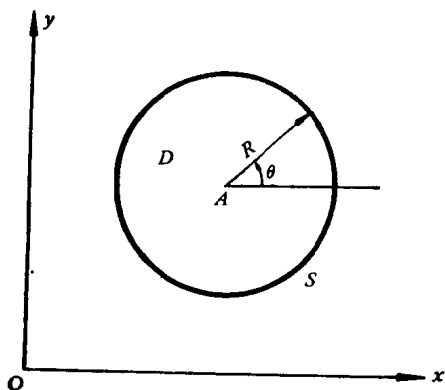


图 1.3 中值定理证明示意图

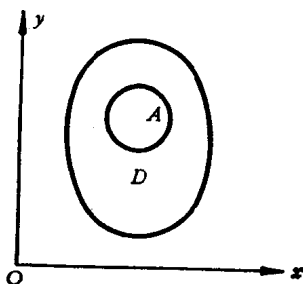


图 1.4 极值原理证明示意图

明极为简单,我们知道,

$$M(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) d\theta$$

是 u 在周线上的平均值,其中 r 和 θ 如图 1.3 所示。我们取 $M(r)$ 对 r 的导数,并利用 Gauss 定理得到

$$\frac{dM(r)}{dr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi r} \iint_D \Delta u dx dy$$

$$= 0.$$

这就证明了中值 M 与 r 无关, 只与 u 在圆周上的值有关. 同时, 当 $r \rightarrow 0$ 时, $M(r)$ 即为 u 在 A 点的值, 因而

$$u(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) d\theta.$$

即是 u 在圆周上的平均值.

由上式可得

$$\iint_D u(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R u(r, \theta) r dr d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^R u(A) r dr$$

$$= \pi R^2 u(A).$$

所以

$$u(A) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_D u(x, y) dx dy,$$

即是 u 在整个圆中的平均值, 于是中值定理得证.

对于任何封闭区域 D , 图 1.4, 如果 u 在上面满足 Laplace 方程, 若假定 u 在区域 D 的某内点 A 上达极值, 则我们将总可以在 D 中作一个以 A 为圆心、 R 为半径的圆, 利用中值定理可知, $u(A)$ 是这个圆周上 u 值的平均值, 因而, u 必在圆周上达极值, 这与假设矛盾, 故 u 只能在周线上达极值, 这就是极值原理.

有了极值原理, Laplace 方程解的唯一性就容易证明了. 若 u_1 与 u_2 都满足 Laplace 方程, 而且在边界上取值相同, 即

$$\nabla^2 u_1 = \nabla^2 u_2 = 0,$$

$$u_1|_r = u_2|_r = f(s).$$

若令 $V = u_1 - u_2$, 则

$$\nabla^2 V = 0,$$

$$V|_r = 0.$$

因为 V 在边界 B 上取极值, 故 $V \equiv 0$, 即

$$u_1 \equiv u_2.$$

至于对数据的连续依赖性,利用极值原理也极易证明,因为如果我们把边值 $f(s)$ 改变 $\pm \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$),则由极值原理,解 u 的改变不可能大于它们在边界上的改变 $\pm \varepsilon$ 的绝对值 ε .

由于 u 满足 Laplace 方程,它是调和函数,因而它有无穷多阶导数,并可在任意区域内展开成收敛的 Taylor 级数. 这些极为重要的性质,读者也可以在有关的偏微分方程教科书中找到.

现在我们采用差分近似方法来求解这个问题. 由于所给的区域形状比较简单,我们在区域上画两组分别平行于 x 轴和 y 轴的直线,构成长方形的网格覆盖整个区域,平行于 y 轴的各直线间的间隔长度为 Δx ,平行于 x 轴的各条直线的距离为 Δy . 我们把 Δx 与 Δy 称为 x 和 y 方向的步长,网格的交点称为结点,在边界上的结点称为边界点,边界内部的点称为内部结点,简称内点.

我们先令 $\Delta x = \Delta y$, 并考虑如下的差分格式(有关这种格式的构造过程暂时略去),

$$u(x + \Delta x, y) + u(x - \Delta x, y) + u(x, y + \Delta y) + u(x, y - \Delta y) - 4u(x, y) = 0. \quad (1.1)$$

显然,在每个内点 (x, y) 上,就有一个未知数 $u(x, y)$, 而对于每一个内点都可写出一个上述形式的方程. 于是, N 个内点,就有 N 个未知数和 N 个方程,而且是线性方程.

