

分层介质中的波

(第二版)

[苏联] Л. М. 布列霍夫斯基赫 著

科学出版社

分层介质中的波

(第二版)

[苏联] Л. М. 布列霍夫斯基赫 著

杨训仁 译



科学出版社

1985

8510593

内 容 简 介

本书是一本经典著作,系统地论述电磁波和弹性波(其中最重要的是声波)在分层介质(如大气、海水、地层等)中传播的理论。随着现代科学技术的迅速发展,这一理论,对于实际应用已日益重要。本书系根据原书第二版译出,内容与第一版相比补充了许多近年来极为重要的课题,并对原来的基本内容重新作了调整。

全书共分九章。首先讨论平面波在不连续分层介质(即各层之间有明显的分界面)中的传播;然后讨论平面波在连续分层介质中的传播;最后讨论球面波在这两类分层介质中的传播,其中包括一维波导、二维波导以及反波导等情形。

本书虽同时讨论了弹性波和电磁波的传播,但明显地(尤其与第一版相比)更侧重于前者(特别是声波的情形)。

本书可供电波传播,地球物理,声学等专业方面的研究人员、教师、研究生和高年级本科生参考。

L. M. Brekhovskikh
WAVES IN LAYERED MEDIA
Second Edition
Academic Press, 1980

分 层 介 质 中 的 波 (第二版)

[苏联] Л. М. 布列霍夫斯基赫 著
杨训仁 译

责任编辑 赵惠芝

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年6月第一版 开本:787×1092 1/16
1985年6月第一次印刷 印张:21 1/2
印数:0001—2,550 字数:492,000

统一书号:13031·2913

本社书号:4011·13—3

定价:5.00元

中 译 者 序

Л. М. 布列霍夫斯基赫院士著的《分层介质中的波》是波传播理论方面的一本重要专著,在国际上一直受到有关学术界的广泛推崇和重视。

原书第一版(1957)的中译本于1960年出版(英译本亦于同年出版)后,对国内电波传播、地震学、地球物理学和声学等领域,特别是对当时我国创建不久的水声学科起了一定的推动作用,成为一本重要的参考书。

1973年原书再版时作了重大修改,除原序中所提到的对某些内容的增删外,对于其余内容也重新作了调整,在系统性、合理性和严密性等方面都更臻完善。

这本中译本原来主要是根据贝耶(R. T. Beyer)教授的英译本(1980)翻译的。但后来发现,英译本对俄文版中的技术性错误几乎未作出任何修正,而且还增加了不少新错误,其中很大一部分是属于漏译和误译等原则性问题。鉴于这一情况,译者在翻译过程中又对照俄文原著第二版进行仔细校核,同时对俄文原版中的技术性错误以及英译本中出现的问题(共计约四百余处)作了改正。为了避免过于烦琐,均未加译注,特此说明。

英译者曾将所有俄文文献的著者姓名和期刊名称拉丁化,并将文章题目英译,文献编号也据此重新排列。为便于读者直接查找原始文献,中译本将这些文献一律复原为俄文,编号也恢复到与俄文原版一致,并将俄文版中列出的非俄文著作也还原为原文,同时对已有中译本的著作也尽量列出。此外,考虑到最近几年的发展以及原书对中文文献的忽视,译者提供了一个补充文献目录。

尽管作了如上一些努力,但因限于时间和水平,谬误和疏漏之处仍在所难免,尚希读者指正。

杨训仁

1982年10月

第二版英译者序

本书第一版的英译本¹⁾于1960年出版,并立即得到水声界的一致赞赏。布列霍夫斯基赫教授被公认为波传播领域内的一位杰出理论家。他由于这方面的贡献,在1976年荣获英国声学研究所颁发的瑞利奖章。

正如布列霍夫斯基赫教授在第二版的序言中指出的,本书第二版对第一版作了广泛的修改,并补充了相当多的新内容。除已被扩充的参考书目外,英译者又补充了一些较新的参考文献²⁾。

R. T. 贝耶

1) 该译本系由李伯曼(D. Lieberman)翻译。——中译者

2) 这些文献在中译本中未刊出,而由中译者另外补充了一些参考文献。——中译者

第二版原序

在第二版中,加进了一系列新问题的讲述。这些问题包括:波传播速度 $c=c(x, z)$ 依赖于两个坐标的介质中的波导理论,表面波导理论和耳语廊波(包括固体情形)理论,标准方程和标准积分,衍射线等等。对其他一些问题,如焦散线理论的讲解也大为扩展了,另一方面,关于水下声道的部分材料,由于未引起广泛的兴趣而被删去了。但这个问题以及一些类似问题在作者及其同事们刚刚完成的水声学专著中有较详尽的论述。其余材料都借助于更合乎当今水平的表述方法或多或少地作了压缩。参考书目也有大量增加。

