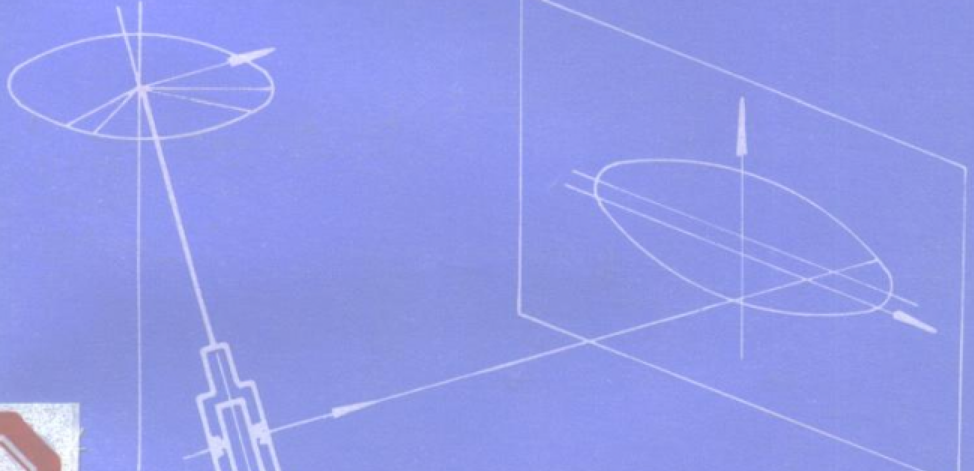
陀螺理论及在工程测量中的应用

王洪兰 编著



国防工业出版社

陀螺理论及在工程测量中的应用

王洪兰　编著

国防工业出版社

（京）新登字 106 号

图书在版编目（CIP）数据

陀螺理论及在工程测量中的应用/王洪兰编著. 一北京
：国防工业出版社，1995・2
ISBN 7-118-01296-3

Ⅰ.陀… Ⅱ.王… Ⅲ.陀螺理论-陀螺理论-应用-工程测量 Ⅳ.①O318②TB22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 03982 号

国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路 23 号）
（邮政编码 100044）
北京市怀柔新华印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 8½ 220 千字
1995 年 2 月第 1 版 1995 年 2 月北京第 1 次印刷
印数：1—2500 册 定价：12.00 元

序

自从1852年法国学者傅科(Leon Foucault)为了形象地显示地球自转而首先使用陀螺仪以来的一百多年间,陀螺仪已经从简单的演示装置发展成精确度很高的仪表,它在航空、航天、航海及制导技术中得到了极大的应用,在工程测量等领域也得到了越来越多的应用。

关于陀螺仪理论及应用的著作很多,但大多都是针对航空、航天、航海等领域的需要编写的。在以上领域中,陀螺元件一方面作为指示器使用,一方面作为稳定器使用。仪器大多安装在飞机、船舶、航天器等运动的载体上使用,作为指示器使用时,要求稳定地指示子午线或铅垂线。工程测量中使用的陀螺仪,陀螺元件主要作为指示器使用,目前主要用来指示子午线。而且仪器大多固定在地面上使用,不存在载体相对地面的运动。在指示子午线时不一定要稳定在子午线上,只要在较短的时间内确定出子午线的方位即可。但工程测量中使用陀螺仪表要求精度高,一般要求精确到几十个甚至几个角秒,并且要求仪器轻便耐用,便于携带,便于操作,能适应较恶劣的工作环境。

本书根据工程测量的需要,讲述了有关的陀螺理论及所需要的数学力学基础知识,具体分析了工程测量中使用的陀螺仪表的运动规律和工作原理。全书共四章,第一章讲述陀螺运动的运动学规律;第二章讲述刚体动力学的基本原理;第三章讲述了陀螺的运动特性和陀螺运动微分方程的建立。前三章内容的选取和坐标系的建立等,都是针对工程测量用陀螺仪表的需要进行的,比一般陀螺理论的著作简单且针对性强。第四章对工程测量中使用的陀螺仪表的运动规律和工作原理进行了较详尽的分析。为了适应工程

测量用陀螺仪表不断发展的需要，介绍了其他指示型陀螺仪表和新型陀螺仪表。

本书是在为矿山测量专业讲课所编写的"陀螺力学"讲义的基础上补充修改而成的。

在本书的写作和出版过程中得到了有关各方面的热情关怀和支持。作者的老师，北京大学陈滨教授在百忙中审阅了部分书稿并提出宝贵意见。朱照宣教授、黄克累教授、刘延柱教授、贾书惠教授、丁文镜教授等在这项工作中也给了作者许多有益的指导和帮助。作者在此对他们表示衷心的感谢。

由于水平所限，错误与不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

作　　者

内 容 简 介

本书系统地介绍了工程测量中使用的陀螺仪表的有关理论及所需要的数学力学基础知识。主要内容有陀螺运动学，刚体动力学基础，陀螺特性和陀螺运动微分方程，陀螺仪在工程测量中的应用。对工程测量中使用的陀螺经纬仪，单自由度陀螺罗盘，陀螺测斜仪等的运动规律进行了较详细的分析，并介绍了其他形式的定向陀螺仪和新型陀螺仪。本书适合于从事工程测量的工程技术人员和从事测量用陀螺仪表的研究制造人员阅读，也可以作为大专院校工程测量专业的教材或教学参考书。

