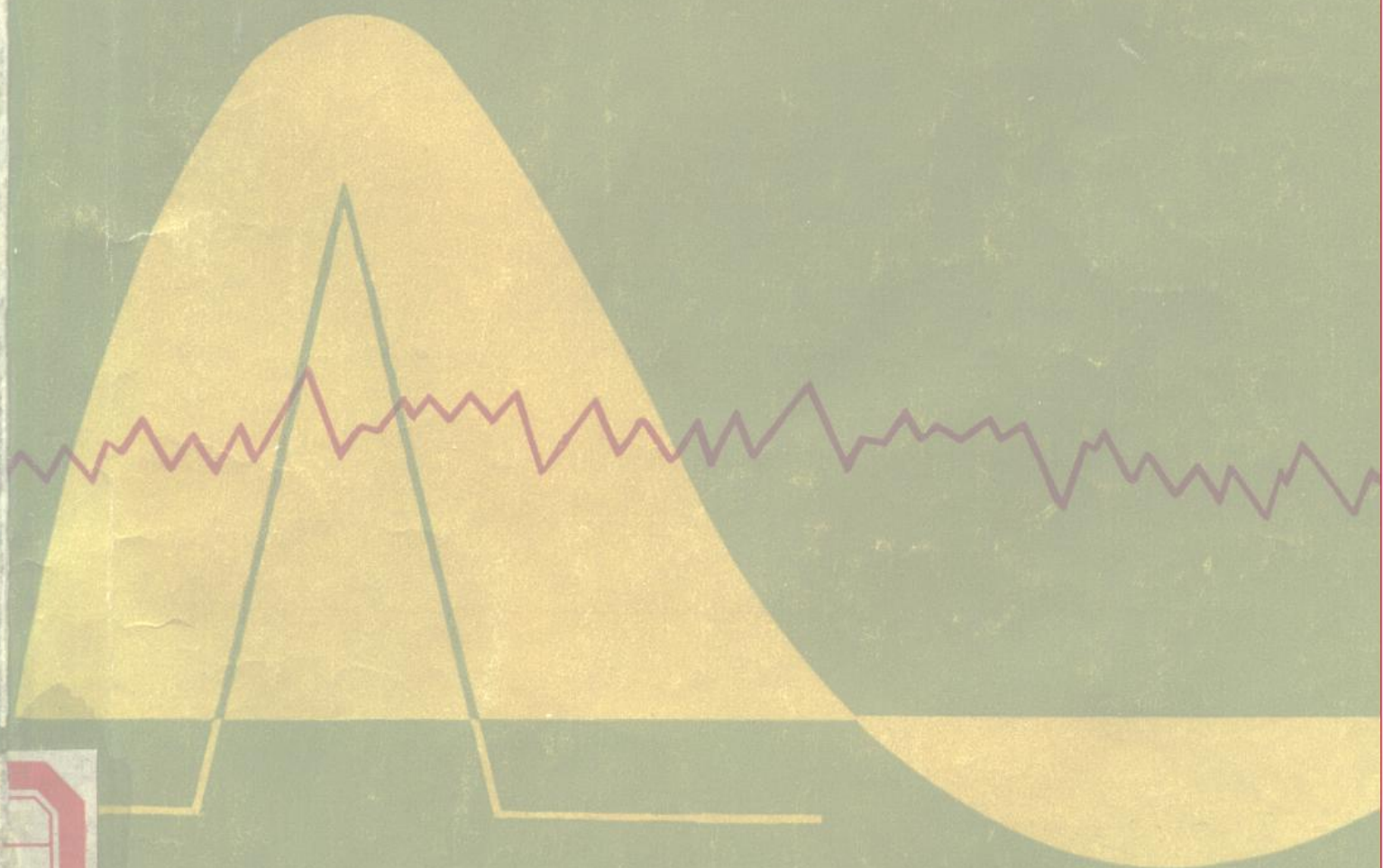


伪随机信号及
相关辨识

伪随机信号及 相关辨识

李白男 著



斜
以

26

科学出版社

13.82
215

伪随机信号及相关辨识

李白男 著



科学出版社

1987

8710370

内 容 简 介

本书介绍了如何采用伪随机信号相关法辨识线性系统的动态特性——脉冲响应。讨论了伪随机信号的特点,在实际中怎样消除非平稳、随机漂移、周期干扰等对系统辨识的不良影响,以及对多输入-多输出系统、一类非线性系统的辨识。详细介绍了怎样将脉冲响应转换成传递函数。书中包括了较多的实验实例。