Л. М. 布列霍夫斯基赫

第 一 版 原 序

本专著系统地阐述了弹性波和电磁波在分层介质中的传播理论。所述材料的很大一部分为作者所首创,并且以前曾在一系列期刊上发表过。其他作者的成果,也尽可能地按照我自己的风格去表述,从而避免了方法论上的“不协调”。此外,我首先力图为读者弄清楚所研究现象的物理图象。至于说到数学的严密性,也许不是处处都达到了足够好的程度,这是为了避免叙述过于烦琐。

本书采用弹性波和电磁波传播理论同时论述的办法,由于这两种情形所用数学方法的共同性,这样做是非常合理的。同时论述的结果,使一个领域能被另一领域采用的方法所丰富。举例来说,在声学 and 无线电技术中探讨出来的阻抗方法,已成功地应用来计算光学系统的多层增透和干涉滤光片。

书末列出的参考文献目录是比较完全的,但远非详尽无遗。

Л. М. 布列霍夫斯基赫

目 录

第一章 不连续分层介质中的平面波	1
§ 1 均匀无界介质中的平面波	1
1.1 基本概念和定义 (1)	
1.2 不均匀平面波 (2)	
§ 2 平面声波从分界面上的反射	4
2.1 反射系数和透射系数 (4)	
2.2 全内反射 (6)	
2.3 能量关系 (7)	
2.4 局部反应表面。边界条件的简化 (8)	
2.5 表面波 (9)	
§ 3 从平面层和平面层系上的反射	10
3.1 层的输入阻抗。反射系数和透射系数 (10)	
3.2 反射系数表达式的另一推导法 (11)	
3.3 几种特殊情形 (12)	
3.4 介质中吸收的影响 (13)	
3.5 波通过层的穿透 (14)	
3.6 任意多层的反射系数和透射系数 (14)	
§ 4 电磁波的反射和折射	16
4.1 一般关系 (16)	
4.2 两种介质分界面上的反射和折射 (17)	
4.3 近似 (阻抗) 边界条件 (列昂托维奇条件) (19)	
4.4 从一层和一层系上的反射 (19)	
§ 5 弹性介质中的波。一般关系	19
5.1 水平偏振波 (19)	
5.2 垂直偏振波 (20)	
§ 6 具有自由界面的弹性半空间中的波	21
6.1 反射系数和透射系数 (21)	
6.2 瑞利表面波 (24)	
§ 7 弹性半空间与液体半空间的分界面	25
7.1 边界条件和一般关系 (25)	
7.2 声波从液体中入射到弹性半空间上的反射 (26)	
7.3 反射的其他情形 (29)	
7.4 界面上的表面波和“出流”波 (29)	
§ 8 从弹性介质的分界面和从弹性层系上的反射	31
8.1 两个弹性半空间之间的分界面 (31)	
8.2 斯顿莱表面波。渗漏波 (33)	
8.3 声波从任意多层的弹性层系上的反射 (33)	
§ 9 板中的自由波	37
9.1 水平偏振波 (SH 波或乐甫波) (37)	
9.2 垂直偏振波 ($u_y=0$) (38)	
§ 10 声波从板上的反射和它对板的穿透	43
10.1 反射系数和透射系数 (43)	
10.2 板的全透射情形 (45)	
10.3 波在全内反射角下的入射 (46)	
§ 11 薄板近似	46
11.1 薄板纵振动和弯曲振动的运动方程和阻抗 (47)	
11.2 板的反射系数和透射系数 (48)	
§ 12 细密分层介质的弹性性质	49
12.1 波在细密分层介质中传播的某些特殊情形 (50)	
12.2 与六角对称晶体相象的细密分层介质 (53)	
12.3 细密分层介质中波的吸收 (54)	
12.4 液体层和固体层的相互交替 (55)	
§ 13 细密分层介质中的电磁波	58
13.1 沿着层的传播。E 矢量平行于分界面 (58)	
13.2 沿着层的传播。H 矢量平	

