CE DULUN JICHU

测度论基础

刘文 著

辽宁教育出版社

测度论基础

刘 文 著

辽宁教育出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 朝阳六六七厂印刷

字数：157,000 开本：850×1168 1/32 印张：7
印数：1—4,000
1985年7月第1版 1985年7月第1次印刷

责任编辑：王常珠 俞晓群 责任校对：王淑芬
封面设计：周咏红

统一书号：7371·2 定价：1.30元

序　言

测度论是数学的一个重要分支，它在现代数学中有着广泛而深刻的应用。特别是近代概率的数学理论，是建立在测度论基础上的。对于数学专业尤其是概率专业的学生来说，测度论已成为必需的基础知识。

最近几年，作者曾有两次在全国性的讲习班讲授测度论这门课程。一次是1979年全国第一届应用概率讨论会（西安）；另一次是1981年全国工科院校概率论讲习讨论会（天津），本书是在这两次讲习班的讲稿基础上经过较大的修改与补充而成的。本书的取材主要是针对学习概率论的需要，叙述上自成体系，除了要求读者具有较好的分析基础外，并不需要其它的准备。没有学过实变函数论但具有一定抽象能力的读者，也可以直接阅读本书。

作者谨此对王梓坤教授表示衷心的感谢，他的意见对作者有很大的启发和帮助。还要感谢纪延瑞教授对本书写作的关心和支持，以及他们对书稿的审阅和推荐。

限于水平，书中一定还存在缺点和错误，敬请读者批评指正。

刘　文

1984年于天津

目　录

第一章 集 与 类

§1·1 集和集的运算

1. 集 的 概 念

集是数学中最基本的概念之一．所谓一个集，就是由一些不论什么样的对象所组成的总体．组成一个集的对象叫做这个集的元素．例如，某个城市的全体居民构成一个集，某图书馆的全部藏书构成一个集，全世界所有的国家构成一个集，等等．数学里也常常碰到各种各样的集，例如，全体自然数的集，直线上所有点的集，等等．

我们用大写字母表示集，用小写字母表示元素．若事物 a 是集 A 的一个元素，则记为

$a\in A$（读作"a 属于 A"）

若 a 不是 A 的元素，则记为

$a\notin A$（读作"a 不属于 A"）

例如，设 N 是全体自然数的集，R 是全体实数的集（除非另有说明，本书中 N 与 R 恒分别表示这两个集），则

$$1\in N,\quad \frac{1}{2}\notin N$$

$$\sqrt{2}\in R,\quad \sqrt{-1}\notin R$$

由有限个元素所构成的集，称为**有限集**；由无限多个元素所构成的集称为**无限集**．

为了方便起见，我们引进空集的概念．不包含任何元素的

集称为空集，并用符号 ϕ 表示。

例如，设 A 是某个班的全体女生的集，如果这个班没有女生，则 A 就是空集。

如果集 A 与集 B 由相同的元素组成，则称 A 与 B 相等，并记为 $A=B$。

例如，设 A 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集，B 是数 1 与 2 所组成的集，则 $A=B$。

我们常用以下几种方法表示集：

（1）在花括号中写出元素的名称或指明元素的范围。

例如，{正整数}，{大于1的实数}，{天津居民} 分别表示由全体正整数，大于 1 的全体实数和天津的全体居民所构成的集。

（2）列举法：写出集的所有元素，或按一定的规律写出它的部分元素后加上删节号"…"，并用花括号把它们括起来。

例如，$\{1, 2, 3\}$ 表示由数 1，2，3 所组成的集，这个集也可用 $\{2, 1, 3\}$，$\{3, 1, 2\}$ 等记号表示。由 1 到 100 的所有自然数的集可以表示为 $\{1, 2, \cdots, 100\}$。

