广义相对论

〔英〕P. A. M. 狄拉克 著

科学出版社

广义相对论

〔英〕P. A. M. 狄拉克 著

朱培豫 译

科学出版社

1979

内 容 简 介

本书阐述广义相对论的基本内容，全书共分 35 节，前 14 节和第 20、21 节阐述张量分析和黎曼几何的基本概念，为阐述广义相对论的基本原理作准备；其余各节阐述广义相对论的基本原理及其应用. 本书的特点是：物理概念清楚，数学推导简明，适宜于初学者.

本书可供高等院校物理、数学、天文系师生参考，也可供理论工作者和有关科技人员参考.

P. A. M. Dirac
GENERAL THEORY OF RELATIVITY
John Wiley, 1975

广 义 相 对 论

〔英〕P. A. M. 狄拉克 著

朱培豫 译

*

科学出版社 出版
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1979 年 10 月第 一 版 开本：787×1092 1/32
1979 年 10 月第一次印刷 印张：2 3/8
印数：0001—40,200 字数：51,000

统一书号：13031·1097
本社书号：1542·13—3

定价： 0.25 元

序

爱因斯坦广义相对论需要用弯曲空间来描述物理世界．如果我们希望不限于对物理关系作肤浅的讨论，就必须建立一些精确的方程来处理弯曲空间．有一种成熟的但相当复杂的数学技巧能够做到这一点．任何读者想要了解爱因斯坦的理论，就必须掌握这种数学技巧．

本书是根据作者在佛罗里达州立大学物理系所作的连续讲演而写成的，其目的在于以直接、简明的方式提供必不可少的材料．除了狭义相对论的基本概念和场函数的微分处理外，毋需具备更深的知识．本书将使读者能够克服了解广义相对论时所遇到的主要障碍，而且使花费的时间和精力尽可能地少一些，并使读者能够进一步深入研究他感兴趣的任何专门领域．

P. A. M. 狄拉克

1975 年 2 月

目 录

1. 狭义相对论

物理学的时空，需要有四个坐标：时间 t 和三个空间坐标 x, y, z. 令

$$t = x^0,\ x = x^1,\ y = x^2,\ z = x^3,$$

于是这四个坐标可以写成 x^μ，这里附标 μ 取 0, 1, 2, 3 四个值. 附标写在上方，是为了可以使相对论的所有普遍方程中的附标保持"均衡". 均衡的精确含义稍后就会明白.

我们再取一点，它接近于原先考虑的点 x^μ，令其坐标为 $x^\mu + dx^\mu$. 构成位移的四个量 dx^μ 可以看作是一个矢量的四个分量. 狭义相对论定律允许我们作出坐标的线性非齐次变换，这些变换导致 dx^μ 的线性齐次变换. 如果我们适当选择距离和时间的单位，使得光速等于 1，那末由 dx^μ 的这些线性齐次变换，便使得

$$(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{1.1}$$

为不变量.

在坐标变换下按与 dx^μ 同样方式变换的四个量 A^μ 组成的任一集合构成一个逆变矢量. 可以把不变量

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = (A, A) \tag{1.2}$$

叫做矢量长度平方. 设有另一逆变矢量 B^μ，则有标积不变量：

$$A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 = (A, B). \tag{1.3}$$

为了得到这些不变量的一种方便写法，我们引进降低附标的方法. 定义

$$A_0 = A^0,\ A_1 = -A^1,\ A_2 = -A^2, A_3 = -A^3. \tag{1.4}$$

那末(1.2)左边的表式可以写作 $A_\mu A^\mu$，这里应该理解为对 μ 的所有四个值求和. 用同样记号，我们可以把(1.3)写为 $A_\mu B^\mu$ 或 $A^\mu B_\mu$.

(1.4) 式引进的四个量 A_μ 也可看作一个矢量的四个分量. 由于正、负号的差别，A_μ 在坐标变换下的变换规律和 A^μ 的稍有不同，这种矢量叫做协变矢量.