行于分界面 (61)	13.3 沿着层界面法线方向的传播 (61)	
§ 14 有限波束的反射		63
14.1 用平面波叠加的形式来表示有限波束 (63)	14.2 反射波束的场。波束在反射时的位移 (65)	
14.3 波束的全内反射 (66)	14.4 声波束从固体和薄板上的反射 (67)	
14.5 反射波束截面上的能量分布 (69)	14.6 从不均匀介质上的反射 (70)	
§ 15 脉冲的反射		73
15.1 一般关系。积分脉冲守恒定律 (73)	15.2 脉冲从两种均匀介质分界面上全内反射时的形状改变 (77)	
15.3 δ 脉冲在不均匀介质中的全反射 (80)		
第二章 不连续分层介质中波传播理论的一些应用		82
§ 16 光学系统的增透		82
16.1 单层覆盖 (82)	16.2 双层覆盖 (84)	16.3 三层覆盖 (87)
§ 17 干涉滤光片		89
17.1 一般考虑 (89)	17.2 最简单的反射型滤光片的理论 (91)	17.3 最简单的透射型滤光片的理论 (92)
17.4 更复杂的滤光片 (94)		
§ 18 分层隔声结构		95
18.1 分层隔声结构的理论 (95)	18.2 同实验的比较。其他情形的分析 (99)	
第三章 连续分层介质中的波		102
§ 19 不均匀介质中的声场方程和电磁场方程		102
19.1 不均匀介质中的声场方程 (102)	19.2 不均匀介质中的电磁场方程 (102)	
§ 20 波从爱普斯坦层上的反射		104
20.1 问题的陈述 (104)	20.2 超几何方程 (105)	20.3 层的反射系数和透射系数 (107)
20.4 过渡层上的反射系数 (109)	20.5 与线性层的比较 (111)	20.6 对称层上的反射系数 (112)
§ 21 波从折射率平方按线性规律变化的半空间的反射		115
21.1 一般关系。艾里函数 (115)	21.2 折射率随着离开界面的距离减小 (119)	
21.3 折射率随着离开界面的距离增加 (120)		
§ 22 存在解的评述		121
§ 23 几何光学。温克布近似		123
23.1 几何光学近似及其物理意义 (124)	23.2 几何光学近似的另一推导 (126)	
§ 24 关于标准方程的概念。存在转折点时的场		128
24.1 基本方程的变换 (129)	24.2 不包含转折点的区域内的解 (129)	
24.3 存在转折点的情形 (130)	24.4 有两个转折点的情形 (132)	
§ 25 波从参量按任意规律变化着的层上的反射		134
25.1 声波反射系数的方程 (134)	25.2 电磁波反射系数的方程 (135)	25.3 阻抗的方程 (136)
25.4 确定反射系数的第一种逐次求近法 (136)	25.5 确定反射系数的第二种逐次求近法 (138)	25.6 精确的和近似的计算方法在具体例子上的比较 (140)
25.7 波从不均匀半空间的反射 (141)	25.8 关于把总场划分成直达波和返回波的非单值性 (142)	25.9 对于给定频率的波总是可以找到不反射的层 (143)
第四章 球面波的反射和折射		146
§ 26 球面波		146
26.1 电磁波元辐射器的场 (146)	26.2 声学中的元辐射器 (148)	26.3 球面波分解成平面波 (148)
26.4 积分表示中的反射波 (151)		

§ 27 越过法。标准积分	152
27.1 越过法 (152) 27.2 标准积分 (155)	
§ 28 反射波场的分析	157
28.1 越过法的应用。波带中的场 (157) 28.2 一些结论。几何光学的适用范围 (160) 28.3 对其他辐射器情形的推广: 磁偶极子和水平电偶极子 (161) 28.4 位于分界面上的辐射器的场与高出分界面的辐射器的场之间的联系 (162)	
§ 29 垂直偶极子。维耳-范德波耳公式	163
29.1 表式 (28.13) 的适用范围。关于数值距离的概念 (163) 29.2 维耳-范德波耳公式 (164)	
§ 30 侧面波	166
30.1 侧面波的表式 (166) 30.2 侧面波的物理意义 (169) 30.3 射线在反射时的位移和侧面波 (171) 30.4 辐射器和接收器位于强吸收介质中的情形 (171) 30.5 当半空间之间存在过渡层时的侧面波 (172)	
§ 31 接近全内反射角的区域内的场	172
31.1 定性的考虑。上面所得公式的应用范围 (172) 31.2 场的完全的表式 (173) 31.3 射线表示。焦散线 (177)	
§ 32 球面波的折射	179
32.1 几何光学近似下的折射波场 (179) 32.2 对折射波的几何光学的修正 (181) 32.3 介质之一具有显著吸收时的情形 (184) 32.4 置于空气中的辐射器在水中所造成的声场 (185)	
§ 33 球面波在两种弹性介质分界面上的反射和折射	186
33.1 固体介质中的球面波源 (186) 33.2 反射波和折射波的形式解 (189) 33.3 解的分析。反射波和侧面波 (191)	
第五章 分层不均匀介质中点波源的场	195
§ 34 界面为完全反射的层。虚源和射线图象	195
34.1 虚源图象 (195) 34.2 反射系数为负的情形 (197)	
§ 35 界面为完全反射的层。简正波	198
35.1 层中的场的积分表示 (198) 35.2 简正波 (200) 35.3 虚源图象与简正波之间的关系 (203)	
§ 36 界面为任意的层	204
36.1 上节所得结果在任意界面情形下的推广 (204) 36.2 关于虚源图象 (207) 36.3 简正波。准模式 (208) 36.4 得到简正波频散方程的另一种方法 (210) 36.5 关于选取层的界面的条件性 (211)	
§ 37 双层液体中的声波	211
37.1 简正波 (212) 37.2 有吸收界面的厚层 (215) 37.3 侧面波 (216)	
§ 38 脉冲在界面为完全反射的层中的传播	220
38.1 脉冲的建立 (220) 38.2 单个简正波的脉冲场。群速度 (222) 38.3 界面为完全反射的波导中简正波的脉冲场 (222) 38.4 射线处理法 (224) 38.5 准单色脉冲的情形 (224)	
§ 39 脉冲在双层液体中的传播	227
39.1 脉冲传播的定性图象 (227) 39.2 射线表示 (230) 39.3 脉冲传播的完整理论 (231) 39.4 艾里波 (232) 39.5 各阶简正波的激发程度 (233) 39.6 能够从中作出关于基础参量的结论的脉冲特性 (234)	
§ 40 声音在三层介质中的传播	235