所有正偶数的集可以表示为

$$\{2, 4, 6, \cdots\}$$

（3）描述法：在花括号中先写出元素的符号，然后画一竖线，在竖线后面写明元素所满足的条件（或所具有的性质）。例如，

$$\{x \mid x \in N, 1 \leqslant x < 4\} = \{1, 2, 3\}$$

$$\{y \mid y = n^2 + 1, n \in N, 1 \leqslant n \leqslant 3\} = \{2, 5, 10\}$$

$$\{2n \mid n \in N\} = \{\text{正偶数}\}$$

$$\{x \mid x \in R, 2 \leqslant x \leqslant 4\} = [2, 4]$$

$$\{\omega \mid \omega^2 - 3\omega + 2 = 0\} = \{1, 2\}$$

定义1　如果集合A的每一个元素都是集合B的一个元素，则称A是B的**子集**，并记为

$$A\subset B \text{或} B\supset A$$

（读作"B包含A"或"A被B包含"）。

例如，设Q是全体有理数的集，则

$$N\subset Q,\ Q\subset R$$

或记为

$$N\subset Q\subset R$$

我们规定空集ϕ是任何集的子集，即对任何A，$\phi\subset A$。

由以上的定义知，$A=B$的充要条件是

$$A\subset B \text{ 且 } B\subset A$$

由子集的定义显然有$A\subset A$，即A是它自身的子集．如果$A\subset B$，而B中确有元素b不属于A，则称A是B的**真子集**．

必须将以某个对象A为其仅有的一个元素的集$\{A\}$与A本身区别开来．例如，若$A=\{1,2\}$，则$\{A\}$是仅有一个元素A的集，而A是一个有两个元素1与2的集．仅有一个元素的集合称为**单元集**．

在许多问题中，我们所要考虑的集常常是某个给定集的子集，我们称由问题中涉及的全部元素所组成的集为**抽象空间**（简称空间），并用Ω表示．

2．集的运算

定义2　设A，B是两个集，由A与B的所有元素合并在一起所构成的集，称为A与B的**和集**，简称为**和**，记为$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{\omega|\omega\in A \text{或} \omega\in B\}$$

由A与B的所有公共元素所构成的集称为A与B的**交集**，简称为**交**，记为$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{\omega|\omega\in A \text{且} \omega\in B\}$$

$A\cap B$也可简记为AB。

如果A与B没有公共元素，即$A\cap B=\phi$，则称A与B互不相交．

例如，设

$$A=\{1,2,3,4\},\quad B=\{3,4,5\}$$

则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$$

$$A\cap B=\{3,4\}$$

完全类似地可以定义任意个集的和集及交集．设

$$\{A_t \mid t\in T\}$$

是任意的一组集，其中t是集的指标，它在某个固定的指标集T中变化，由一切$A_t\,(t\in T)$ 的所有元素合并在一起所组成的集称为这组集的和集，记为$\bigcup\limits_{t\in T} A_t$ ，即

$$\bigcup_{t\in T} A_t=\{\omega \mid \omega \text{ 至少属于某一个 } A_t,\ t\in T\}$$

由同时属于每个集$A_t\,(t\in T)$的所有元素所组成的集称为这组集的交集，记为$\bigcap\limits_{t\in T} A_t$，即

$$\bigcap_{t\in T} A_t=\{\omega \mid \omega\in A_t \text{ 对每个 } t\in T \text{ 同时成立}\}$$

如果 $T=N$，则上述和与交分别称为**可列和**与**可列交**，它们也可记为

$$\bigcup_{n\in N} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\,,\quad \bigcap_{n\in N} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

例 1 设 $T=[0,+\infty)$，$A_t=[0,t)$，则

$$\bigcup_{t\in T} A_t=[0,+\infty),\qquad \bigcap_{t\in T} A_t=\{\,0\,\}$$

例 2 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n},\,1\right]=[0,1]$，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[0,\ 1+\dfrac{1}{n}\right)=[0,1]$

定义 3 若集A与集B互不相交，则称$A\cup B$为A与B的

直和，并记之为$A+B$。一般地说，如果对任意的$s\in T,t\in T$。且$s\neq t$，都有$A_s\cap A_t=\phi$，则称$\bigcup\limits_{t\in T}A_t$为

$$\{A_t\,|\,t\in T\}$$

这一组集的直和，并记之为$\sum\limits_{t\in T}A_t$。

例 3 $[1,3]\cup[2,4]=[1,3)+[3,4]=[1,4]$

例 4 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n,n+1]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[n,n+1)=[1,+\infty)$。