关于这样一个线性方程组的解的存在性和唯一性,用中值定理和极值原理是很容易证明的. 这时,我们可以把方程(1.1)看成是原微分方程的代表,但也可以把 $u(x, y)$ 看作 u 在 (x, y) 点的四邻各点上的中值. 因而也就可以推出与此相关的极值原理,并按照与原问题同样的方式,推出解的唯一性与它对数据的连续依赖性. 但是对于有限向量空间,方程组解的唯一性就等于它的存在性,所以这样近似方程的适定问题也就得到了完全的证明.

如果 $\Delta x \neq \Delta y$, 则差分格式成为

$$\frac{u(x - \Delta x, y) + u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y)}{(\Delta x)^2}$$

$$+ \frac{u(x, y + \Delta y) + u(x, y - \Delta y) - 2u(x, y)}{(\Delta y)^2} \\ = 0.$$

若令 $\beta = \Delta x / \Delta y$, 便得

$$u(x, y) = \frac{u(x - \Delta x, y) + u(x + \Delta x, y)}{2(1 + \beta^2)} \\ + \frac{\beta^2 [u(x, y - \Delta y) + u(x, y + \Delta y)]}{2(1 + \beta^2)} \quad (1.2)$$

上式仅不过是另一种带权的平均方法, 所以也是一个中值定理, 且也可推出相应的极值原理. 采用与上述 $\beta = 1$ 相同的方法, 立即可证明这样一种离散化的方法得到的问题也是适定的.

下面采用一种迭代方法(这并不一定是最好的办法, 但极为普遍和简单), 求解上述代数方程组, 并证明它的收敛性. 我们可以把 N 个内点上的未知量写成一个列向量

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix},$$

其中下标是按照它们迭代先后的次序排列的. 因此按照(1.1), 某内点 i 上的值可用下式求得

$$u_i = \frac{1}{4} (u_{i+1} + u_{i-1} + u_{i-k} + u_{i+k'}) + f_i, \quad (1.3)$$

其中

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

上式中下标 k 和 k' 的选取保证 u_{i-k} 和 $u_{i+k'}$ 分别就是前面的 $u(x, y + \Delta y)$ 和 $u(x, y - \Delta y)$, 在 u_i 为完全的内点时 $f_i = 0$, 在 u_i 为邻近边界点的内点时, f_i 就是有关边界点上的 u 的已知值.

我们采用 Liebmann 给出的迭代方法(这种方法也称为 Seidel 迭代), 首先把一组初值赋给各内点上的 u , 然后开始迭代. 但是在求 u_i 时, 右端项中凡是已算得了新值的点, 都用它们的新值代

人,否则便使用旧值,这就是

$$u_i^{(n+1)} = \frac{1}{4} (u_{i-1}^{(n+1)} + u_{i+k}^{(n+1)} + u_{i+1}^{(n)} + u_{i+k'}^{(n)}) + f_i,$$

其中上标 n 表示第 n 次迭代后的值,当然我们还可以在上式中把右端带上标 $(n+1)$ 的值用带有上标 n 的值去代替. 于是

$$u_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} u_j^{(n)} + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} f_j, \quad (1.4)$$

其中 α_{ij} 和 β_{ij} 是由上述代替过程得到的系数,如果上式收敛,则

$$u_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} u_j + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} f_j, \quad (1.5)$$

其中 u_i 是 $n \rightarrow \infty$ 时 $u_i^{(n)}$ 的极限. 由于我们已证明 u_i 是唯一存在的,因此把上两式相减,并利用 $\alpha_{ij} > 0$, 再引进

$$\theta = \max_i \sum_{j=1}^N \alpha_{ij},$$

可得

$$\begin{aligned} |u_i^{(n+1)} - u_i| &= \left| \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (u_j^{(n)} - u_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \max_j |u_j^{(n)} - u_j| \\ &< \theta \cdot \max_j |u_j^{(n)} - u_j| \\ &< \theta^2 \cdot \max_j |u_j^{(n-1)} - u_j| \\ &\quad \vdots \\ &< \theta^n \cdot \max_j |u_j^{(0)} - u_j|, \end{aligned} \quad (1.6)$$

Loewner 证明, $\theta < 1$ ¹⁾, 因而在 $n \rightarrow \infty$ 时上式右端趋向零, 由此可

1) Loewner 采用一个很巧妙的数值实验证明了 $\theta = \max_j \sum_i \alpha_{ij} < 1$; 如果我

们把所有边界点上的 u 取作零, 而把内点上的 u 取为 1, 然后从某个与边界相邻的内点开始迭代, 不难算出, 对于所有的内点 i 都有

$$\theta = \max_j \sum_{i=1}^N \alpha_{ij} < 1. \quad (1.6a)$$