40.1 场的积分表式 (235)	40.2 三层介质中的简正波 (237)	40.3 简正波的相速度和群速度 (238)
§ 41 位于均匀弹性半空间之上的液体层中的波	239	
§ 42 弹性层中的简正波	241	
第六章 连续分层介质中点源的场。射线处理法	243	
§ 43 连续分层介质中的波导传播	243	
43.1 波导中的射线图象 (243)	43.2 射线近似下的能通量。聚焦因子 (246)	
43.3 表面波导附近的射线图象和焦散线 (247)	43.4 波导轴上及其附近的聚焦 (249)	
§ 44 作为波动理论极限情形的射线理论	250	
§ 45 焦散线邻域内场的渐近式	253	
45.1 焦散线非奇点邻域内的场 (254)	45.2 普遍公式对表面声道情形的应用 (258)	
45.3 应用波导传播射线理论的附加限制 (259)	45.4 焦散线返转点邻域内的场 (260)	
§ 46 球面波从不均匀半空间反射时的焦散线	264	
46.1 波速随着离开界面的距离线性地增加 (265)	46.2 折射率平方随着离开界面的距离线性地减小 (266)	
第七章 连续分层介质中波导传播的严格理论。简正波	268	
§ 47 连续分层介质中存在波导时场的普遍表达式	268	
47.1 场的积分表达式 (268)	47.2 场的积分表达式的另一形式 (269)	47.3 表面波导。简正波 (270)
47.4 温克布近似。位相积分 (271)		
§ 48 折射率平方按线性规律变化的波导	272	
48.1 界面为绝对柔顺的表面波导 (272)	48.2 界面为绝对刚性的表面波导 (273)	
48.3 对称的内波导 (274)	48.4 耳语廊 (275)	48.5 关于温克布法对波导传播的适用范围 (276)
§ 49 符合爱朴斯坦规律的波导	278	
49.1 基本方程 (278)	49.2 绝对柔顺的界面 (279)	49.3 波导的临界频率 (281)
49.4 连续谱 (281)	49.5 以刚性墙为界的波导 (281)	49.6 与温克布近似下所得结果的比较 (282)
§ 50 固体中的表面波导	283	
50.1 问题的陈述 (283)	50.2 势的积分表示 (284)	50.3 简正波 (285)
50.4 垂直偏振情形下简正波的分析 (287)		
第八章 波在沿途不均匀的波导中的传播	290	
§ 51 不均匀波导。一种特殊情形	290	
§ 52 不均匀波导中场的高频渐近式	295	
52.1 表面波导 (295)	52.2 内波导 (299)	
§ 53 波导中场的低频渐近式。横向截面法	301	
第九章 连续分层介质中波的反波导传播	304	
§ 54 存在几何影区时的场	304	
54.1 场的积分表式 (304)	54.2 照射区内的场。射线 (305)	54.3 影区内的场。简正波 (307)
54.4 衍射线 (309)		
§ 55 速度梯度在界面上等于 0	311	
参考文献	315	
补充文献目录	325	
索引	329	

第一章

不连续分层介质中的平面波

平面谐波是波动过程的最简单形式。本章我们将研究这种波在平面分界面上的反射和折射。

普遍形式的波场可用平面谐波的叠加来描述。为此，只需把描述场的时间变化和空间变化的函数表为相应的傅里叶积分形式。因此，本章中所得的结果在以后各章中将得到广泛应用；特别是可用以分析有限波束和球面波的反射。

§ 1 均匀无界介质中的平面波

1.1 基本概念和定义

平面波为波动的最简单形式。这种波最普遍的解析表达式是函数

$$F\left(\frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} - t\right), \quad (1.1)$$

其中 n_x, n_y, n_z 是满足条件 $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ 的三个数，并且是波阵面[即(1.1)中函数宗量为常数时所对应的平面——等位相面]法向单位矢量在坐标轴上的投影。

函数(1.1)是波动方程

$$\nabla^2 F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.2)$$

的解。它描述以速度 c 传播的某一扰动。由函数 F 所确定的波形在传播时保持不变。

在物理学和工程技术上研究波和振荡现象广泛采用频谱法；我们也将采用它。在叠加原理成立的情况下，这种方法使得对任意波形的行为的分析归结为对非常简单的“谐波”行为的分析。

在表达式(1.1)中，我们采用符号

$$\xi \equiv \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} - t,$$

并把函数 $F(\xi)$ 表为傅里叶积分的实部：

$$F(\xi) = \operatorname{Re} \int_0^\infty \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega. \quad (1.3)$$