目 录

绪　论

陀螺理论是在生产和科学实践的基础上发展起来的，是研究陀螺运动规律和陀螺仪技术的一门学科。

所谓陀螺，广义而言，是指绕自身某轴旋转，而此轴又可绕另外相交轴转动的刚体。大至天体，地球就是一个大陀螺。小至儿童抽打的玩具陀螺，都是陀螺的实例。从仪表工程的角度上讲，陀螺是指绕自身的对称轴高速旋转的对称物体。早在1852年傅科就把陀螺定义为一种具有大角动量的装置。这种被称为陀螺的物体运转起来以后，常常表现出一种出乎人们预料的、也是十分有趣的运动形式而引人注目。目前，陀螺仪已由简单的演示装置发展成精确度很高的仪表。

陀螺的运动具有明显的特性：进动性、章动性、定轴性和陀螺效应。利用陀螺的这些特性，人们不断地研究、制造了一系列的陀螺仪表。实际陀螺仪的力学模型是一个复杂的刚体系统，如果考虑到部件可能产生的弹性变形，还应看作是刚体与弹性体组成的更复杂的动力学系统。对按实际陀螺仪力学模型建立起来的动力学方程寻找严格的解析积分几乎是不可能的，为了实际的需要，又发展了近似理论，即进动简化理论和小偏角线性理论。利用近似理论给出的定量结果虽然是近似的，但不会产生运动性质上的变化，足以解释高速自转陀螺仪的全部动力学特性，并且描述陀螺仪的实际运动也有足够的精度。陀螺仪的近似理论已发展得十分完善而成为指导仪表工程设计的理论依据。近似理论主要限于线性理论，但非线性理论也逐渐显示出重要性。随着对陀螺仪精度要求的提高，线性理论中被忽略了的非线性项的细微影响逐渐变得不可忽视。长期以来陀螺理论的主要研究对象是万向支架陀螺仪，但新型陀螺仪的兴起使陀螺理论面临新的课题，为适应新的力学模型而

建立起的新理论极大地丰富了陀螺理论的内容。

陀螺仪的分类，从不同的角度有不同的方法。按陀螺仪的应用分类，根据陀螺元件所起的作用可分为指示型陀螺和动力型陀螺两大类。指示型陀螺被用来做指示器，指示地理子午线和铅垂线。指示型陀螺一般靠重心偏移产生的重力矩定向，也称为重力陀螺仪。若转子轴水平放置，重心在赤道面内偏移，则用于指示子午线方向，称为陀螺罗经或陀螺罗盘。若转子轴铅垂放置，重心沿转子轴方向偏移，则用于指示铅垂线，一般称为陀螺摆。若加角度传感器和力矩电机，则成为垂直陀螺仪。动力型陀螺可以产生控制力矩，作为稳定器使用。称为控制力矩陀螺。

工程测量中使用的都是指示型陀螺仪。在铁路隧道、矿井建设等地下工程测量中，用以确定子午线方向的陀螺仪可以固定在地面上使用，要求测量精度高，仪器轻便耐用，便于携带，定向速度要尽量提高。在石油、地质和冶金、煤炭冻结孔的钻井中使用的陀螺测斜仪要求仪器小巧，测量信号能自动输出，理想的情况是能随钻测斜，并与钻机控制仪器联合使用，做到自动控制钻头按预定方向钻进。

本书对工程测量中广泛使用的陀螺经纬仪，建立了在各种受力情况下的运动微分方程。并求解，对其运动规律和工作原理进行了分析。对在工程测量中有应用前景的单自由度陀螺罗盘和钻井测斜中使用的陀螺测斜仪的工作原理和精度也进行了分析。对陀螺仪的一般应用和新型陀螺仪中有关的部分做了简单的介绍。

为了便于理解，本书在讲述中较多地应用了相对运动的理论和观点，这样可以更直观、更深刻地了解陀螺特性的物理本质和陀螺仪的运动规律。

阅读本书需具有一般工科大学的高等数学、线性代数和理论力学的基本知识。本书适合于从事工程测量的工程技术人员，从事测量用陀螺仪表的研究制造人员阅读，也可作为大专院校有关专业的教材或教学参考书。

第一章　陀螺运动学

刚体在运动过程中，若其内有一点始终保持不动，这种运动称为刚体的定点运动，或刚体绕定点的转动。装设在固定基座上的陀螺仪，如果只研究其转子相对于基座的运动，也是刚体的定点运动问题。因此，常将实际的陀螺仪抽象为定点运动的刚体，亦即以定点运动的刚体作为陀螺研究的力学模型，并从刚体的定点运动开始来研究陀螺的运动学特性。定点运动刚体的运动学特性通常用刚体转动的运动方程、角速度向量、角加速度向量以及刚体上任意点的位置向量、速度向量和加速度向量来描述。本章主要讨论这些重要物理量的意义以及它们在不同参考坐标系之间的转换关系。