本书可作为机械、液压、冶金、化工、工业自动化、生物医学工程等专业的
大学生、研究生及工程技术人员的教科书或参考书。

0006/04

伪随机信号及相关辨识

李白男 著

责任编辑 李淑兰 杨艳

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987年4月第一版 开本: 787×1092 1/16

1987年4月第一次印刷 印张: 16 1/2

印数: 0001—8,350 字数: 381,000

统一书号: 15031·801

本社书号: 4647·15—8

定 价: 3.90 元

前 言

采用伪随机信号相关法辨识线性系统的动态特性,在各工业系统中,日益得到广泛的应用。

要对一个动态系统进行分析、调整与控制,尤其是用计算机来进行控制、首先需要知道这个系统动态特性的数学模型,而采用本书介绍的方法,正是获得这一关键数据的有力工具。

伪随机信号相关法与一般经典的频率法、阶跃法等相比较,其优点是,抗干扰性强,可以在不影响系统正常工作条件下完成对系统脉冲响应的辨识。最成功的实例是在带钢连轧机、电站、核反应堆等的应用,因为这类系统正常工作时的动态特性,用经典法是无法测量出来的。

本书的前三章介绍了伪随机信号以及相关辨识的基础知识,第四、五章介绍了在实际中如何消除各类干扰因素对辨识结果的不良影响,并给出一些实例。第七章讨论了怎样将脉冲响应转换成传递函数。第六、八章介绍多输入-多输出系统以及一类非线性系统的辨识。

作者

1985.1. 于北京

目 录

前言

第一章 相关辨识原理	1
1-1 线性系统的动态特性	1
1-2 平稳随机信号的统计描述	7
1-3 利用互相关函数辨识系统脉冲响应	12
1-4 利用伪随机信号辨识线性系统	15
第二章 伪随机信号及其在相关辨识中的应用	18
2-1 伪随机信号的随机性与确定性	18
2-2 伪随机信号的产生	19
2-3 伪随机信号的自相关函数	25
2-4 利用互相关函数求脉冲响应	29
2-5 逆重复伪随机信号及其在辨识中的应用	42
2-6 三电平伪随机信号及其在辨识中的应用	47
2-7 五电平伪随机信号及其性质	52
2-8 伪随机信号的功率谱	56
2-9 逆重复伪随机信号的功率谱	67
2-10 三电平、五电平伪随机信号的功率谱	71
2-11 利用自功率谱与互功率谱辨识系统频率特性	72
第三章 系统辨识的试验信号参数选择	74
3-1 伪随机信号时钟周期 Δt 的选择	74
3-2 伪随机信号长度 N 的选择	85
3-3 伪随机信号重复周期数 q 的选择	90
3-4 伪随机信号幅值的选择	90
3-5 试验信号参数选择举例	91
第四章 消除非平稳、非线性及各类干扰对辨识的不良影响	94
4-1 对系统预扰动以消除暂态过程的影响	94
4-2 采用带通滤波器消除低频以及高频干扰对辨识的影响	94
4-3 对系统输出实行加权平均以消除缓慢漂移干扰对辨识的影响	97
4-4 消除周期干扰对辨识的影响	106
4-5 调整时钟周期及实行加权平均以消除复杂干扰对辨识的影响	113
4-6 “在线”监视噪声以判断辨识的准确性	116
4-7 消除非线性影响	125
第五章 实际工业系统相关辨识举例	130
5-1 20 辊极薄带冷轧机主传动调速系统的“在线”辨识	131
5-2 一米二冷轧机恒张力调节系统的“在线”辨识与“在线”调整	132
5-3 冷连轧机主传动速度控制系统和张力控制系统的“在线”辨识	135

5-4	水电站发电机励磁供电系统的“在线”辨识	140
5-5	生物系统的辨识	142
5-6	液压伺服系统的“在线”辨识	144
第六章	采用相互独立的伪随机信号辨识多路系统	145
6-1	多输入-多输出系统辨识原理	145
6-2	独立伪随机信号的生成	154
6-3	多路系统辨识举例	156
第七章	由脉冲响应序列拟合传递函数	159
7-1	定性分析时域与频域动态指标的互相转换	159
7-2	由脉冲响应序列拟合传递函数	166
7-3	通过差分方程拟合传递函数	204
第八章	采用伪随机相关法辨识一类非线性系统	213
8-1	非线性系统简介	213
8-2	采用不同电平的逆重复伪随机信号辨识具有奇次非线性特性的动态系统	215
8-3	采用复合伪随机信号辨识具有偶次非线性特性的动态系统	219
8-4	采用不同偏置的逆重复伪随机信号辨识非线性系统	225
附录	244
附录 I	三阶欠阻尼系统仿真模型源程序	244
附录 II	褶积源程序	245
附录 III	相关运算源程序	246
附录 IV	产生二电平伪随机信号、逆重复 m 信号的源程序	247
附录 V	产生三电平伪随机信号的源程序	250
附录 VI	产生五电平伪随机信号的源程序	251
附录 VII	伪随机相关辨识的系统仿真源程序	253
参考文献	257