因为任一复数 a 的实部都可写成 $\operatorname{Re} a = \frac{1}{2}(a + a^*)$ 的形式，于是

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega + \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi^*(\omega) e^{-i\omega\xi} d\omega. \quad (1.3a)$$

将此式乘以 $e^{-i\omega'\xi} d\xi$ ，并对 ξ 从 $-\infty$ 积分到 $+\infty$ 。于是不难得到下列频谱密度函数¹⁾：

1) 如果利用狄拉克函数 $2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} d\xi$ ，并考虑其基本性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\delta(x)dx = \Phi(0)$ [这里 $\Phi(0)$ 是在零点连续的函数]，公式(1.4)的推导就变得非常简单。

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi. \quad (1.4)$$

(1.3) 中对应于一定 ω 值的被积函数

$$f(\omega, x, y, z, t) = \Phi(\omega) e^{i\omega\xi} = \Phi(\omega) e^{i\omega \left(\frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} - t \right)} \quad (1.5)$$

为一平面谐波。

这里,我们对傅里叶积分和单个谐波的表式都用复数形式写出.仅对各相应表式的实部才须赋以物理意义.因此,在最后的分析中,平面谐波必须写成式(1.5)的实部的形式,即

$$A(\omega) \cos \left[\omega \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{c} - \omega t + \varphi(\omega) \right], \quad (1.6)$$

这里,从(1.5)过渡到(1.6)时,我们已将一般是复数的函数 $\Phi(\omega)$ 表为

$$\Phi(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}.$$

引进下列常用的记法:

$$\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}, k n_x = k_x, k n_y = k_y, k n_z = k_z,$$

其中 k, k_x, k_y, k_z 分别为波矢(波数)的模及其沿各坐标轴的分量,而 λ 为波长.于是表式(1.5)可写成¹⁾

$$f = \Phi(\omega) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} = \Phi(\omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (1.7)$$

因为象 f 这样的函数对 t 的微分归结为对它乘以 $-i\omega$, 所以 f 的波动方程可写成

$$\Delta f + k^2 f = 0. \quad (1.8)$$

频谱法的下列特点使它广泛应用于波动现象:

1. 对每一谐波行为的分析比较简单;
2. 在叠加原理有效的情形下,任一波动过程都有可能分解为谐波;
3. 实际应用的许多辐射器都有很高的单色性,因此它们所辐射的波都接近于谐波.

把复杂的波动过程分解为谐波,从而把问题归结为方程(1.8)(其中的频率假定是已给定的),这在存在频散(波速 c 是 ω 的函数)时提供了最方便的分析方法.

以后我们几乎无例外地只考虑谐波(1.7),而在必要时再由它们构成形式更为复杂的波激发.

1.2 不均匀平面波

平面谐波的表式(1.7)有一个对进一步发展很重要的有趣推广.上面已指出, k_x, k_y 和 k_z 是波矢沿各坐标轴的分量.同时也曾假定,我们可以选取满足

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (1.9)$$

的任何三个实数作为这些量.

我们现在放弃在处理这些数时的图象表示,而假定 k_x, k_y, k_z 这一组合是一复数的三元组:

$$k_x = k'_x + ik''_x, k_y = k'_y + ik''_y, k_z = k'_z + ik''_z. \quad (1.10)$$

1) 为简单起见,我们将下面经常要遇到的表式 $\exp(i\varphi)$ 写成 $\exp i\varphi$.

这里我们再次要求等式 (1.9) 对 $k = \omega/c$ 的实数值成立。于是表式 (1.7) 仍满足波动方程 (1.8)。

现在来看看, k_x, k_y, k_z 为复数的 (1.7) 所描述的是怎样一种波。将 (1.10) 代入 (1.7), 我们得到

$$f = \Phi(\omega) e^{i(k'_x x + k'_y y + k'_z z - \omega t) - (k''_x x + k''_y y + k''_z z)}. \quad (1.11)$$

这一表式描述一振幅变动着的波。等振幅平面由方程

$$k''_x x + k''_y y + k''_z z = C_1 \quad (1.12)$$

给出, 而等位相平面由方程

$$k'_x x + k'_y y + k'_z z = C_2 \quad (1.13)$$

给出, 其中 C_1 和 C_2 为常数。可以证明, 等位相平面与等振幅平面正交。实际上, 将 (1.10) 代入 (1.9) 并令等式两端的虚部相等, 就得到

$$k'_x k''_x + k'_y k''_y + k'_z k''_z = 0.$$

这一等式表出平面族 (1.12) 与 (1.13) 正交的条件。

(1.11) 形式的波通常称为不均匀平面波。这波沿着矢量 $\mathbf{k}'(k'_x, k'_y, k'_z)$ 所给定的方向传播, 而其振幅沿垂直方向之一衰减。

