高等代数教程习题集

王萼芳 编著

清华大学出版社

高等代数教程

习 题 集

王萼芳 编

清华大学出版社

(京)新登字158号

内 容 简 介

本套书——《高等代数教程》(上、下册)和《高等代数教程习题集》，是北京大学王萼芳教授在其深受读者欢迎的教材的基础上改编而成的，已被北京市高等教育自学考试委员会选用。

《高等代数教程习题集》是本套书中《高等代数教程》(上、下册)各章内容的总结和习题解答。

同一类型的计算题，给出了一两个题的计算过程，证明题都有证明或者提示。

书末的补充题，提供了一些难度较大的习题，供读者特别是研究生选用。

读者对象：大专院校、高等教育自学考试和电大的师生。

书　名：高等代数教程习题集
作　者：王萼芳　编
出版者：清华大学出版社（北京清华大学校内，邮编100084）
印刷者：北京清华园胶印厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：850×1168　1/32　印张：17.125　字数：443千字
版　次：1997年5月第1版　1997年5月第1次印刷
书　号：ISNB 7-302-02483-9/O·181
印　数：0001—5000
定　价：20.00元

前　　言

本书是清华大学出版社出版的《高等代数教程》(上、下册)的习题解答。

书中的习题是根据《高等代数教程》中的习题按章节编排的，每一节的习题统一编号，为了学习其他高等代数课本的读者也能使用此书，在每节的前面编写了内容摘要，因此本书可以用作学习高等代数的读者的独立参考读物。

对于同一类型的计算题，书中给出其中一二个题目的详细计算过程，其余的只给出答案；对于证明题，大都给出了证明；对少数较为简单的题目只给了提示。

为了加强对读者的训练，本书最后还加了一章补充题。其中有些题目难度较大，读者可以根据自己的情况选做。

做习题是学好基础课的一个重要环节，通过习题了解课程内容和要求，巩固并提高对课程的理解，得到多方面的训练。和其他课程一样，高等代数解题的方法也是多种多样的，书中的算法及证明只是提供读者参考，希望读者能认真学习教材，掌握基本理论及算法，通过独立思考，自己做出习题。

希望本书能对读者有所帮助，并希望读者对本书提出宝贵意见，以便进一步改进。

作者

1996 年 11 月

于北京

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　行　列　式

1.1　2 阶和 3 阶行列式

内 容 摘 要

1. 2 阶行列式

(1) 2 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(2) 2 阶行列式对线性方程组的应用：

如果二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么这个方程组有唯一解，解为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

2. 3阶行列式

(1) 3阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

(2) 3阶行列式对线性方程组的应用:

如果三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么这个方程组有唯一解，解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

习 题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} a+b & a \\ a-b & 2a-b \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$；(5) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$；(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；

2. 解下列1次方程组：

(1) $\begin{cases} 2x-5y=6, \\ x-y=5; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2+3x_3=1, \\ x_1+x_2+x_3=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1, \\ x_1-5x_2+3x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=-1; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=10, \\ x_1+4x_2-2x_3=-8, \\ 3x_1+2x_2-x_3=1. \end{cases}$

解 答

1.

(1) **解**：$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=12-(-10)=22$；

(2) **答**：$a^2+2ab-b^2$；

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

(3) **解**：$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -20+6+6-1-36-(-20)=-25$；

(4) **答**：56；(5) **答**：0；(6) **答**：$3abc-a^3-b^3-c^3$.

2.

(1) **解**：因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3\neq 0,$$

所以这个方程组有唯一解，又因

$$D_1=\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=19, D_2=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=4,$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{19}{3},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{4}{3};$$

(2) **答**：$x_1=3$，$x_2=-2$，$x_3=-1$；

(3) **答**：$x_1=-\frac{11}{8}$，$x_2=-\frac{9}{8}$，$x_3=-\frac{6}{8}$；

(4) **答**：$x_1=2$，$x_2=-1$，$x_3=3$.

1.2 *n* 阶 排 列

内 容 摘 要

1. 关于 n 阶排列的一些定义

定义 1 由 1，2，…，n 组成的一个有序数组称为一个 ***n* 阶排列**.

定义 2 在一个排列中，如果一个大数排在一个小数之前，就称这两个数组成一个**逆序**. 一个排列中，逆序的总数称为这个排

列的**逆序数**.

我们用 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 表示 n 阶排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数.

定义 3 逆序数是偶数的 n 阶排列称为**偶排列**；逆序数是奇数的 n 阶排列称为**奇排列**.

n 阶排列 $1\ 2\cdots n$ 称为**自然序排列**，是一个偶排列.

