經济应用数学

禹 实 编

中 国 工 运 学 院

经 济 应 用 数 学

禹　实　编

中 国 工 运 学 院

前　　言

为了适应新时期工会工作的要求，我院工会学系设置了经济应用数学课．这门课的教学目的，首先是为学好《工业企业管理学》和《国民经济管理学》服务，因为这两门课中都有大量的数学方法，没有一定的数学知识是学不好的；其次，在工作中“用数据说话”，运用现代管理科学，也是工会工作的需要，经济应用数学课介绍了这方面的基础知识；第三，学习经济应用数学，对深入学习哲学、政治经济学、工会学、劳动保护和工资等课程均有帮助．

本教材是以《工业企业管理学》和《国民经济管理学》中所涉及的数学知识为内容进行编写的．为了保持数学本身的系统性，便于读者融会贯通，达到学以致用，有的放矢的目的，将上述内容归纳为三篇．第一篇，微积分基本知识；第二篇，概率论基本知识；第三篇，运筹学初步．

本教材经过反复修改，在内容上力求联系经济管理和工会工作的实际，适应学员的需要；在表述上力求深入浅出，通俗易懂，适应学员的接受能力．经过中国工运学院工会学系大专班三期的使用，实践证明，它适合需要，教学效果是好的．

本教材承蒙北京师范学院数学系田孝贵副教授审阅，在此表示衷心的感谢．

由于编者水平有限，难免存在缺点和错误，诚请读者批评指正．

禹　　实

1986年10月

目　　录

第一篇　微积分基本知识

第二篇　概率论基本知识

第三篇　运筹学初步

第一篇　微积分基本知识

第一章　变量与函数

微积分是研究变量的数学，是在数量变化的条件下讨论和研究实际问题中的数量关系，进而解决问题的．变量之间的关系在数学中通常用函数来表示．因此，在学习微积分之前，必须掌握函数的有关知识．

§1　变量与区间

一、常量与变量

在日常生活、生产及经济现象中，我们常遇到各种不同的量．如：长度、重量、温度、时间、速度、产量、价格等．

在观察和研究某种自然现象或经济现象时，我们会发现，尽管其中各个量所代表的意义不同，但就这些量的存在状态来说，一般可分为两类：一类是在研究过程中保持一定数值的量，这种量叫做常量；另一类是在研究过程中可以取不同数值的量，这种量叫做变量．

例如，某商店每日销售灯泡的个数及所得的收入是变量，灯泡的单价是常量．

又如，火车以每小时60公里的速度匀速前进，时间和距离是变量，速度是常量.

再如，圆的周长C和半径r之间的关系是

$$C=2\pi r,$$

其中r和C是变量，2和π是常量.

一个量是常量还是变量，并不是绝对的．同一个量在这个研究过程中是常量，在那个研究过程中又可以是变量.

例如，列车上的旅客人数问题．在列车开动的过程中，人数是不变的，是常量；而到站的过程中，旅客有下有上，这时的人数是变量.

变量是现代数学中基本而又重要的概念，它的产生使数学由常量数学进入变量数学阶段，实现了数学史上的一个飞跃．最初，人们主要是研究常量与固定的图形，研究的方法是静止的、孤立的，这就是初等数学研究的：算术、代数、三角、几何等，属于常量数学范围．后来，由于对变量的认识，人们开始用运动的、互相联系的方法来研究变量和图形的变化，进而引出了许多新的数学问题，初等数学已经远远不够用了，因此，创立了新的概念和方法，使得常量数学飞跃到变量数学．微积分就是关于变量的数学理论.

在数学中，人们通常习惯用英语字母a、b、c或x_0、x_1、y_0 y_1等表示常量；用x、y、z、u、v、w、s、t等表示变量.

二、区间

1．实数与数轴

我们在微积分中所讨论的量，不论是常量还是变量，都是限定在实数范围内取值的．因此，我们需要简单复习一下实数与数轴的概念.

实数的范围如下：

- 实数
  - 有理数
    - 正、负整数
    - 正、负分数（有限小数和无限循环小数）
    - 零
  - 无理数（无限不循环小数）

我们还学过数轴.

设有一条水平直线，在这条直线上取定一点O，称为原点，规定一个正方向（习惯上规定由原点向右的方向为正方向），再规定一个长度，称为单位长度．这种具有原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴（图1—1）.

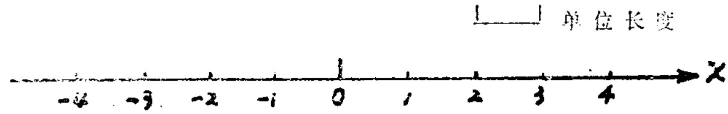

图　1—1

我们已经知道，任何一个实数均可用数轴上的一个点表示，反之，数轴上任何一点都表示一个实数，也就是说全体实数和数轴上的全体点形成一一对应的关系．实数和数轴的这种关系，使得人们把数和形有机地联系起来，在讨论问题时更加直观.