第一章 相关辨识原理

1-1 线性系统的动态特性

分析物理系统的重要环节是建立系统的数学模型。系统的数学模型是描述系统的输入与输出因果关系的。

在生产实际中遇到的系统,当扰动作用较小时,往往可以认为是处于线性状态。“在线”辨识时,附加到系统的试验信号电平极低,系统受扰动很小,不会使系统偏离原来的线性工作状态。这里对系统的辨识,若不作特别说明,是指对线性系统的辨识。

线性系统的动态数学模型,或者说系统的动态特性,有许多种描述方式,这里只讨论微分方程、传递函数和脉冲响应函数等描述方式。

1-1-1 线性系统的微分方程式

线性系统可用常微分方程式描述,设加到系统的扰动作用为 $u(t)$, 系统响应为 $y(t)$, 则 $u(t)$ 与 $y(t)$ 之间的关系为

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

方程 (1.1) 描述了输入与输出之间的关系, 只要已知方程的各系数: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0$, 和系统的输入信号 $u(t)$ 以及初始条件, 就可由 (1.1) 式求出响应 $y(t)$ 。

图 1-1 所示的 RLC 网络, 是一个线性系统。输入量为 $u(t)$, 输出量为 $i(t)$ 。 $u(t)$ 与 $i(t)$ 之间的微分方程式为

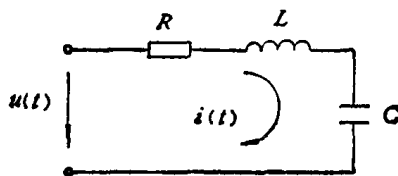


图 1-1

$$LC \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + RC \frac{di(t)}{dt} + i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (1.2)$$

若给定输入电压 $u(t)$, 并规定电感 L , 电容 C 上的初始电压, 则当 R, L, C 三参数已知时, 输出量 $i(t)$ 可以由 (1.2) 式得出。

1-1-2 线性系统的传递函数与频率特性

1. 传递函数

微分方程虽然是描述系统的基本方法, 但多少有些麻烦。实际上高阶微分方程在设

计中很少使用。尽管数字计算机可以用合适的程序解高阶微分方程，但线性控制理论是着重分析和设计系统，而不是系统微分方程式的实际解法。

传递函数和脉冲响应函数是描述线性系统的一个方便方法。传递函数是在频域内对系统动态特性进行描述，而脉冲响应函数则是在时域内对系统动态特性进行描述。

传递函数 $G(s)$ 是用拉氏变换求解微分方程 (1.1) 得出的。假定 (1.1) 式的初始条件为零。以 e^{-st} 乘 (1.1) 式的所有各项，并在 $0 \sim \infty$ 区间对 t 积分，便得出

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) \\ & = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) U(s) \end{aligned} \quad (1.3)$$

系统的传递函数 $G(s)$ 定义为输出、输入信号取拉氏变换后， $Y(s)$ 与 $U(s)$ 之比，即

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (1.4)$$

式中

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt \\ U(s) &= \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

根据 $G(s)$ 可以计算出系统输入端加入任何外界扰动作用 $u(t)$ 时，系统所产生的输出变化，即

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (1.5)$$

关于传递函数的性质可以概括为：

- (1) 传递函数仅仅适用于线性系统。
- (2) 系统的传递函数等于输出量的拉氏变换值与输入量的拉氏变换值之比。
- (3) 系统的所有初始条件均为零。
- (4) 传递函数与输入扰动无关，它取决于系统的固有特性。

例如：对于图 1-1 所示的线性系统——RLC 网络，按下面步骤求传递函数。在方程式 (1.2) 两边进行拉氏变换，并假定初始条件为零，则得到

$$U(s) = \left(R + Ls + \frac{1}{Cs} \right) I(s)$$

输出变量 $i(t)$ 与输入变量 $u(t)$ 之间的传递函数为

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

2. 频率特性

在实际中，我们无法得到用数学公式表示的微分方程与传递函数，只能用试验方法得到用曲线描述的所谓频率特性。其试验是这样进行的：在系统输入端加一个角频率为 ω_1 的正弦信号，待稳定后，测量输出信号的振幅与相角，并与输入信号的振幅与相角相比，其比值为对应角频率 ω_1 的幅频特性 $A(\omega_1)$ 和相频特性 $\varphi(\omega_1)$ ，它们统称为频率特性。若不断改变输入信号的角频率 ω ，重复上述试验步骤，便可得出不同频率下的频率特性曲线上的各值。图 1-2 为二阶系统的相频特性和幅频特性曲线。