由两个逆变矢量 A^μ 和 B^μ，可以构成十六个量 $A^\mu B^\nu$. 象本书中出现的所有希腊附标一样，附标 ν 也取 0, 1, 2, 3 四个值. 这十六个量构成一个二秩张量的十六个分量. 有时把它叫做矢量 A^μ 和 B^μ 的外积，以区别于称之为内积的标积(1.3).

张量 $A^\mu B^\nu$ 是一个较为特殊的张量，因其分量之间有特殊的关系. 但是，我们可以把用这种方法构成的几个张量加起来，得到一般的二秩张量；比方说，

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu + A'^\mu B'^\nu + A''^\mu B''^\nu + \cdots. \qquad (1.5)$$

一般张量的主要性质是：在坐标变换下，其分量变换的方式和量 $A^\mu B^\nu$ 的相同.

我们可以采用对 (1.5) 右边每一项降低附标的方法来降低 $T^{\mu\nu}$ 中的一个附标. 这样我们就可构成 $T_\mu{}^\nu$ 或 $T^\mu{}_\nu$. 我们可以把两个附标一起降低而得到 $T_{\mu\nu}$.

在 $T_\mu{}^\nu$ 中，我们可以令 $\nu = \mu$ 而得 $T_\mu{}^\mu$. 这里要对 μ 的所有四个值求和. 一附标在某项中出现两次，总是意味着对此附标求和. 于是 $T_\mu{}^\mu$ 是一个标量，等于 $T^\mu{}_\mu$.

我们可以继续采用这一方法，把两个以上的矢量相乘，注意它们的附标全都不同. 用这种方法，可以构成更高秩的张量. 如果矢量全是逆变的，我们得到一个张量，其附标全在上方. 然后我们可以降低任一个附标而得到一般张量，它有任意个上标和任意个下标.

我们可以令一个下标等于一个上标．于是我们必须对这个附标的所有值求和．这个附标就变为傀标．得到的张量比原来的张量就少了两个有效附标．这种方法叫做缩并．因此，如果我们要把四秩张量 $T^{\mu}{}_{\nu\rho}{}^{\sigma}$ 缩并，有一种办法是令 $\sigma=\rho$，它给出二秩张量 $T^{\mu}{}_{\nu\rho}{}^{\rho}$，只有十六个分量，这是由 μ 和 ν 的四个值产生的．我们可以再一次缩并而得到标量 $T^{\mu}{}_{\mu\rho}{}^{\rho}$，仅有一个分量．

至此，我们就能体会到附标均衡的含义．一个方程中出现的任一有效附标，在该方程的每一项中只出现一次，不是在上方，就是在下方．一个附标在一项中出现两次，即为一个傀标，而且它必须在上方和下方各出现一次．它可以用该项中未曾出现过的其它希腊字母取代之．于是，$T^{\mu}{}_{\nu\rho}{}^{\rho}=T^{\mu}{}_{\nu\alpha}{}^{\alpha}$．一个附标在一项中决不可出现两次以上．

2. 斜　　轴

在表述广义相对论以前，为方便起见，先考虑一种中间表述方式——斜交直线轴表述的狭义相对论．

如果我们变换到斜轴，(1.1) 中 dx^{μ} 的每一个分量变为新的 dx^{μ} 的线性函数，而其二次式(1.1)就变为新的 dx^{μ} 的一般二次式．我们可以把它写成

$$g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}, \tag{2.1}$$

式中理解为对 μ，ν 的所有值求和．(2.1) 中出现的系数 $g_{\mu\nu}$ 依赖于斜轴系．当然，由于 $g_{\mu\nu}$ 和 $g_{\nu\mu}$ 的差别在二次式(2.1)中不出现，我们可取 $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$．因而有十个独立系数 $g_{\mu\nu}$．

一般的逆变矢量有四个分量 A^{μ}，它在任何斜轴变换下象 dx^{μ} 一样变换．于是

$$g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}$$

是不变量. 它是矢量 A^μ 的长度平方.