1.1　向量及其表示法

直角坐标系 $0xyz$ 中，各坐标轴的单位向量为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。任意向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系中的解析表达式为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

x,y,z 为向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标轴上的投影，如图 1-1 所示。

向量 $\boldsymbol{r}$ 的矩阵表达式为

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [x,y,z]^T \tag{1-2}$$

向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个坐标轴 $0x,0y,0z$ 正向间夹角的余弦称为方向余弦。向量 $\boldsymbol{r}$ 在三根轴上的投影分量可用向量的模和三个方向余弦来表示，即

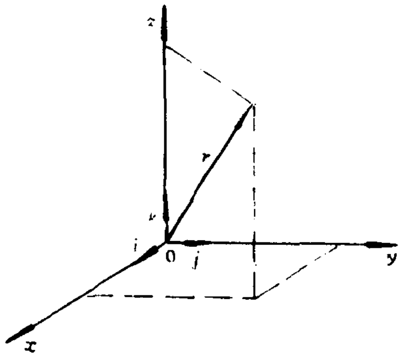


图 1-1　向量在直角坐标系中的表示

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{i}) \\
y &= r\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{j}) \\
z &= r\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k})
\end{aligned}
\tag{1-3}
$$

r 是向量的模，直角坐标系中应满足关系式：

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1-4}$$

将式(1-3)代入式(1-4)，可得到三个方向余弦应满足的关系式：

$$\cos^2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{i}) + \cos^2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{j}) + \cos^2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{k}) = 1 \tag{1-5}$$

由此可知，三个方向余弦中只有二个是完全独立的。

下面讨论同一参考系中，不同向量之间的代数运算。

直角坐标系 $0xyz$ 中，有任意向量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$，如图 1-2 所示。

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$$

向量的运算分别表示如下：

向量的加减运算：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 \pm \boldsymbol{r}_2 = {} & (x_1 \pm x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 \pm y_2)\boldsymbol{j} \\
& + (z_1 \pm z_2)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
\tag{1-6}
$$

向量的数量积运算：

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{1-7}$$

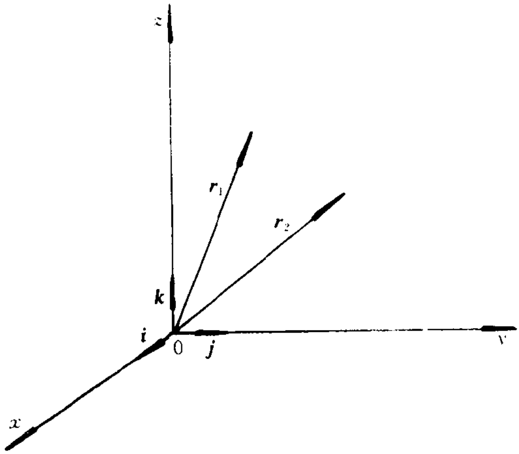


图 1-2　同一坐标系中的二个向量

向量的向量积运算：

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\boldsymbol{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\boldsymbol{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

向量积的模可表示为

$$|\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2| = r_1 r_2 \sin(\boldsymbol{r}_1 . \boldsymbol{r}_2) \tag{1-9}$$

向量积的方向垂直于向量 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$，服从右手法则。

如果将 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 用矩阵表示，则为

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

那末上述的各种运算应按矩阵的运算法则进行，分别表示如下：

向量的加减运算：

$$\boldsymbol{r}_1 \pm \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & \pm & x_2 \\ y_1 & \pm & y_2 \\ z_1 & \pm & z_2 \end{bmatrix} \tag{1-10}$$

向量的数量积运算：

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = [x_1, y_1, z_1] \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$= [r_1]^T [r_2]$$

$$= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \tag{1-11}$$

向量的向量积运算：

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} \tag{1-12}$$

这里定义了一个新的矩阵，用 R_1 表示：

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 R_1 为向量 $\boldsymbol{r}_1$ 的反对称矩阵。根据反对称矩阵的定义，$R_1^T = -R_1$。这样，向量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 的向量积就可以表示为向量 $\boldsymbol{r}_1$ 的反对称矩阵 R_1 与向量 r_2 的列阵$[r_2]$的矩阵乘积，式(1-12)可简写为

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = R_1 [r_2]$$

需要说明，任何一个向量都可以表示为列矩阵形式，相应地也有它的反对称矩阵。向量的反对称矩阵通常用相应的大写字母表示。例如单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix};\quad \boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

相应的反对称矩阵为

$$I=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

那么得到

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=1$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}&=I[j]\\&=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

下面运用以上理论计算复摆的重力矩 $\boldsymbol{M}_P$。复摆如图 1-3 所示，0 点为复摆的支承点，重力为 $\boldsymbol{P}$，重心 C 的位置向量为 $\boldsymbol{r}$。