频率特性 $G(j\omega)$ 也可以直接由传递函数得出。把 (1.4) 式中的 s 用 $j\omega$ 代替后有

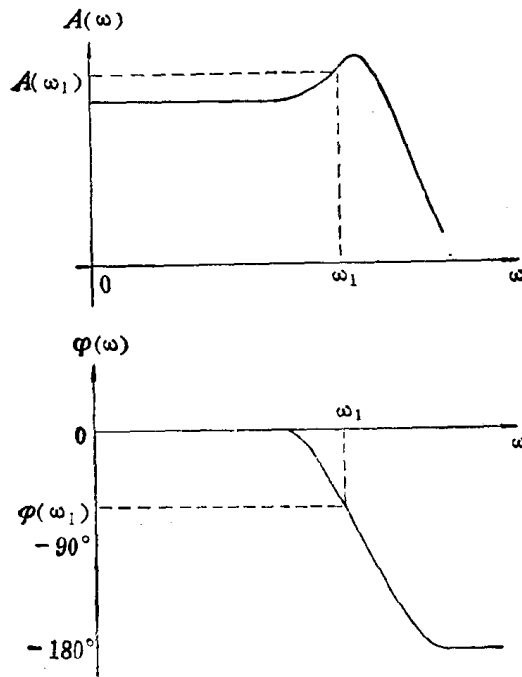


图 1-2

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0} \quad (1.6)$$

式中

$$Y(j\omega) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$U(j\omega) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt$$

把(1.6)式所示频率特性,化成幅频特性 $A(\omega)$ 、相频特性 $\varphi(\omega)$ 形式,有

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (1.7)$$

$A(\omega)$ 就是 $G(j\omega)$ 的模或幅值, $\varphi(\omega)$ 是 $G(j\omega)$ 的相角.

例如: 惯性环节的传递函数

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega}$$

其幅频、相频特性分别为

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \quad \varphi(\omega) = -\text{tg}^{-1}(\omega T)$$

1-1-3 线性系统的脉冲响应与褶积

1. 脉冲响应

当系统在输入为单位脉冲函数 $\delta(t)$ 时,系统的响应称为脉冲响应,记作 $g(t)$.

单位脉冲函数又称 δ 函数, 定义为

$$\text{且} \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\left. \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \right\}$$

即 δ 函数是高度为无穷大, 宽度为无穷小, 而面积为 1 的理想脉冲. δ 函数的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (1.9)$$

δ 函数在物理上是不能实现的, 但是近似的 δ 函数在实际上还是存在的, 图 1-3 所示系统输入 $f(t)$ 就是近似的 δ 函数, 它是一个宽度极窄的三角脉冲.

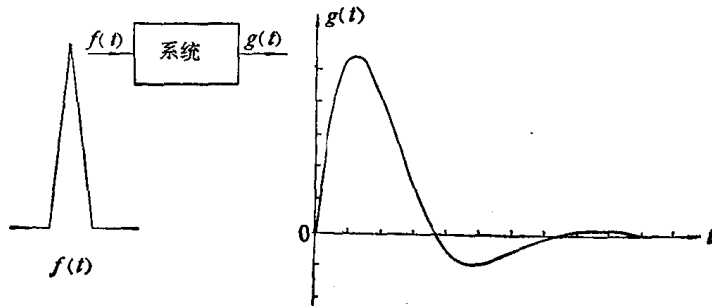


图 1-3

我们把近似的单位脉冲 $f(t)$ 加到系统的输入端, 如图 1-3 所示. 对应的系统输出便是近似的脉冲响应 $g(t)$.

脉冲响应和传递函数一样, 描述了系统的动态特性, 而与外作用无关. 我们可以导出这两者之间的关系.

设系统的传递函数为 $G(s)$, 输入为 $u(t) = \delta(t)$, 输出为 $y(t) = g(t)$, 考虑到 $\delta(t)$ 的拉氏变换等于 1, 有

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}[g(t)]}{\mathcal{L}[\delta(t)]} = \mathcal{L}[g(t)] \quad (1.10)$$

把上式进行拉氏反变换有

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad (1.11)$$

可见, 脉冲响应可直接用传递函数求出, 它等于传递函数的拉氏反变换.

例: 若系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s + a}$$

则脉冲响应函数为

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + a}\right] = e^{-at}$$

若系统脉冲响应为

$$g(t) = 11.5473 e^{-5t} \sin 8.66 t$$

则传递函数为

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{0.01 s^2 + 0.1 s + 1}$$

单位脉冲响应有下述性质:

(1) $t \rightarrow \infty, g(t) = 0$.

(2) 若 $t = T_s, g(T_s) = 0$, 称 T_s 为过渡过程时间, 或调整时间.

(3) $t < 0, g(t) = 0$, 它表示物理系统不可能超前激励.

(4) $\int_0^{T_s} g(t) dt = k$, 它表示 $g(t)$ 曲线所包络的面积等于常数 k , 而 k 值就是系统的静态放大倍数.

最后指出, 在分析动态系统时, 还经常用到所谓阶跃响应. 即把单位阶跃函数作用于系统, 由它所引起的过渡过程 $h(t)$, 称为阶跃响应. 下面求脉冲响应与阶跃响应的关系.

