●研 究 生 用 书●

ADVANCED ELASTICITY

华中理工大学出版社

钟伟芳　皮道华

高等弹性力学

O343
Z770
442409

高等弹性力学

[illegible]

华中理工大学出版社

DV67/09

·研究生用书·

高等弹性力学

钟伟芳　皮道华

责任编辑　余健棠

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

武汉大学出版社印刷总厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:8.75　插页:2　字数:214 000

1993 年 3 月第 1 版　　1993 年 3 月第 1 次印刷

印数:1-1000

ISBN　7-5609-0744-x/O·99

定价:2.60 元

(鄂)新登字第 10 号

内 容 简 介

本书对弹性理论的几个基本分支，如线弹性理论、热弹性理论、各向异性弹性理论和非线性弹性理论等作了较系统的论述；对各个分支边值问题的提法、解法及其本构方程建立的方法都作了详细的讨论。

本书可作为工科力学专业研究生教材，也可供工程技术人员自学参考。

Abstract

In this book the major branches of elasticity, linear elasticity, thermoelasticity, anisotropic elasticity and nonlinear elasticity are discussed with Cartesian tensors systemetically. Construction of constitutive relations of materials, boundary value problems and their solving methods in above branches of elasticity are treated in detail.

This book is written as a text for graduate students majoring in engineering mechanics. It can also be used as a reference book by engineers and technicians.

“研究生用书”总序

研究生教材建设是提高研究生教学质量的重要环节，是具有战略性的基本建设。各门课程必须有高质量的教材，才能使学生通过学习掌握各门学科的坚实的基础理论和系统的专门知识，为从事科学研究工作或独立担负专门技术工作打下良好的基础。

我校各专业自1978年招收研究生以来，组织了一批学术水平较高，教学经验丰富的教师，先后编写了公共课、学位课所需的多种教材和教学用书。有的教材和教学用书已正式出版发行，更多则采用讲义的形式逐年印发。这些讲义经过任课教师多年教学实践，不断修改、补充、完善，已达到出书的要求。因此，我校决定出版“研究生用书”，以满足本校各专业研究生教学需要，并与校外单位交流，征求有关专家学者和读者的意见，以促进我校研究生教材建设工作，提高教学质量。

“研究生用书”以公共课和若干门学位课教材为主，还有教学参考书和学术专著，涉及的面较广，数量较多，准备在今后数年内分批出版。编写“研究生用书”总的要求是从研究生的教学需要出发，根据各门课程在教学过程中的地位和作用，在内容上求新、求深、求精，每本教材均应包括本门课程的基本内容，使学生能掌握必需的基础理论和专门知识；学位课教材还应接触该学科的发展前沿，反映国内外的最新研究成果，以适应目前科学技术知识更新很快的形势；学术专著则应充分反映作者的科

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

研硕果和学术水平，阐述自己的学术见解。在结构和阐述方法上，应条理清楚，论证严谨，文字简炼，符合人们的认识规律。总之，要力求使“研究生用书”具有科学性、系统性和先进性。

我们的主观愿望虽然希望“研究生用书”的质量尽可能高一些，但由于研究生的培养工作为时尚短，水平和经验都不够，其中缺点、错误在所难免，尚望校内外专家学者及读者不吝指教，我们将非常感谢。

华中理工大学研究生院院长

黄树槐

1989.11.

前　言

由于科学技术的不断进步和发展，各学科领域对力学要求越来越高，对力学工作者来说，随着研究范围不断地扩大，自身的基础理论也需要不断地加深。工科本科生在学习了一般的弹性力学后，对弹性理论的基本分支，如线弹性理论、热弹性理论、各向异性弹性理论和非线性弹性理论等的基本理论、研究方法、本构方程的建立等等需要进一步了解和学习，以便在生产实践中更好地加以应用。特别是工科学生进入研究生行列后，必须对上述的分支进行系统的学习，以便能深入地进行研究工作。这样就产生一个问题，怎样在数学水平不太高的基础上学习到上述基本分支的许多基本问题呢？本书是为此目的而写的，即只需要读者有大学本科生(工科)的数学水平和张量初步(直角张量)的基础知识，就可读懂弹性理论基本分支的理论。

连续介质力学的一个重要的基本问题是本构方程建立的方法，弹性体本构方程的建立是连续介质本构方程建立的一个重要组成部分。为了避免理性力学从公理化的结构来建立本构方程的基本方法，本书从弹性理论的各个分支分别建立本构方程，避开了过深的数学知识，基本上阐明了本构方程建立的基本条件，为读者进一步深入学习连续体力学本构方程建立方法打下基础。

由于本书涉及弹性理论的分支较多，不可能在较少的学时中，将各分支的所有问题都涉及到，因此，在各章中论述的只是各分支基本问题的提法、解法和基本定理，为读者进一步深入学习各个分支打下基础。