设 B^μ 是另一逆变矢量;则当 λ 为任意数值时,$A^\mu+\lambda B^\mu$ 仍是逆变矢量. 其长度平方为

$$g_{\mu\nu}(A^\mu+\lambda B^\mu)(A^\nu+\lambda B^\nu)=g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu+\lambda(g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu+g_{\mu\nu}A^\nu B^\mu)+\lambda^2 g_{\mu\nu}B^\mu B^\nu.$$

对一切 λ 值来说,上式必为一不变量. 由此得出,与 λ 无关的一项以及 λ 与 λ^2 的系数,必定分别为不变量. λ 的系数为

$$g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu+g_{\mu\nu}A^\nu B^\mu=2g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu,$$

这是由于在上式左边第二项中可以交换 μ 和 ν, 然后再利用 $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$. 这样, 我们发现 $g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$ 为一不变量. 它是 A^μ 和 B^μ 的标积.

令 g 为 $g_{\mu\nu}$ 的行列式. 它必定不等于零; 否则这四个轴不会提供时空的四个独立方向, 从而不适于作为坐标轴. 就前一节的正交轴来说, $g_{\mu\nu}$ 的对角元素为 $1,-1,-1,-1$, 非对角元素为零. 于是 $g=-1$. 对斜轴来说, g 必须仍为负值,因为斜轴可以由正交轴通过一种连续程序而得到,这种程序导致 g 连续变化,而且 g 不能通过零值.

有一个下标的协变矢量 A_μ 定义为

$$A_\mu=g_{\mu\nu}A^\nu. \tag{2.2}$$

因行列式 g 不等于零, 通过这些方程可以由 A_μ 求出 A^ν 的解. 令其结果为

$$A^\nu=g^{\mu\nu}A_\mu. \tag{2.3}$$

每个 $g^{\mu\nu}$ 等于 $g_{\mu\nu}$ 行列式中对应元素 $g_{\mu\nu}$ 的余子式除以行列式本身. 由此得出 $g^{\mu\nu}=g^{\nu\mu}$.

让我们把(2.2)中 A^ν 代以 (2.3) 所给出的值. 为使同一项中不含有三个 μ 附标,我们必须用其它希腊字母,比方说 ρ, 代替(2.3)中的傀标 μ. 我们得到

$$A_\mu=g_{\mu\nu}g^{\nu\rho}A_\rho.$$

因为这方程必须对任何四个量 A_μ 成立，我们可以推知

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = g_\mu^\rho, \tag{2.4}$$

其中

$$\begin{aligned} g_\mu^\rho &= 1, \quad \text{当}\ \mu = \rho\ \text{时}, \\ &= 0, \quad \text{当}\ \mu \neq \rho\ \text{时}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

上式(2.2)可以用来降低张量中出现的任一上标．同样，(2.3)可以用来升高任一下标．如果把一个附标降低后又再升高，则因(2.4)和(2.5)，其结果等于原来那个张量．请注意：g_μ^ρ 起的作用正好是以 ρ 取代 μ，

$$g_\mu^\rho A^\mu = A^\rho,$$

或以 μ 取代 ρ，

$$g_\mu^\rho A_\rho = A_\mu.$$

当我们把升高附标规则应用到 $g_{\mu\nu}$ 中的 μ 时，就得

$$g^\alpha{}_\nu = g^{\alpha\mu}g_{\mu\nu}.$$

若我们考虑到，由于 $g_{\mu\nu}$ 的对称性，可以在 $g^\alpha{}_\nu$ 中写出两个附标，其中一个在另一个之上，则上式与(2.4)一致．而且我们可以用同一规则升高附标 ν，得到

$$g^{\alpha\beta} = g^{\nu\beta}g_\nu^\alpha,$$

此结果可直接由(2.5)得出． 升高和降低附标的规则适用于 $g_{\mu\nu}$，g_ν^μ，$g^{\mu\nu}$ 的一切附标．

3. 曲线坐标

我们现在转入讨论曲线坐标系．我们讨论在空间一点上的那些量．这种量相对于该点上的轴可以有各种分量．可能有一个量在空间一切点上具有相同的性质，这个量就变成一个场量．

如果取这样的一个量 Q（若它有几个分量的话，或取其一

个分量)，我们把它对四个坐标的任何一个取微分. 把结果写为

$$\frac{\partial Q}{\partial x^{\mu}} = Q_{,\mu}.$$

下标前面加上一个逗号，总是用来表示上面这样的导数. 我们把附标 μ 写在下面，是为了和左边分母的上标 μ 相均衡. 注意到从点 x^{μ} 移到邻点 $x^{\mu}+\delta x^{\mu}$ 时，Q 的变化为

$$\delta Q = Q_{,\mu}\delta x^{\mu}, \tag{3.1}$$

由此看到附标是均衡的.