由定义易知，和与交的运算具有如下性质：

（1）$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$；

（2）$A\subset A\cup B,B\subset A\cup B$；

（3）$A\cup\phi=A,A\cup\Omega=\Omega$；

（4）$A\cap\phi=\phi,A\cap\Omega=A$；

（5）等幂律：$A\cup A=A,A\cap A=A$；

（6）交换律：$A\cup B=B\cap A,A\cap B=B\cap A$；

（7）吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$,

$A\cap(A\cup B)=A$；

（8）结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

前七个性质是显然的，为了证明和的结合律，只须注意$A\cup(B\cup C)$与$(A\cup B)\cup C$都是由A,B,C的所有元素合并在一起所构成的集；为了证明交的结合律，只须注意$A\cap(B\cap C)$与$(A\cap B)\cap C$都是由同时属于A,B,C的元素所构成的集.

根据结合律，我们可将$(A\cup B)\cup C$及$A\cup(B\cup C)$中的任一个写为$A\cup B\cup C$，并将$(A\cap B)\cap C$及$A\cap(B\cap C)$中的任一个写为$A\cap B\cap C$. 这种任意省略括号的做法还可以推广到任意多个集的情形上去，并且，根据交换律，还可以交换式中各项的次序。例如

$$
\begin{aligned}
B\cap D\cap A\cap C &= (B\cap D\cap A)\cap C\\
&= (A\cap B\cap D)\cap C\\
&= (A\cap B)\cap(D\cap C)\\
&= (A\cap B)\cap(C\cap D)\\
&= A\cap B\cap C\cap D
\end{aligned}
$$

从交的意义上看，上式也是很明显的，因为无论是 $B\cap D\cap A\cap C$ 或$A\cap B\cap C\cap D$都是由 A,B,C,D 的共同元素所构成的集。

定理 1　下面三个关系

（1）$A\subset B$；

（2）$A\cap B=A$；

（3）$A\cup B=B$。

是等价的，这就是说，如果它们中间的任何一个成立，则它们三个都成立。

在以下的证明中，记号“$\Rightarrow$”表示“推出”，如果 p 与 q 是两个命题，则 $p\Rightarrow q$ 表示由 p 可推出 q。

证　（1）$\Rightarrow$（2）：设$A\subset B$。因为对任何 A，B，都有 $A\cap B\subset A$，故要证明（2）只需证明$A\subset A\cap B$。如果 $x\in A$，则 $x\in B$，故 $x\in A\cap B$，从而$A\subset A\cap B$。

（2）$\Rightarrow$（3）：设$A\cap B=A$。因为对任何A,B，有$B\subset A\cup B$，故要证明（3）成立，只需证明$A\cup B\subset B$。如果$x\in A\cup B$，则 $x\in A$ 或 $x\in B$，在前一种情况，由（2）有 $x\in A\cap B$，故仍有 $x\in B$，于是 $A\cup B\subset B$。

（3）$\Rightarrow$（1）：设 $A\cup B=B$。则由此式及 $A\subset A\cup B$即得$A\subset B$。

定理 2（第一分配律）设 A,B,C 是三个集，则$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

在以下证明中“$\Longleftrightarrow$”表示“等价”。$p\Longleftrightarrow q$ 则表示命

题 p 与命题 q 等价。

证 $\omega\in A\cap(B\cup C)\Longleftrightarrow\omega\in A$且$\omega\in B\cup C$

$\Longleftrightarrow\omega\in A$，且 $\omega\in B$ 或 $\omega\in C$

$\Longleftrightarrow\omega\in A$且$\omega\in B$，或 $\omega\in A$ 且 $\omega\in C$

$\Longleftrightarrow\omega\in A\cap B$，或 $\omega\in A\cap C$

$\Longleftrightarrow\omega\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$\therefore\quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