为简单起见，以后将实数和数轴上与它对应的点不加区别，并且用相同的字母表示，如实数a和点a意思相同.

2．区间

在以后某些问题的讨论中，我们常常限制在一部分实数范围内考虑，并且这部分实数又是介于某两个实数之间的一切实数．为了能够既明确又简便地表明这部分实数，我们引入区间的概念和记号.

区间是指介于某两个实数之间的全体实数，而那两个实数叫做区间的端点.

设a与b为两个实数，且a＜b．满足不等式

$$a<x<b$$

的全体实数x叫做开区间，用记号 (a, b) 表示。

满足不等式

$$a\leq x\leq b$$

的全体实数x叫做闭区间，用记号 $[a, b]$ 表示。

满足不等式

$$a<x\leq b \quad 或 \quad a\leq x<b$$

的全体实数x叫做半开区间，用记号 $(a \ b]$ 或 $[a, b)$ 表示.

在数轴上，区间是介于某两个点之间的一条线段上的全体点这两点就是区间的端点，对于开区间用空心点“∘”表示，对于闭区间用实心点“·”表示（图1—2），两点之间的距离也就是线段的长度叫做区间的长度，例如上述各区间的端点是点a和b时，它们的长度都是 $b-a$.

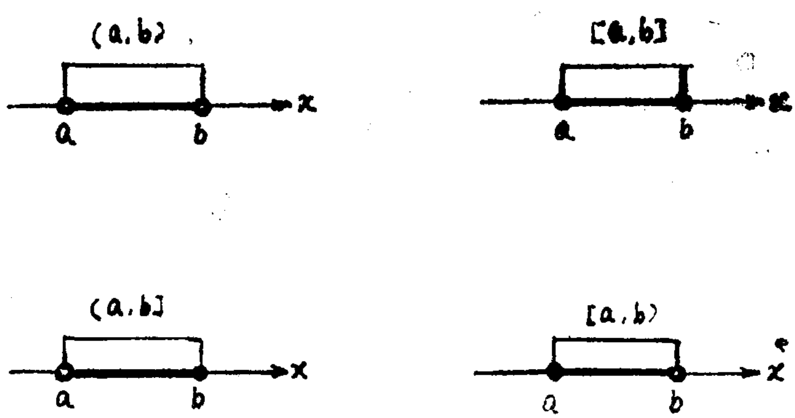

图 1—2

除了上述那些有限区间外，还经常使用无限区间，我们规定这些符号的含义如下：

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数x，有时也写作 $-\infty<x<+\infty$；

$(\ , a+\infty)$ 表示大于a的全体实数x，有时也写作 $a<x<+\infty$；

$(-\infty, a)$ 表示小于a的全体实数x，有时也写作

$-\infty < x < a$.

同样，我们可以规定 $[a, +\infty)$、$(-\infty, a]$ 等符号的含义（图1—3）.

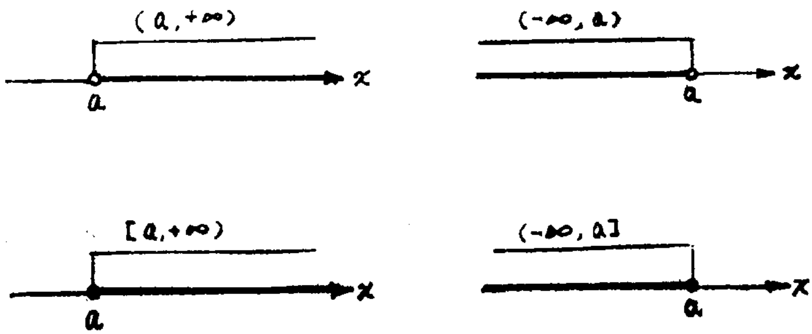

图 1—3

应该注意，上面引用的“$-\infty$”、“$+\infty$”仅仅是一种符号，不能把它们当作数看待，更不能参与数的运算.

§2 函 数

一、函数的概念

1．函数的定义

在客观世界各种事物的发展过程中，往往有几个量共同变化着，并且它们的变化不是孤立的，而是互相联系、互相依赖和互相制约，依照一定的规律去变化的. 因此，我们不仅要研究事物的数量变化，更重要的是要研究变量之间的相依变化关系和内部规律. 函数的概念就揭示了变量之间的一种最基本、最重要的依赖关系.

函数是微积分中极为重要的概念，微积分就是研究函数的数学学科. 为了理解并掌握这一概念，先举几个例子.

例 1 商店销售灯泡，单价为a元，则销售量x与总收入y之间的关系为 $y=ax$. 这时，我们说总收入y是销售量 x 的函数.