适当地选择坐标系总是可以使 $k'_y = k''_y = 0$ 。这时, 正如对寻常的平面波一样, 可引进某一角度 ϑ , 并令

$$k_x = k \sin \vartheta, \quad k_z = k \cos \vartheta. \quad (1.14)$$

对于复数的 k_x 和 k_z , 角度 ϑ 也是一复数。

例如, 考虑 $\vartheta = (\pi/2) - i\alpha$ 的情形 (α 为实数)。从 (1.14), 我们得到 $k_x = k \cosh \alpha$, $k_z = ik \sinh \alpha$, 因而对于平面波, (1.7) 可写成

$$f = \Phi(\omega) \exp[ik_x x \cosh \alpha - k_z z \sinh \alpha - i\omega t]. \quad (1.15)$$

这波沿 x 方向传播, 而沿 z 方向指数性地衰减。从 (1.15) 推出, 这波的传播速度等于 $c_x \equiv \omega/k_x = c/\cosh \alpha$ 。即它总是小于寻常平面波的传播速度 c 。相应的波长等于 $2\pi/k \cosh \alpha = \lambda/\cosh \alpha$, 即小于同一频率下的寻常波长。 α 愈大则波长愈短, 而波沿 z 方向的衰减系数愈大。

以上所述都是指波在介质中不被吸收 (k 是实数) 而言。当存在吸收时, 引进不均匀波的概念也不会出现任何根本性的困难。在这种情况下, 等位相平面与等振幅平面不再相互垂直了。

我们还要指出: 不均匀平面波概念的引进对无界空间是不正确的, 因为这违背了场在无限远处应是有限的这一要求。以后我们将在半无限介质中运用这一概念。

我们稍微提前一些指出: 当平面波在分界面上折射时, 不均匀平面波可以转化为寻常的平面波, 反之亦然。这一点可从折射定律

$$n \sin \vartheta_1 = \sin \vartheta \quad (1.16)$$

直接看出, 这里 n 是折射率, ϑ 是入射角; ϑ_1 是折射角。

如果 $n < 1$, $\sin \vartheta > n$, 则从 (1.16) 推出, $\sin \vartheta_1 > 1$, 即 ϑ_1 为复数, 因而折射波是不均匀的。这种情况在波发生全内反射时实现。

与此相反, 如果 $\sin \vartheta < n$, 即入射波是不均匀的, 但 $\sin \vartheta < n$ (自然, 在这种情形, $n > 1$), 我们就得到 $\sin \vartheta_1 < 1$, 即折射波是寻常的均匀波。这两种情形在 § 32 中讨论

球面波的折射时都会遇到。球面波可分解成包括不均匀平面波在内的一组平面波。

§ 2 平面声波从分界面上的反射

2.1 反射系数和透射系数

我们用声压 $p = p(x, y, z; t)$ 表征声场。在谐波和均匀介质的情形, 声场中粒子的位移速度可写为^[5]

$$\mathbf{v} = (\text{grad} p) / i\omega\rho. \quad (2.1)$$

在本书中, 我们都假定: 时间依赖关系由因子 $e^{-i\omega t}$ 给出。为书写简洁起见, 我们一般都省去这一因子。

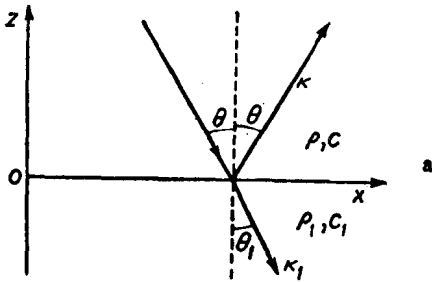


图 2.1 声波的反射与折射

设平面声波入射到分开两种液体或气体介质的平面界面 $z = 0$ 上 (图 2.1)。波的人射面与 xz 平面重合, 因而

$$\begin{aligned} k_x &= k \sin \theta, \quad k_y = 0, \\ k_z &= k \cos \theta, \quad k = \omega/c, \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 θ 为波的人射角, 即波阵面法线与 z 轴所成的角度。将上、下介质的密度以及其中的声速分别记作 ρ, ρ_1 和 c, c_1 。

现在将入射波振幅取作 1, 并将波的反射系数记作 V 。于是入射波和反射波的表式可写为¹⁾

$$p_A = e^{ik(x \sin \theta - z \cos \theta)}, \quad p_R = V e^{ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}. \quad (2.3)$$

上介质中的总场为

$$p = p_A + p_R = (e^{-ikz \cos \theta} + V e^{ikz \cos \theta}) e^{ikx \sin \theta}. \quad (2.4)$$

下介质中的折射波可写为²⁾

$$p_1 = W e^{ik_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)}, \quad k_1 = \omega/c_1, \quad (2.5)$$