单位阶跃函数为

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

对它取拉氏变换有

$$F(s) = \frac{1}{s} \quad (1.13)$$

当它作用于传递函数为 $G(s)$ 的系统时, 其输出的拉氏变换式为

$$H(s) = G(s)F(s) = G(s)/s \quad (1.14)$$

经过拉氏反变换, 阶跃响应为

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)/s] \quad (1.15)$$

对 $h(t)$ 求导数, 有

$$\frac{dh(t)}{dt} = \mathcal{L}^{-1}[sH(s)] = \mathcal{L}^{-1}G(s) = g(t) \quad (1.16)$$

可见, 脉冲响应是阶跃响应的导数, 或者说脉冲响应的积分即是阶跃响应.

例 1: RC 网络如图 1-4 所示, 若输入为 $u(t)$, 输出为 $u_c(t)$, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + RCs}$$

则脉冲响应函数为

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

阶跃响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} dt \\ &= (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \end{aligned}$$

例 2: 在图 1-5 中, 若已知阶跃响应函数 $h(t)$, 则对 $h(t)$ 微分便可得出脉冲响应 $g(t)$.

2. 线性系统的褶积

在线性系统的时域分析中, 经常要求出系统对各种输入信号所产生的响应.

利用脉冲响应 $g(t)$, 可以计算出输入端加任何外作用 $u(t)$ 时, 系统的输出 $y(t)$, 由于

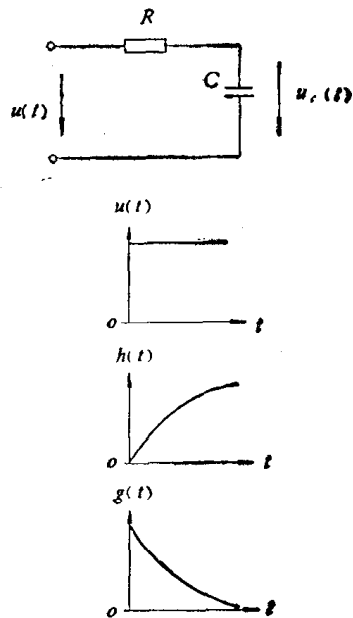


图 1-4

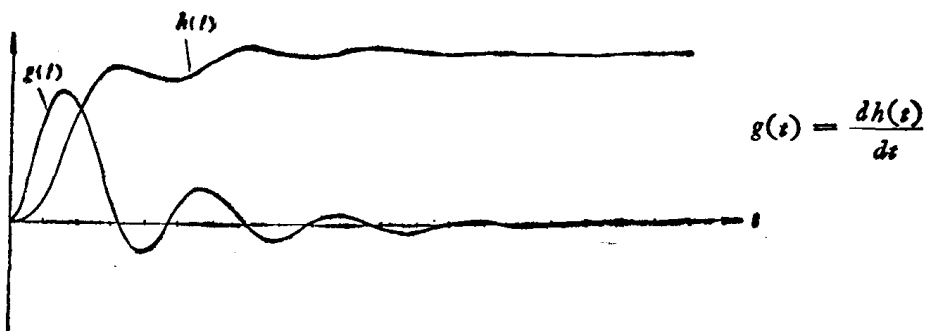


图 1-5

$$Y(s) = U(s)G(s)$$

对等式两边进行拉氏反变换有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] &= \mathcal{L}^{-1}[U(s)G(s)] \\ y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(s)G(s)e^{st} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U(s) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} U(s)e^{s(t-\tau)} ds \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.17)$$

我们称 $y(t)$ 为 $u(t)$ 与 $g(t)$ 的褶积, 并记为

$$y(t) = u(t) * g(t)$$

应当说明的是, 由于 $Y(s) = U(s)G(s)$ 可以写成 $Y(s) = G(s)U(s)$, 所以褶积公式也可以写成

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) * u(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)g(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.18)$$

即褶积具有交换性

$$g(t) * u(t) = u(t) * g(t)$$

在实际运用褶积公式时, 考虑到输入信号 $u(t)$ 是当 $t = 0$ 时加入系统的, 即

$$u(t) = 0 \quad t < 0$$

或

$$u(t-\tau) = 0 \quad t < \tau \quad (1.19)$$

把 (1.19) 式代入 (1.17) 式后, 系统的输出响应可写成

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau)u(t-\tau) d\tau \quad (1.20)$$

考虑到, 对所有物理系统, 输出响应不会超前于输入激励, 即

$$g(t) = 0 \quad t < 0 \quad (1.21)$$

所以, 有

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau) d\tau \quad (1.22)$$

又考虑到, 系统对单位脉冲的响应, 到了一定时间会衰减到零, 于是有

$$g(t) = 0 \quad t > T_s \quad (1.23)$$

最后得出

$$y(t) = \int_0^{T_s} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad t > T_s \quad (1.24)$$

利用上式,可以计算 $u(t)$ 作用于系统 $g(t)$ 时所引起的响应。上式称为计算系统输出的褶积公式。

例如: 系统输入为 δ 函数时,输出等于单位脉冲响应函数,即

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \\ &= g(t) \end{aligned} \quad (1.25)$$