例 2 某工厂生产某产品，每日最多产100吨，与产出无关

的固定成本为130元，每单位产出的可变成本为6元，则每日产出的总成本y与产量x的关系为$y=130+6x$. 这时，我们说总成本y是产量x的函数.

例 3 银行储蓄存款利率一年定期整存整取为每月六厘. 存款与利息可列表如下：

存入金额（元）	50	100	300	500	1000
存一年应得利息（元）	3.60	7.20	21.60	36.00	72.00

这时利息是存入金额的函数.

例 4 气象站用自动记录仪记录了某一天的气温变化情况（图1—4）. 这时，气温T是时间t的函数.

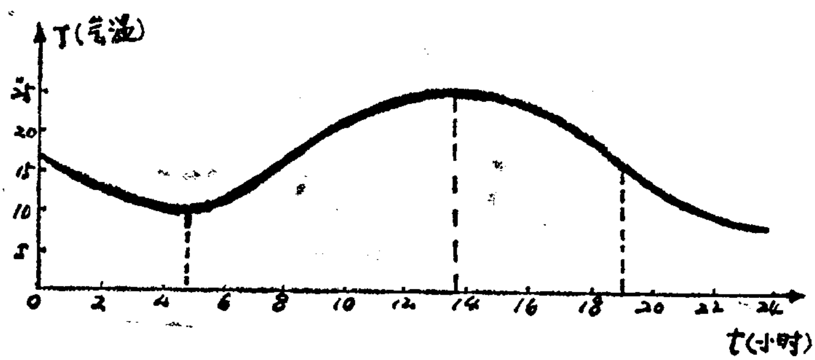

图 1—4

分析以上的例子，我们看到，虽然它们极不相同，但从纯数量关系分析，却有两点是相同的. 第一，都有两个变量，且在两个变量之间都有确定的对应关系，它们互相依存，共处于一个统一体中；第二，在所考虑的问题中，两个变量的地位是不同的，其中一个的变化范围是给定的，另一个变量随着它变化. 根据这两点抽象出函数的定义.

定义 设在某个变化过程中有两个变量x和y，如果对于变量x在变化范围内的每一个值，按照一定的规律，变量y总有一个确定的值和它对应，那么y叫做x的函数. 记作

$$y=f(x).$$

其中x叫做自变量，y叫做因变量或函数.

这里的符号"f"表示x与y之间的对应规律，即x与y之间互相依存的具体内容. 它随具体问题的不同而异. 当同时研究两个以上函数时，就要用不同的符号表示不同的函数. 除$f(x)$外，我们还常用$F(x)$、$g(x)$、$\varphi(x)$等表示函数.

当$x=a$时的函数值用$f(a)$表示.

例5 已知函数$f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$，求$x=0$，$x=\dfrac{1}{2}$时的函数值.

解 $f(0)=\dfrac{0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+2}=\frac{3}{5}.$$

例6 已知函数$f(x)=3x^2-2x+1$，求$f(2)$，$f(-1)$，$f(a)$.

解 $f(2)=3\times 2^2-2\times 2+1=12-4+1=9$,

$f(-1)=3\times(-1)^2-2\times(-1)+1=3+2+1=6$.

$f(a)=3a^2-2a+1$.

2. 函数的定义域与值域

定义 在函数关系$y=f(x)$中，自变量x的取值范围叫函数的定义域，因变量y的相应取值范围叫函数的值域.

在实际问题中，函数的定义域是根据所给问题的实际意义确定的；但如果只给出函数的数学表达式而没有说明实际背景，这时函数的定义域就是使函数的表达式有意义的一切x值. 函数的定义域一般用区间表示.

例如，例2所给出的函数$y=130+6x$的定义域为$[0,100]$，值域为$[130, 730]$.

例7 求下列函数的定义域：

(1) $y=3x^2+1$;　　　(2) $y=\frac{1}{x-1}$;

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$;　　　(4) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-5x+6}$.

解 (1)因为当x为任何实数时，函数都有意义，所以函数$y=3x^2+1$的定义域为$(-\infty, +\infty)$.

(2)因为当$x-1\neq0$时，函数才有意义，解这个不等式得$x\neq1$，所以函数$y=\frac{1}{x-1}$的定义域为$(-\infty, 1)$与$(1, +\infty)$.

(3)因为当$1-x^2\geq0$时，函数才有意义，解这个不等式得$-1\leq x\leq1$，所以函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域为$[-1, 1]$.

(4)因为当$x-1\geq0$且$x^2-5x+6\neq0$时，函数才有意义，解这两个不等式得$x\geq1$且$(x-2)(x-3)\neq0$，即$x\geq1$且$x\neq2$，$x\neq3$，所以函数$y=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-5x+6}$的定义域为$[1, 2)$，$(2, 3)$与$(3, +\infty)$.