其中 θ_1 为折射角, W 称为透射系数。 θ_1, V 和 W 诸量均由界面上的条件确定。这些条件就是 p 和 v_z (粒子速度垂直于界面的分量) 的连续性。以后我们将经常运用阻抗的概念³⁾

$$Z = -(p/v_z). \quad (2.6)$$

既然 p 和 v_z 在通过界面时都是连续的, Z 也就是连续的, 故可采用如下形式的边界条件:

$$z = 0, \quad [p] = 0, \quad [Z] = 0, \quad (2.7)$$

其中方括号表示界面两边相应量值之差⁴⁾。

将 (2.4) 和 (2.5) 代入上述第一个条件中, 我们得到

- 1) 在 (2.3)–(2.4) 中已考虑到: 为了满足界面上的连续性条件, p_A 和 p_R 应以相同的速度沿界面传播。
- 2) 对于实数的 $\cos \theta_1$, 从物理上的推理可知, 波 (2.5) 给出了在下介质中离开界面的能通量。这里, 我们已暗含地假定: 在频散介质 [$c_1 = c_1(\omega)$] 的情形, 波的位相传播方向同能流传播方向是一致的。原则上, 这两个速度可能有不同的符号 [这种情况一个可能的例子首先是由曼德耳施塔姆 (Л. И. Мандельштам) 指出的], 于是下介质中的场应选取形式 $p_1 = W \exp [ik_1(x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1)]$, 即取从无限远传至界面的波形式。只有在这种情况下, 能通量的方向才象上面所说的那样是从界面向外的。
- 3) 不必特别注意 Z 的定义中的负号。如果我们选取 z 轴的反方向, 它就会变成正号的。
- 4) 在绝对反射界面情况下, 就不用两个边界条件 (2.7), 而只有一个边界条件, 例如在 $Z_1 = 0$ 时为 $(p_1)_{z=0} = 0$, 在 $Z_1 = \infty$ 时为 $(v_{1z})_{z=0} = 0$ 。

$$1 + V = W e^{i(k_1 \sin \vartheta_1 - k \sin \vartheta)x}. \quad (2.8)$$

既然左端与 x 无关,右端也应与 x 无关.由此得到斯涅耳定律

$$k \sin \vartheta = k_1 \sin \vartheta_1. \quad (2.9)$$

这一关系式表明,波在上、下介质中沿界面传播的相速度相等.我们也可把它写成

$$\sin \vartheta / \sin \vartheta_1 = n \quad (2.10)$$

的形式,其中 $n \equiv k_1/k = c/c_1$ 为折射率.

因而(2.8)取形式

$$1 + V = W. \quad (2.11)$$

现在回到阻抗的连续性条件.借助于(2.1)和(2.5),我们对于任意的 z 求得下介质中的阻抗为

$$Z_1 = -i\omega\rho_1 p_1 (\partial p_1 / \partial z)^{-1} = \rho_1 c_1 / \cos \vartheta_1, \quad (2.12)$$

这是一个与 z 无关的量.

应用(2.4),得到上介质中的阻抗为

$$Z = \frac{\rho c}{\cos \vartheta} \left(\frac{e^{-ikz \cos \vartheta} + V e^{ikz \cos \vartheta}}{e^{-ikz \cos \vartheta} - V e^{ikz \cos \vartheta}} \right), \quad (2.13)$$

这是一个与 z 有关的量.在 $z = 0$ 上,它应当与(2.12)一致,这给出

$$(1 + V)/(1 - V) = (\cos \vartheta / \rho c) Z_1. \quad (2.14)$$

于是我们求得

$$V = \frac{Z_1 \cos \vartheta - \rho c}{Z_1 \cos \vartheta + \rho c}. \quad (2.15)$$

在下面我们将看到,这一公式对于任意分层半空间的反射系数都是正确的,只要求出它的“输入”阻抗 Z_1 . 在我们已讨论过的最简单的均匀半空间情形,由 Z_1 的表式(2.12)求得

$$V = \frac{m \cos \vartheta - n \cos \vartheta_1}{m \cos \vartheta + n \cos \vartheta_1} \quad m \equiv \frac{\rho_1}{\rho}, \quad (2.16)$$

或者,考虑到(2.10),

$$V = \frac{m \cos \vartheta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}{m \cos \vartheta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}. \quad (2.17)$$

还可指出,如将入射波的阻抗记作 $Z = \rho c / \cos \vartheta$, (2.15)就可写成

$$V = (Z_1 - Z)/(Z_1 + Z). \quad (2.18)$$

这是长线理论中非常著名的一个公式.

让我们考虑几个特殊情形.对于正入射到界面上的波($\vartheta = \vartheta_1 = 0$),我们有 $V = (m - n)/(m + n) = (\rho_1 c_1 - \rho c)/(\rho_1 c_1 + \rho c)$. 对于 $\vartheta \rightarrow \pi/2$ 的掠入射极限情形, $V \rightarrow -1$. 对于满足条件 $m \cos \vartheta - (n^2 - \sin^2 \vartheta)^{1/2} = 0$ 的 ϑ 角,反射系数等于 0. 这就是完全透过界面的情形.对于全透射角从后一等式求得

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2 - 1}}. \quad (2.19)$$

决不是介质参量之间有任何关系时(2.19)中的 ϑ 都是实数.要使它为实数,从(2.19)可见,必须满足条件 $0 \leq (m^2 - n^2)/(m^2 - 1) \leq 1$. 由此推出:当 $m > 1$ 时,必须 $1 < n \leq m$, 而当 $m < 1$ 时,要求 $1 > n \geq m$.