本书的前身是在我校使用多年的《高等弹性力学》讲义，经过不断修改、补充，在研究生教学中取得较好的效果。由于作者水平

有限，缺点和不当之处，望读者和专家们予以指正。

钟伟芳　　皮道华

于华中理工大学

1992 年 4 月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　线弹性理论

在线弹性理论中，主要是讨论正交曲线坐标系下的应变张量、应力张量以及几何方程、平衡方程和协调方程的建立，利用张量变换的方法得到线弹性理论的本构方程，建立位移解法、应力解法和应力函数解法的基本方程组。在线弹性理论的解法中，着重讨论布希涅斯克-迦辽金通解、诺伊贝尔-帕普科维奇通解以及建立在贝蒂互等定理和基本解基础上的积分方程解法。最后讨论线弹性的积分方程解法。对线弹性理论的变分原理在第五章进行讨论。

§1-1　正交曲线坐标

在空间直角坐标系下，有原点 o，相互垂直的单位矢量为 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$，坐标为 x,y,z。在空间的任一点 (x,y,z) 有矢径

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x,y,z) = x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2 + z\boldsymbol{i}_3 \tag{1·1·1}$$

若坐标 x,y,z 为参变量 x_1,x_2,x_3 的函数，即

$$\left.\begin{aligned} x &= x(x_1,x_2,x_3) \\ y &= y(x_1,x_2,x_3) \\ z &= z(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}\right\} \tag{1·1·2}$$

由(1·1·2)式看出，当任意固定两个参量时，得到一条空间曲线。因此，整个坐标空间被这些曲线所覆盖，我们将 x_1,x_2,x_3 称为空间的曲线坐标。为了使 x,y,z 与 x_1,x_2,x_3 有一一对应关系，必须有(1·1·2)式的 Jacobi 行列式不为零，即

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(x_1,x_2,x_3)} \neq 0 \tag{1·1·3}$$

将(1·1·1)式过一点作切矢量有

$$\boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial x}{\partial x_i}\boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial y}{\partial x_i}\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial z}{\partial x_i}\boldsymbol{i}_3 \quad (i = 1,2,3) \qquad (1 \cdot 1 \cdot 4)$$

则 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ 在一点上构成三个活动标架。若切矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 是正交的，即

$$\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j = 0 \qquad (i \neq j) \qquad (1 \cdot 1 \cdot 5)$$

满足(1・1・5)式的曲线坐标 x_1, x_2, x_3，称为正交曲线坐标。正交曲线坐标例子较多，常见的有

直角笛卡尔坐标

$$x = x_1 \quad y = x_2 \quad z = x_3 \qquad (1 \cdot 1 \cdot 6)$$

柱面坐标

$$x = x_1 \cos x_2 \quad y = x_1 \sin x_2 \quad z = x_3 \qquad (1 \cdot 1 \cdot 7)$$

$$(x_1 \geqslant 0, 0 \leqslant x_2 < 2\pi, -\infty < x_3 < \infty)$$

球面坐标

$$x = x_1 \sin x_2 \cos x_3 \quad y = x_1 \sin x_2 \sin x_3 \quad z = x_1 \cos x_2$$

$$(x_1 \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant x_3 \leqslant 2\pi) \qquad (1 \cdot 1 \cdot 8)$$

令

$$h_i = |\boldsymbol{r}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2} \qquad (1 \cdot 1 \cdot 9)$$

则称 h_i 为 Lamè 度量系数，或简称 Lamè 系数。由 h_i 的定义，引出正交曲线坐标的单位矢量

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_i}\boldsymbol{r}_i \qquad (i = 1,2,3) \qquad (1 \cdot 1 \cdot 10)$$

由(1・1・4)、(1・1・10)式有

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial x}{\partial x_i}\boldsymbol{i}_1 + \frac{1}{h_i}\frac{\partial y}{\partial x_i}\boldsymbol{i}_2 + \frac{1}{h_i}\frac{\partial z}{\partial x_i}\boldsymbol{i}_3 \qquad (1 \cdot 1 \cdot 11)$$

由(1・1・11)式看出，标架 $\boldsymbol{e}_i$ 是坐标 x_i 的函数，即为活动标架，下面讨论活动标架 $\boldsymbol{e}_i$ 的导数问题。由于

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i = 1$$

即

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_i\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{（不求和）}$$

则有

$$\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = 0 \tag{1·1·12}$$

当 $i \neq j$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial (h_i \mathbf{e}_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}\mathbf{e}_i + h_i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial x_i} = \frac{\partial h_j \mathbf{e}_j}{\partial x_i} = \frac{\partial h_j}{\partial x_i}\mathbf{e}_j + h_j \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x_i} \\ &\text{（不求和）}\end{aligned} \tag{1·1·13}$$

将(1·1·13)式两边乘以 $\mathbf{e}_j$，利用正交性和(1·1·12)式有

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} \cdot \mathbf{e}_j = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \tag{1·1·14}$$

当 $i \neq j$ 时，$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$，则有

$$\frac{\partial (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)}{\partial x_j} = \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x_j} + \mathbf{e}_j \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = 0 \tag{1·1·15}$$