二、函数的表示法

函数的表示法通常有三种：解析法、列表法、图象法.

解析法 用数学运算式子表示变量之间的函数关系的方法叫解析法，又叫公式法.

如例1、例2.

列表法 用表格表示变量之间的函数关系的方法叫列表法.

如例3.

图象法 用直角坐标系中的几何图形表示变量之间的函数关系的方法叫图象法.

如例4.

这三种常用的函数表示法各有优缺点．解析法是函数的重要表示法，它便于掌握规律，便于运算和理论分析，但这种方法比

较抽象，而且有些函数关系很难用运算式子表示出来．用列表法表示的函数关系，可以不需要计算，直接查出表中的自变量所对应的函数值，但列在表中的对应值毕竟是有限的，这种方法在经济问题研究中常被采用．图象法可以直观地表达自变量与函数的依赖关系，但是不能进行数学运算，也不能求得函数的精确值，这种方法在工业企业管理中常被采用．

三、函数的简单特性

1．函数的奇偶性

如果对于函数$y=f(x)$定义域内的一切x的值，都有等式

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，那么，函数$f(x)$叫做奇函数．

奇函数的图象是关于原点对称的．因为$f(-x)=-f(x)$，所以若A（x，$f(x)$）在图形上，则与A对称于原点的点A′（$-x$，$-f(x)$）也在图形上（图1—5）．

如果对于函数$y=f(x)$定义域内的一切x的值，都有等式

$$f(-x)=f(x)$$

成立，那么，函数$f(x)$叫做偶函数．

偶函数的图象是关于y轴对称的，因为$f(-x)=f(x)$，所以若A（x，$f(x)$）在图形上，则与A对称于y轴的点A″（$-x$，$f(x)$）也在图形上（图1—6）．

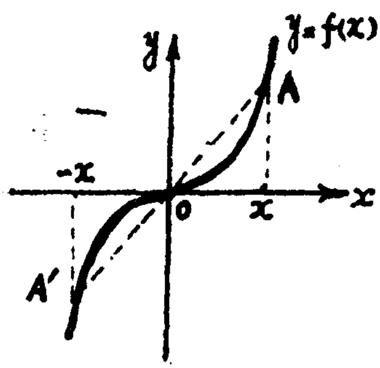

图　1—5

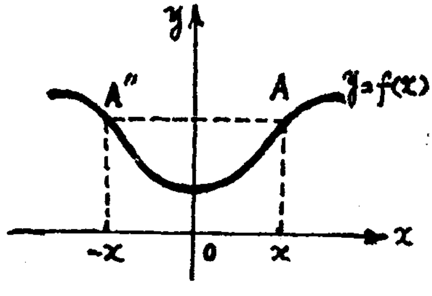

图　1—6

并不是所有的函数都是奇函数或偶函数．有些函数既不是奇函数也不是偶函数．例如$y=x$是奇函数，但$y=x+1$既不是奇函数，也不是偶函数．再如，$y=x^2$是偶函数，但$y=(x-1)^2$既不是偶函数，也不是奇函数．

2．函数的单调增减性

如果函数$y=f(x)$对区间(a,b)内任意两点x_1和x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在区间(a,b)内是单调增加的；当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间(a,b)内是单调减少的．

单调增加函数的图形是沿x轴的正向逐渐上升的(图1—7)，单调减少函数的图形是沿x轴的正向逐渐下降的(图1—8)．

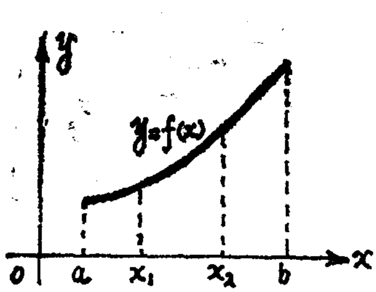

图 1—7

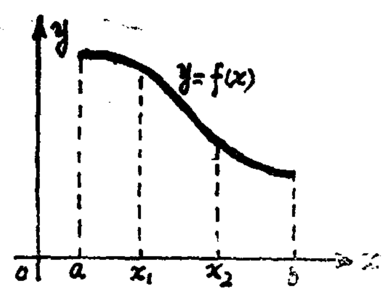

图 1—8

同样，我们可以定义在无限区间上的单调增加(或减少)的函数．

在整个区间上为单调增加或单调减少的函数称为单调函数．

例 8 函数$y=x^2$是在区间$[0,+\infty)$上的单调增加的函数，在区间$(-\infty,0]$上的单调减少的函数．因此，$y=x^2$在区间$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数(图1—9)．

例 9 函数$y=x^3$是在区间$(-\infty,+\infty)$上的单调增加的函数(图1—10)．