褶积运算时,对每一个 t 值,均要进行大量的相乘与求和运算,而求系统的输出,又必须有许许多个 t 值。因此计算量相当大,只有采用计算机才使褶积运算成为可能。计算机运行程序清单见附录 II。

1-2 平稳随机信号的统计描述

1-2-1 平稳随机信号

在实际中经常碰到这样一类现象,如海水的水面,它总是在某一平均值附近连续地随机波动,不论平均振幅也好,振动特性也好,在时间增长过程中基本上没有变化。又如没有经过稳压设备的电源电压,也是随机波动的,随着时间的增加,波动性质不会有变化。用示波器观察的电源电压如图 1-6 所示,这种信号称为平稳随机信号。对于平稳随机信号,其初始时间可以任意选取。如果我们在任何一段较长时间内研究平稳随机信号,所得到的特征值与所取的时间起点无关,可以说平稳随机信号是“无头无尾”的。

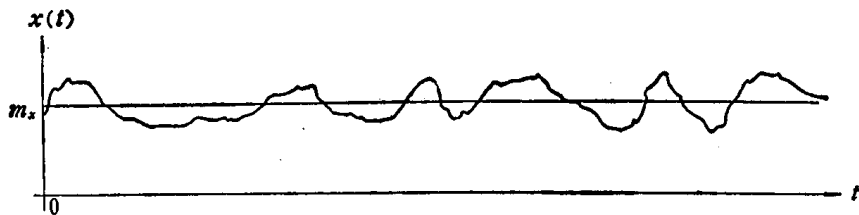


图 1-6

例如从电子管阴极的单位面积上发射出的电子总数目也是平稳随机信号。如图 1-7 所示,比较图 1-6 与图 1-7 看出,这两种平稳随机信号有不同的特点,描述平稳信号特征的有平均值、方差、相关函数、谱密度等。

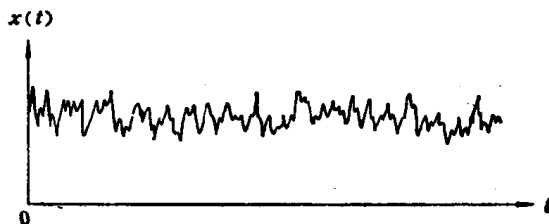


图 1-7

与平稳随机信号相反的,有非平稳随机信号。如飞机机翼在俯冲时的起伏,如图 1-8,这种信号的特征与初始时间、时间长短有关系。

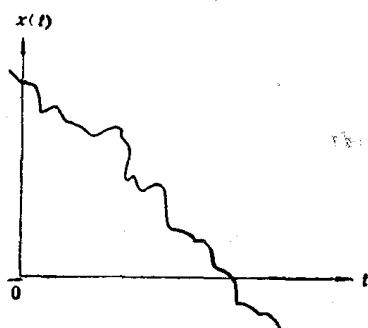


图 1-8

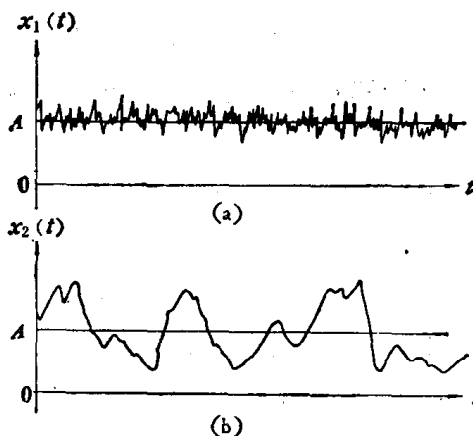


图 1-9

一般情况下,任何动力学系统的随机信号,一开始是不平稳的——所谓“过渡过程”,然后过渡过程消失,转入稳定状态,从此时起,方可认为随机信号是平稳的。以下我们仅研究平稳随机信号。

1-2-2 平均值、方差

平稳随机信号 $x(t)$ 的平均值 $\overline{x(t)}$,又称数学期望 $E[x(t)]$,它等于按时间的算术平均值。即

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.26)$$

对于平稳过程,其数学期望是一常量,即

$$\overline{x(t)} = m_x = \text{常量} \quad (1.27)$$

同理对于确定性信号,也同样存在平均值。例如:正弦波的平均值等于零。

描述随机信号的另一个量,是随机信号的方差 $V[x(t)]$ 。方差表示了随机信号相对于平均值的偏离情况。如图 1-9 (a), (b), 两种信号的平均值相等。在曲线中的各个值偏离平均值的距离大不相同,这种偏离平均值的平均特性用随机信号的方差 V 来描述。

对于一平稳随机信号 $x(t)$, 其方差为

$$\begin{aligned} V[x(t)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - m_x)^2 dt \\ &= \text{常量} \end{aligned} \quad (1.28)$$