我们将会遇到空间一点上的矢量和张量，它们相对于该点上的轴有各种分量. 当我们改变坐标系时，取决于该点上轴的变化，诸分量将按照和上一节相同的规则变换. 正如前述，我们将有 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 用来降低和升高附标. 然而，它们不再是常量. 它们是逐点改变的. 它们是场量.

我们来研究坐标系作一种特殊变换所导致的结果. 取新曲线坐标 x'^{μ}，每一个 x'^{μ} 都是四个 x^{μ} 的函数. 可以把 x'^{μ} 更方便地写成 $x^{\mu'}$，撇号加在附标上而不加在主要符号上.

令 x^{μ} 作微小改变，我们得到四个量 δx^{μ}，它们构成一个逆变矢量的四个分量. 对新的轴来说，这个矢量有下列分量:

$$\delta x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}\delta x^{\nu} = x^{\mu'}{}_{,\nu}\delta x^{\nu},$$

这里用了(3.1)的记号. 上式给出了任一逆变矢量 A^{ν} 的变换规则;即

$$A^{\mu'} = x^{\mu'}{}_{,\nu}A^{\nu}. \tag{3.2}$$

交换两个轴系，并改变附标，得

$$A^{\lambda} = x^{\lambda}{}_{,\mu'}A^{\mu'}. \tag{3.3}$$

由偏微分规则可知

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} = g^{\lambda}_{\nu},$$

这里用了记号(2.5)．于是

$$x^{\lambda}{}_{,\mu'} x^{\mu'}{}_{,\nu} = g^{\lambda}_{\nu}. \tag{3.4}$$

这使我们能看出(3.2)和(3.3)这两方程是一致的，因为如果把(3.2)代入(3.3)的右边，就得

$$x^{\lambda}{}_{,\mu'} x^{\mu'}{}_{,\nu} A^{\nu} = g^{\lambda}_{\nu} A^{\nu} = A^{\lambda}.$$

为要知道协变矢量 B_{μ} 是如何变换的，我们利用 $A^{\mu}B_{\mu}$ 为不变量这一条件．于是，借助于(3.3)，

$$A^{\mu'} B_{\mu'} = A^{\lambda} B_{\lambda} = x^{\lambda}{}_{,\mu'} A^{\mu'} B_{\lambda}.$$

上式必须对四个 $A^{\mu'}$ 的一切值成立；因此，我们可以令 $A^{\mu'}$ 的系数相等而得

$$B_{\mu'} = x^{\lambda}{}_{,\mu'} B_{\lambda}. \tag{3.5}$$

现在我们就能用公式(3.2)和(3.5)来对含有任意个上标和下标的任何张量施行变换．我们只须对每个上标运用象 $x^{\mu'}{}_{,\nu}$ 那样的系数，对每个下标运用象 $x^{\lambda}{}_{,\mu'}$ 那样的系数，并令所有附标均衡，例如

$$T^{\alpha'\beta'}{}_{\gamma'} = x^{\alpha'}{}_{,\lambda} x^{\beta'}{}_{,\mu} x^{\nu}{}_{,\gamma'} T^{\lambda\mu}{}_{\nu}. \tag{3.6}$$

按这条规则变换的任一量都是张量．这可以当作张量的定义．

应该注意，一个张量对其两个附标(比如 λ 和 μ)是对称的或反对称的，才有意义，因为这种对称性质在坐标变换下保持不变．

(3.4)可以写成

$$x^{\lambda}{}_{,\alpha'} x^{\beta'}{}_{,\nu} g^{\alpha'}_{\beta'} = g^{\lambda}_{\nu}.$$

这正好证明 g^{λ}_{ν} 为一张量．对任意两个矢量 A^{μ}, B^{ν}，我们也有

$$g_{\alpha'\beta'} A^{\alpha'} B^{\beta'} = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu}{}_{,\alpha'} x^{\nu}{}_{,\beta'} A^{\alpha'} B^{\beta'}.$$

因为上式对 $A^{\alpha'}$, $B^{\beta'}$ 一切值成立，故我们能推知

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\mu\nu}x^{\mu}{}_{,\alpha'}x^{\nu}{}_{,\beta'}. \tag{3.7}$$

上式表明 $g_{\mu\nu}$ 为一张量. 同理，$g^{\mu\nu}$ 也为一张量. 它们称为基本张量.