定义 4 设 Ω 是一空间，$A\subset\Omega$，则 Ω 中不属于 A 的所有元素所构成的集称为 A 的补集（简称补），记为 A'，即

$$A'=\{\omega\,|\,x\in\Omega\text{ 且 }x\notin A\}$$

补运算显然具有下列性质：

（1）互补性：$A\cup A'=\Omega, A\cap A'=\phi$，$\phi'=\Omega$，$\Omega'=\phi$。

（2）对合律：$(A')'=A$。

（3）$A\subset B$ 的充要条件是 $A'\supset B'$。

定理 3（德·莫根(De Morgan)律）设A，B是两个集，则

（1）$(A\cup B)'=A'\cap B'$；

（2）$(A\cap B)'=A'\cup B'$。

证（1）$\omega\in(A\cup B)'\Longleftrightarrow\omega\notin A\cup B$

$\Longleftrightarrow\omega\notin A$且$\omega\notin B\Longleftrightarrow\omega\in A'$且$\omega\in B'$

$\Longleftrightarrow\omega\in A'\cap B$

$\therefore\quad(A\cup B)'=A'\cap B'$

（2）$\omega\in(A\cap B)'\Longleftrightarrow\omega\notin A\cap B$

$\Longleftrightarrow\omega\notin A$或$\omega\notin B\Longleftrightarrow\omega\in A'$或$\omega\in B'\Longleftrightarrow$

$\omega\in A'\cup B'$

$\therefore\quad(A\cap B)'=A'\cup B'$

定理 4（第二分配律）设A,B,C是三个集，则

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

证　把第一分配律的公式中的 A, B, C 分别换为 A', B', C'，我们有

$$A' \cap (B' \cup C') = (A' \cap B') \cup (A' \cap C')$$

两边取补

$$[A' \cap (B' \cup C')]' = [(A' \cap B') \cup (A' \cap C')]'$$

利用德·莫根律及对合律得

$$A \cup (B' \cup C')' = (A' \cap B')' \cap (A' \cap C')'$$

再次利用这两个运算律即得

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

以上三个定律可以推广到一般情况。

第一分配律：

$$A \cap \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right) = \bigcup_{t \in T} (A \cap B_t) \tag{1.1}$$

第二分配律：

$$A \cup \left(\bigcap_{t \in T} B_t \right) = \bigcap_{t \in T} (A \cup B_t) \tag{1.2}$$

德·莫根律：

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)' = \bigcap_{t \in T} A'_t \tag{1.3}$$

$$\left(\bigcap_{t \in T} A_t \right)' = \bigcup_{t \in T} A'_t \tag{1.4}$$

定义 5　设 A，B 是两个集，属于 A 而不属于 B 的所有元素所组成的集称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$。

例如，设　$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,5\}$，则

$$A-B=\{1,3\}, B-A=\{5\}$$

由差的定义显然有

$$A-B=A \cap B'$$

$$\Omega - A = A'$$

注意，在差的定义中并不要求 B 是 A 的子集。如果 $B \subset A$，则称 $A-B$ 为真差。

定理 5 设A,B是两个集，则

$$A\cup B=A+(B-A)=A+A'\cap B$$

证 (1) $A\cap(B-A)=A\cap(A'\cap B)$

$$=(A\cap A')\cap B$$

$$=\phi\cap B$$

$$=\phi$$

∴ A与$B-A$互不相交.

(2) $A+(B-A)=A\cup(A'\cap B)$

$$=(A\cup A')\cap(A\cup B)$$

$$=\Omega\cap(A\cup B)$$

$$=A\cup B$$

上述公式可以推广如下：设$\{A_n\}$是一列集，令

$$B_1=A_1,\quad B_n=A'_1\cdots A'_{n-1}A_n\,(n\geqslant 2)$$

则

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\sum_{k=1}^{n}B_k \tag{1.5}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}B_n \tag{1.6}$$

定理 6 设A,B,C是三个集，则

$$C\cap(A-B)=(C\cap A)-(C\cap B)$$

即交关于差是可分配的.