若平均值 $m_x = 0$, 则

$$V[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \sigma_x^2 \quad (1.29)$$

σ_x 为均方差,它被定义为方差的平方根。

对于确定性信号,也同样存在方差、均方差。例如:正弦电压 $u(t) = 308 \sin 314t$, 它的平均值 $m_u = 0$, 均方差 $\sigma_u = 220V$ 。正弦信号的均方差在电工学中便是有效值。

1-2-3 自相关函数

对于图 1-10 所示的平稳随机信号 $x_1(t)$, $x_2(t)$, 几乎有同样的数学期望与方差, 但这两种信号的特点并不相同。可见, 仅仅用数学期望与方差还不能完整地描述随机信号的特征。

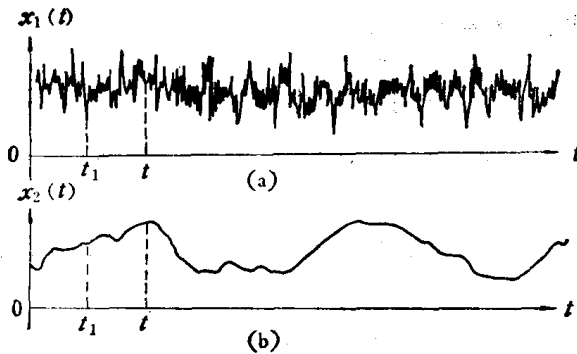


图 1-10

仔细观察这两条曲线可以看出, 对 $x_2(t)$, 它的特点是平滑而缓慢地变化, 它在 t_1 点所取的值若大于平均值, 那么很可能在 t 点所取的值也大于平均值, 即 t 所取的值与 t_1 时刻所取的值之间有着明显的相关性, t_1 与 t 的距离越近, 它们所取之值越接近。相反对于 $x_1(t)$, 其明显的不规则的摆动就是它的特点, t 时刻的取值, 并不取决于 t_1 时刻的取值, 而是随着 t_1 与 t 之间距离的增大, 两个不同时刻取值之间的关系很快消失了, 把这种信号本身相关程度的平均特性称为自相关函数 $R_{xx}(\tau)$ 。它表征了相距为 τ 的两个不同时刻取值之间的平均相关程度, 即

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (1.30)$$

对于图 1-10 所示的 $x_2(t)$, 它的自相关函数随着 $(t - t_1)$ 的增加而减小得很慢, 而 $x_1(t)$ 的自相关函数随着 $(t - t_1)$ 的增加而迅速减小。

例如: 图 1-7 所示电子管阴极发射电子的平均数目, 除了同一时刻外, 任意两个不同时刻发射电子的数目, 没有任何依赖关系。哪怕两个时刻相距很近, 也是如此。这种信号称为白噪声, 其自相关函数如图 1-11 所示, 它是 δ 函数。即

$$R_{xx}(\tau) = K\delta(\tau) \quad (1.31)$$

自相关函数为 δ 函数的白噪声信号, 实际上是不存在的, 一般来说, $K\delta(\tau)$ 可用又高

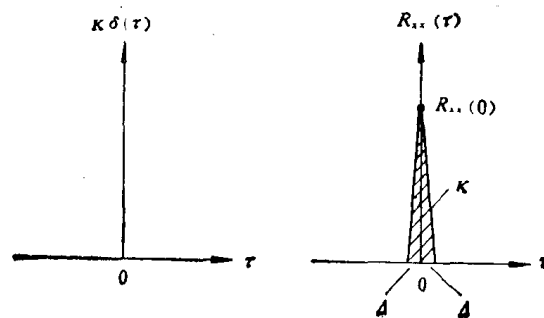


图 1-11

又窄的等腰三角形近似,其三角形的底为 2Δ , 高为 $R_{xx}(0)$, 面积为 K 。

白噪声的平均值等于零,均方差趋于无穷大,即

$$\begin{aligned} \overline{x(t)} &= 0 \\ \sigma_x = R_{xx}(0) &= \infty \end{aligned} \quad (1.32)$$

例如: 高度为 A , 宽度为 Δt , 周期为 T 的矩形波 $s(t)$, 其自相关函数 $R_{ss}(\tau)$ 为三角形周期波, 如图 1-12。其中, 当 $\tau = 0$ 时有

$$R_{ss}(0) = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{A^2}{T} \int_0^{\Delta t} dt = \frac{A^2 \Delta t}{T}$$

当 $2\Delta t \geq \tau \geq \Delta t$ 时, 因为 $s(t)s(t+\tau) = 0$ 所以 $R_{ss}(\tau) = 0$, 当 $\Delta t > \tau > 0$ 时, 读者可自行求出 $R_{ss}(\tau)$ 值。