如果 S 为任一标量场量，可以把它看作四个 x^{μ} 的函数或四个 $x^{\mu'}$ 的函数. 由偏微分规则，

$$S_{,\mu'} = S_{,\lambda}x^{\lambda}{}_{,\mu'}.$$

因此，$S_{,\lambda}$ 的变换类似于方程(3.5)的 B_{λ}，于是标量场的导数是一协变矢量场.

4. 非 张 量

我们可能遇到一种量 $N^{\mu}{}_{\nu\rho\cdots}$，它有各种不同的上标和下标，但不是张量. 如果它是张量，则在坐标变换下必须按(3.6)表示的规则而变换. 按任何别的规则变换的则是非张量. 张量有下述性质：如果其全部分量在一坐标系中等于零，则在一切坐标系中均等于零. 非张量可以不具备这一性质.

对于非张量，我们可以用与张量相同的规则来升高或降低其附标. 例如，

$$g^{\alpha\nu}N^{\mu}{}_{\nu\rho} = N^{\mu\alpha}{}_{\rho}.$$

这些规则的一致性与不同坐标系间的变换规则完全无关. 同样，我们可以令一上标与一下标相等而把非张量缩并.

在同一方程中张量和非张量可以一起出现. 附标均衡规则同样适用于张量和非张量.

商定理

设 $P_{\lambda\mu\nu}$ 满足下列条件：对于任一矢量 A^{λ}，$A^{\lambda}P_{\lambda\mu\nu}$ 为一张量. 于是 $P_{\lambda\mu\nu}$ 为一张量.

为了证明这一定理，我们写为 $A^{\lambda}P_{\lambda\mu\nu} = Q_{\mu\nu}$. 已知它为

一张量；故有

$$Q_{\beta\gamma} = Q_{\mu'\nu'}x^{\mu'}{}_{,\beta}x^{\nu'}{}_{,\gamma}.$$

于是

$$A^{\alpha}P_{\alpha\beta\gamma} = A^{\lambda'}P_{\lambda'\mu'\nu'}x^{\mu'}{}_{,\beta}x^{\nu'}{}_{,\gamma}.$$

因为 A^{λ} 为一矢量，由(3.2)知

$$A^{\lambda'} = A^{\alpha}x^{\lambda'}{}_{,\alpha}.$$

所以

$$A^{\alpha}P_{\alpha\beta\gamma} = A^{\alpha}x^{\lambda'}{}_{,\alpha}P_{\lambda'\mu'\nu'}x^{\mu'}{}_{,\beta}x^{\nu'}{}_{,\gamma}.$$

此方程必须对 A^{α} 的一切值成立，故

$$P_{\alpha\beta\gamma} = P_{\lambda'\mu'\nu'}x^{\lambda'}{}_{,\alpha}x^{\mu'}{}_{,\beta}x^{\nu'}{}_{,\gamma},$$

这就证明了 $P_{\alpha\beta\gamma}$ 为一张量.

如果用有任意个附标的量代替 $P_{\lambda\mu\nu}$，本定理也成立，如果其中某些附标是上标，本定理也仍然成立.

5. 弯曲空间

我们可以容易地把二维弯曲空间想象为三维欧几里德空间中的一个曲面. 同样，可以把四维弯曲空间浸没于更高维平坦空间之中. 这样的弯曲空间叫做黎曼空间. 黎曼空间中的微小区域近似地是平坦的.

爱因斯坦假定物理空间具有这种性质，由此奠定了他的引力论的基础.