证 $(C\cap A)-(C\cap B)$

$$=(C\cap A)\cap(C\cap B)'$$

$$=(C\cap A)\cap(C'\cup B')$$

$$=(C\cap A\cap C')\cup(C\cap A\cap B')$$

$$=\phi\cup(C\cap A\cap B')$$

$$=C\cap(A-B)$$

定义6　设 A,B 是两个集，则称 $(A-B)\cup(B-A)$ 为 A 与 B 的对称差，记为 $A\triangle B$.

显然有

（1）$A\triangle B=(A-B)+(B-A)$；

（2）$A\cup B=(A\triangle B)+(A\cap B)$.

3．上限集与下限集

定义7　设 A_1，A_2，$\cdots,A_n,\cdots$ 是任意一列集．由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一列集的上限集，记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$；而由属于集列中从某个指标 $n_0(\omega)$（这个指标不是固定的，而是与元素 ω 有关）以后所有集 A_n 的那种元素 ω（即除去有限多个集外的所有集 A_n 都含有的那种元素）的全体所组成的集称为这一列集的下限集，记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$．即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{\omega\,|\,\omega\text{ 属于无限多个}A_n\}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{\omega\,|\text{ 存在正整数 }n_0(\omega)\text{，使得当 }n>n_0(\omega)$$

时，$\omega\in A_n\}$

由定义显然有，

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$$

例1　设 $A_{2n-1}=A$，$A_{2n}=B(n=1,2,\cdots)$，则

（1）$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=A\cup B$；

（2）$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=A\cap B$.

证（1）设 $\omega\in A\cup B$，不妨设 $\omega\in A$，于是有

$$\omega\in A_{2n-1}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

由上限集的定义知， $\omega\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,故有

$$A\cup B\subset\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n \tag{1.7}$$

另一方面，设$\omega\in(A\cup B)'$，即$\omega\notin A\cup B$，于是$\omega\notin A$ 且 $\omega\notin B$，故 $\omega\notin A_n(n=1,2,3,\cdots)$，因而$\omega\notin\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$， 即 $\omega\in\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\right)'$，于是有

$$(A\cup B)'\subset\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)'$$

即

$$A\cup B\supset\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n \tag{1.8}$$

由（1.7）与（1.8）即得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=A\cup B$$

（2）设$\omega\in A\cap B$，则$\omega\in A$ 且$\omega\in B$，于是$\omega\in A_n$（$n=1,2,3\cdots$），由下限集的定义知，$\omega\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，故有

$$A\cap B\subset\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n \tag{1.9}$$

另一方面，设$\omega\in(A\cap B)'$，即 $\omega\notin A\cap B$，不妨设 $\omega\notin A$，即 $\omega\notin A_{2n-1}(n=1,2,3,\cdots)$,因而$\omega\notin\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，即$\omega\in\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\right)'$，于是有

$$(A\cap B)'\subset\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)'$$

即

$$(A\cap B)\supset\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n \tag{1.10}$$

由（1.9）与（1.10）即得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A\cap B$$

例 2 设$A_n(n=1,2,3,\cdots)$是如下一列点集：

$$A_{2n+1}=\left[0,\ 2-\frac{1}{n+1}\right],\ n=0,1,2,\cdots$$

$$A_{2n}=\left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right],\ n=1,2,3,\ \cdots$$

我们来确定集列$\{A_n\}$的上限集和下限集。

因为闭区间〔0,1〕中的点属于每个$A_n(n=1,2,3,\cdots)$，故

$$[0,1]\subset\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$$

对于区间$(1,2]$中的每个点x，必存在正整数$n_0(x)$，使得当$n>n_0(x)$时，

$$x>1+\frac{1}{n},\ 即\ x\notin A_{2n}$$

又区间〔0，2〕以外的点都不属于任何A_n，因此

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=[0,1]$$

对于区间$(1,2)$中的每个点x，必存在正整数$n_0(x)$，使得当$n>n_0(x)$时，

$$x<2-\frac{1}{n+1},\ 即\ x\in A_{2n+1}$$

又点$x=2$仅属于A_2，因此，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=[0,2)$$

定理 7 设$\{A_n\}$是任意一列集，则

（1）$$\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)'=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n' \tag{1.11}$$

（2）$$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\right)'=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n' \tag{1.12}$$