2. 主要结论

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

定理 2 在全部 $n!$ 个 n 阶排列中，奇、偶排列的个数相同，各有 $\frac{1}{2}n!$ 个.

定理 3 任意一个 n 阶排列都可以经过一些对换变成自然序排列，并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

推论 任意两个 n 阶排列都可经过一些对换互变. 而且如果这两个排列奇偶相同，则所作的对换次数是偶数；如果这两个排列奇偶相反，则所作的对换次数是奇数.

习 题 1.2

1. 写出第 1，2 个位置是 2，4 的全部 5 阶排列，并求它们的逆序数.

2. 求下列排列的逆序数：

3 1 7 4 2 8 6 9 5；5 2 8 4 9 7 6 3 1；6 5 4 3 2 1.

3. 求下列排列的逆序数，并决定其奇偶性：

4 2 6 7 3 5 1；1 3 5 7 2 4 6；5 4 7 8 2 1 3 6；6 1 4 7 2 8 5 3.

4. 决定 i，j 使

(1) 2 1 5 i 7 j 9 4 6 为奇排列；

(2) 3 9 7 2 i 1 5 j 4 为偶排列.

5. 用对换将排列 315694278 变为自然序排列. 写出所作的对换，并由此决定这个排列的奇偶 .

解　答

1. **解**：第 1，2 位置是 2，4 的 5 阶排列共有 6 个，它们是：

2 4 1 3 5，　　逆序数为 3；

2 4 1 5 3，　　逆序数为 4；

2 4 3 1 5，　　逆序数为 3；

2 4 3 5 1，　　逆序数为 4；

2 4 5 1 3，　　逆序数为 5；

2 4 5 3 1，　　逆序数为 6.

2. **答**：$\tau(3\ 1\ 7\ 4\ 2\ 8\ 6\ 9\ 5)=11$；$\tau(5\ 2\ 8\ 4\ 9\ 7\ 6\ 3\ 1)=22$；$\tau(6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)=15$.

3. **答**：$\tau(4\ 2\ 6\ 7\ 3\ 5\ 1)=12$，是偶排列；

$\tau(1\ 3\ 5\ 7\ 2\ 4\ 6)=6$，是偶排列；

$\tau(5\ 4\ 7\ 8\ 2\ 1\ 3\ 6)=16$，是偶排列；

$\tau(6\ 1\ 4\ 7\ 2\ 8\ 5\ 3)=13$，是奇排列.

4. **答**：(1) $i=3$，$j=6$；(2) $i=8$，$j=8$.

5. **解**：$315694278 \xrightarrow{(3,\ 1)} 135694278 \xrightarrow{(3,\ 2)} 125694378 \xrightarrow{(5,\ 3)} 123694578 \xrightarrow{(6,\ 4)} 123496578 \xrightarrow{(9,\ 5)} 123456978 \xrightarrow{(9,\ 7)} 123456798 \xrightarrow{(9,\ 8)} 123456789$，因为 315694278 经过 7 次对换变为自然序排列，所以这是一个奇排列.

1.3　*n* 阶行列式的定义

内 容 摘 要

1. *n* 阶行列式的定义

定义 4　*n* 阶行列式

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \tag{1}
$$

等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$
a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{2}
$$

的代数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 阶排列，每个项（2）前面带有正负号. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，项（2）前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，项（2）前面带负号. 即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{3}
$$

这里 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

(3)式称为 n 阶行列式的展开式.

n 阶行列式还可表示成

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} = \sum_{(i_1i_2\cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_2n}\cdots a_{i_nn} \tag{3'}
$$

式中 $\sum\limits_{(i_1i_2\cdots i_n)}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

还可同时应用行、列指标的排列来决定行列式（1）中的项前

面所带的正负号：(1) 的项

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

前面所带的符号为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

2. 一些特殊的行列式

(1) 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(2) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

习 题 1.3

1. 决定下列各项前面所带的正负号：

(1) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}$;

(2) $a_{25}a_{34}a_{51}a_{72}a_{66}a_{17}a_{43}$;

(3) $a_{13}a_{26}a_{32}a_{54}a_{41}a_{65}$.

2. 写出下面 5 阶行列式中包含 $a_{13}a_{25}$ 并带正号的所有项：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

3. 求 i，k 使

(1) $a_{12}a_{3i}a_{2k}a_{51}a_{44}$是 5 阶行列式中带正号的项；

(2) $a_{21}a_{i4}a_{45}a_{k2}a_{33}$是 5 阶行列式中带负号的项.

4. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & 10 & 11 & -5 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & 7 & 5 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$.

5. 计算 n 阶行列式

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com