为了处理弯曲空间，不能引进直线坐标系. 必须用曲线坐标，如 3 节中所讨论的. 那一节的全部公式都可适用于弯曲空间，因为所有方程都是局部方程，不受弯曲的影响.

点 x^{μ} 和邻点 $x^{\mu}+dx^{\mu}$ 之间的不变距离 ds 由下式给出：

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu},$$

和(2.1)一样. 对于类时间隔，ds 是实数;对于类空间隔，ds 是虚数.

就曲线坐标网来说，$g_{\mu\nu}$ 作为坐标的函数,确定了全部距离元; 所以 $g_{\mu\nu}$ 也确定度规. 它们确定坐标系和空间的弯曲。

6. 平 行 位 移

设在点 P 有一矢量 A^{μ}. 正如我们考虑三维欧几里德空间中二维弯曲空间这个实例所容易理解的那样，如果空间是弯曲的,则我们不能给出在不同点 Q 上的平行矢量的含义.然而,如果我们取点 P' 接近于 P,并把 P 到 P' 的距离考虑作一级小量,则在二级小量误差范围内，P' 有一平行矢量. 这样，我们就能给出矢量 A^{μ} 保持其自身平行和长度不变而从 P 移到 P' 时位移的意义.

通过平行位移这一方法，我们就能沿一条路线把矢量连续地移位. 取 P 到 Q 的一条路线，在点 Q 最终得到的矢量对这条路线来说是平行于点 P 的原矢量的. 但是，不同的路线给出不同的结果. 点 Q 的平行矢量没有绝对意义. 如果我们绕一闭合迴路用平行位移方法把点 P 的矢量移动，最后在点 P 所得的矢量通常具有不同方向.

假定我们的四维物理空间浸没于更高维(比方说 N 维)的平坦空间中，我们可以得到矢量平行位移方程. 在这 N 维空间中,我们引进直线坐标 $z^n(n=1,2,\cdots,N)$. 这些坐标毋需是正交的，只需是直线的. 在两相邻点之间有一个不变距离 ds，由下式给出:

$$ds^2 = h_{nm}dz^n dz^m, \tag{6.1}$$

对 $n,m=1,2,\cdots,N$ 求和. 不同于 $g_{\mu\nu}$，h_{nm} 是常数.我

们可以用它们来降低N维空间的附标；于是

$$dz_n = h_{nm} dz^m.$$

物理空间构成N维平空间中的一个四维“曲面”．曲面上每一点 x^μ 决定N维空间中的一个定点 y^n．每个坐标 y^n 为四个 x 的函数，例如 $y^n(x)$．曲面方程将由N个 $y^n(x)$ 消去 x 而给出．这些方程共有$N-4$个．

将 $y^n(x)$ 对参数 x^μ 取微分，得

$$\frac{\partial y^n(x)}{\partial x^\mu} = y^n{}_{,\mu}.$$

对于曲面上相差 δx^μ 的两邻点，有

$$\delta y^n = y^n{}_{,\mu} \delta x^\mu. \tag{6.2}$$

由(6.1)，这两点距离的平方为

$$\delta s^2 = h_{nm} \delta y^n \delta y^m = h_{nm} y^n{}_{,\mu} y^m{}_{,\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu.$$

因为 h_{nm} 是常数，上式可以写成

$$\delta s^2 = y^n{}_{,\mu} y_{n,\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu.$$

我们还有

$$\delta s^2 = g_{\mu\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu.$$

因此

$$g_{\mu\nu} = y^n{}_{,\mu} y_{n,\nu}. \tag{6.3}$$

在物理空间的 x 点上取一逆变矢量 A^μ．其分量与(6.2)的 δx^μ 类似．它们将给出N维空间的一逆变矢量 A^n，后者与(6.2)的 δy^n 类似．于是

$$A^n = y^n{}_{,\mu} A^\mu. \tag{6.4}$$

当然，这个矢量是位于曲面内的．

现在把矢量 A^n 保持与其自身平行（当然，这就意味着保持其分量不变），而移位到曲面内一邻点 $x+dx$．由于曲面的曲率，在新的点该矢量不再位于曲面内，但是我们可以把它投影到曲面上，以得到一个位于曲面内的确定矢量．