对于确定性信号, 其自相关函数的性质, 只有当周期 T 趋于无穷大时, 才能与平稳随机信号一致。

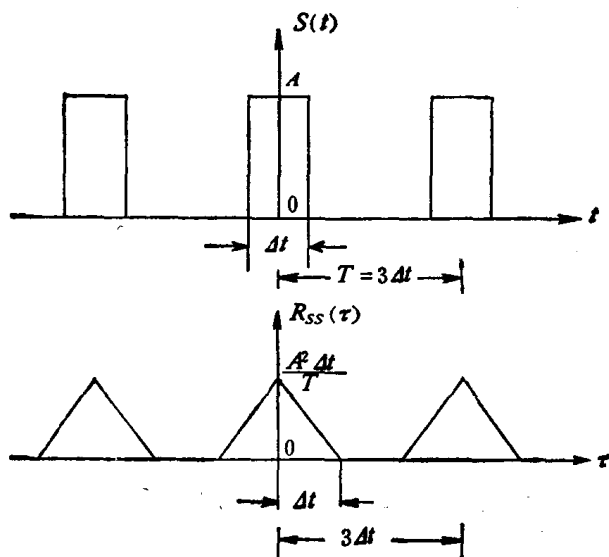


图 1-12

自相关函数 $R_{xx}(\tau)$ 有下列性质:

(1) 当 τ 相当大时, 平均值为零的平稳随机信号 $x(t)$ 的 $R_{xx}(\tau)$ 趋于零

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = R_{xx}(\infty) = 0 \quad (1.33)$$

即 $x(t)$ 的相距充分远的两个时刻之值是不相关的。

(2) $R_{xx}(\tau)$ 在 τ 取任何时刻值时, 都不可能超过它的初值 $R_{xx}(0)$, 即

$$R_{xx}(0) \geq |R_{xx}(\tau)| \quad (1.34)$$

证明:

$$\begin{aligned} \pm R_{xx}(\tau) &= \overline{\pm x(t)x(t+\tau)} \\ &= \frac{1}{2} \overline{[x(t) \pm x(t+\tau)]^2 - x^2(t) - x^2(t+\tau)} \\ &= \frac{1}{2} \overline{[x(t) \pm x(t+\tau)]^2} - R_{xx}(0) \end{aligned}$$

因为 $\overline{[x(t) \pm x(t+\tau)]^2} \geq 0$, 所以 $R_{xx}(0) \geq \mp R_{xx}(\tau)$, 即 (1.34) 式成立。

(3) $R_{xx}(\tau)$ 是 τ 的偶函数, 即

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau) \quad (1.35)$$

因为

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \overline{x(t)x(t+\tau)} = \overline{x(t+\tau)x(t)} \\ &= R_{xx}(-\tau) \end{aligned}$$

(4) $R_{xx}(\tau)$ 的初值 $R_{xx}(0)$ 等于 $x(t)$ 的均方值, 即

$$R_{xx}(0) = \overline{x^2(t)} = \delta_x \quad (1.36)$$

$R_{xx}(0)$ 总是正值。

1-2-4 互相关函数

互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 是描述两个平稳随机信号 $x(t)$, $y(t)$ 在不同时刻的相互依赖关系的一个量。如图 1-13 的线性系统 $g(\tau)$, 输入为 $x(t)$, 输出为 $y(t)$, t 时刻之输入值 $x(t)$, 对输出值 $y(t+\tau)$ 产生影响, 这种影响程度用互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 来描述, 有

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (1.37)$$

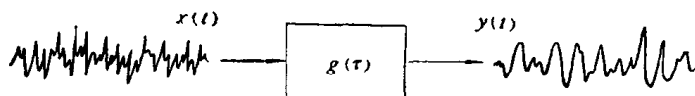


图 1-13

两个确定性信号也同样存在互相关函数, 如周期分别为 T_1 , T_2 的 $s(t)$, $p(t)$, 它们的互相关函数 $R_{sp}(\tau)$ 为

$$R_{sp}(\tau) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1 T_2} s(t)p(t+\tau)dt \quad (1.38)$$

例如 $s(t)$ 为一直流量 s_0 , $p(t)$ 为高度等于 A , 周期为 $2\Delta t$ 的方波, 其互相关函数为

$$\begin{aligned} R_{sp}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T s_0 p(t+\tau)dt = \frac{1}{2\Delta t} \int_0^{\Delta t} A s_0 dt \\ &= \frac{1}{2} s_0 A \end{aligned}$$

互相关函数与自相关函数的特征不同, 例如互相关函数 $R_{xy}(\tau)$ 一般不在 $\tau=0$ 时达到最大值。 $R_{xy}(\tau)$ 一般也不是 τ 的偶函数, 这是由于互相关函数是描述两种不同信号之间关系的缘故。

互相关函数有下列性质:

(1) $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$, 因为

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)x(t+\tau)dt$$

在 $R_{xy}(\tau)$ 公式中, 令 $t+\tau = t_1$, 则

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{T+\tau} x(t_1-\tau)y(t_1)dt_1$$