在声速相等的情形 [$c_1 = c_2$ ($n = 1$)], 反射系数原来与角度无关:

$$V = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_1 + \rho_2). \quad (2.20)$$

2.2 全内反射

在 $n < 1$ ($c_1 > c_2$) 而入射角超过临界角 $\vartheta_0 = \arcsin n$ 的情形下, 发生全内反射. 事实上, 这时 (2.17) 可写为¹⁾

$$V = \frac{m \cos \vartheta - i \sqrt{\sin^2 \vartheta - n^2}}{m \cos \vartheta + i \sqrt{\sin^2 \vartheta - n^2}}. \quad (2.21)$$

我们看到, 在此情形, $|V| = 1$, 即反射是全反射. 如果设 $V = e^{i\varphi}$ (这里 φ 为波经反射后的位相变化), 从 (2.21) 得

$$\varphi = -2 \arctan [(\sin^2 \vartheta - n^2)^{1/2} / m \cos \vartheta]. \quad (2.22)$$

从 § 14 和 § 15 将要看到, 反射系数的位相与入射角的依赖关系引起有限声束以及时间上受限制的脉冲反射时某些非常有趣的现象.

在全内反射情形下, 下介质中的场可写为

$$z < 0, p_1 = (1 + V) e^{\delta z} e^{i k x \sin \vartheta}, \delta = k \sqrt{\sin^2 \vartheta - n^2}, \quad (2.23)$$

这与 (2.9) 和 (2.10) 一致, 即它表示一个从界面离开时其振幅指数性衰减的不均匀波. 按照 (2.12), 阻抗 Z_1 为

$$Z_1 = -i \omega \rho_1 / \delta. \quad (2.24)$$

既然阻抗是虚数, 我们就可以说: 在全内反射时, 界面对入射波表现为一纯抗(感抗)性阻抗. 在通常情况 ($\cos \vartheta_1$ 为实数), 界面的阻抗为纯阻的.

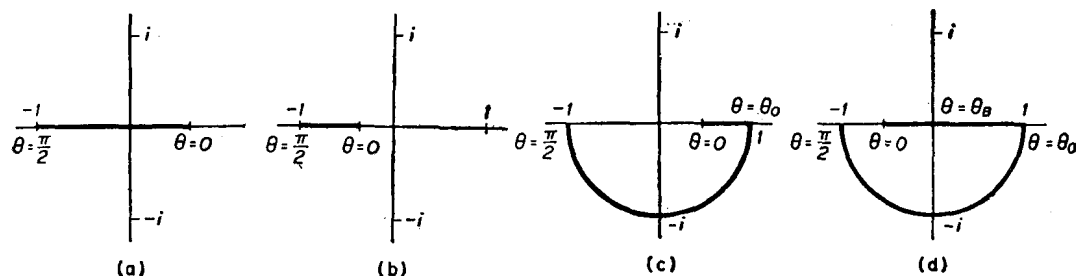


图 2.2 在介质参量不同关系下, 复平面上的反射系数

(a) $1 < c/c_1 < \rho_1/\rho$; (b) $1 < c/c_1, \rho_1/\rho < c/c_1$; (c) $c/c_1 < 1, c/c_1 < \rho_1/\rho$; (d) $\rho_1/\rho < c/c_1 < 1$

反射系数 V 可以在复平面上画出. 分别沿横坐标和纵坐标绘出它的实部和虚部, 对于介质参量的几种不同关系, 我们得到如图 2.2 (a), (b), (c) 和 (d) 所示的情形. 在图 (a) 和 (b) ($n > 1$) 中, 反射系数为实数. 因此, 它对应于不同 ϑ 值的值都落在沿实轴的一段直线上. 在图 (a) 中, 对于入射角的某个值 $\vartheta = \vartheta_B$, 反射系数为零, 而在图 (b) 中,

1) (2.17) 中根式的符号必须根据条件 $\text{Im}(n^2 - \sin^2 \vartheta)^{1/2} > 0$ 来取. 实际上, 此平方根出现于 (2.17) 中是由于在 (2.16) 作了代换 $n \cos \vartheta_1 = (n^2 - \sin^2 \vartheta)^{1/2}$. 另一方面, 从 $x \rightarrow -\infty$ 时 (2.5) 中的 p_1 应为有限的这一条件推出, $\text{Im} k_1 \cos \vartheta = k \text{Im}(n \cos \vartheta_1) > 0$. (2.21) 中已考虑到选择符号的这一法则, 在该式中(下文处处如此), 平方根 $(\sin^2 \vartheta - n^2)^{1/2}$ 对于实数 n 假定为正.