由(1·1·14)、(1·1·15)式有

$$-\mathbf{e}_j \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = \mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \tag{1·1·16}$$

当 $i \neq j, j \neq k, k \neq i$ 时，有

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j) = 0 = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_i)$$

由上式得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_k} h_j \mathbf{e}_j + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_j \partial x_k} h_i \mathbf{e}_i &= 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_j \partial x_i} h_k \mathbf{e}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_i} h_j \mathbf{e}_j &= 0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_j} h_i \mathbf{e}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j} h_k \mathbf{e}_k &= 0\end{aligned}$$

由上三式中任意两式相加，减去第三式得到

$$\mathbf{e}_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{1·1·17}$$

将(1·1·13)式代入(1·1·17)式得到

$$\mathbf{e}_k \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = 0 \tag{1·1·18}$$

(1·1·18)式在 i,j,k 不相同时才成立。

由于$\dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j}$是一个矢量，当 $i\neq j$ 时，则有

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = a_m \mathbf{e}_m \qquad (1\cdot 1\cdot 19)$$

其中 a_m 为待求的量。将(1·1·19)式两边乘 $\mathbf{e}_k$，而 k 不等于 i,j，则由(1·1·18)式有

$$\mathbf{e}_k\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = 0 = a_m \mathbf{e}_m \mathbf{e}_k = a_m\delta_{mk} = a_k \qquad (1\cdot 1\cdot 20)$$

将(1·1·19)式两边乘 $\mathbf{e}_i$，由(1·1·12)式有

$$\mathbf{e}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = 0 = a_m \mathbf{e}_m \mathbf{e}_i = a_m\delta_{mi} = a_i \qquad (1\cdot 1\cdot 21)$$

将(1·1·19)式乘 $\mathbf{e}_j$，利用(1·1·14)式有

$$\mathbf{e}_j\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = a_m \mathbf{e}_m \mathbf{e}_j = a_m\delta_{mj} = a_j \qquad (1\cdot 1\cdot 22)$$

由(1·1·19)～(1·1·22)式看出

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial x_i} \qquad (1\cdot 1\cdot 23)$$

(1·1·23)式是当 $i\neq j$ 时单位矢量 $\mathbf{e}_i$ 导数的表达式。当 $i=j$ 时，有

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_i} = a_m \mathbf{e}_m \qquad (m\text{ 求和而 } i\text{ 不求和}) \qquad (1\cdot 1\cdot 24)$$

将(1·1·24)式两边乘 $\mathbf{e}_i$，由(1·1·12)式可知，显然有 $a_i=0$。由(1·1·24)式有

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_i} = a_j \mathbf{e}_j + a_k \mathbf{e}_k \qquad (1\cdot 1\cdot 25)$$

其中 i,j,k 互不相等。将上式两边乘 $\mathbf{e}_j$ 和 $\mathbf{e}_k$，由(1·1·16)式有

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\mathbf{e}_j - \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_i}{\partial x_k}\mathbf{e}_k \qquad (1\cdot 1\cdot 26)$$

由上所述，在正交曲线坐标条件下，由 (1·1·12)、(1·1·14)、(1·1·16)、(1·1·18) 式有

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = 0 \\
&\mathbf{e}_j \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial x_i} && (i \neq j) \\
&\mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial x_i} && (i \neq j) \\
&\mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x_k} = 0 && (i \neq j \neq k \neq i)
\end{aligned}\right\} \tag{1·1·27}
$$

由(1·1·23)和(1·1·26)式有

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial x_i} && (i \neq j) \\
&\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\mathbf{e}_j - \frac{1}{h_k}\frac{\partial h_i}{\partial x_k}\mathbf{e}_k && (j \neq i, k \neq i)
\end{aligned}\right\} \tag{1·1·28}
$$

若取弧长

$$
\mathrm{d}s_i = h_i \mathrm{d}x_i \tag{1·1·29}
$$

则(1·1·27)式有

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial s_j} = 0 \\
&\mathbf{e}_j \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial s_j} = \frac{\partial \ln h_j}{\partial s_i} \\
&\mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial s_j} = -\frac{\partial \ln h_j}{\partial s_i} \\
&\mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial s_k} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1·1·30}
$$

而(1·1·28)式变为

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial s_j} = \frac{\partial \ln h_j}{\partial s_i}\mathbf{e}_j \\
&\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial s_i} = -\frac{\partial \ln h_i}{\partial s_j}\mathbf{e}_j - \frac{\partial \ln h_i}{\partial s_k}\mathbf{e}_k
\end{aligned}\right\} \tag{1·1·31}
$$

§1-2 曲线坐标的应变张量

首先讨论在直角坐标系下应变张量的引进，然后讨论在曲线

(正交)坐标下的应变张量的引进。

在直角坐标系下，微线段 d$\boldsymbol{r}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{l}_1 + \mathrm{d}y\boldsymbol{l}_2 + \mathrm{d}z\boldsymbol{l}_3 \qquad (1 \cdot 2 \cdot 1)$$

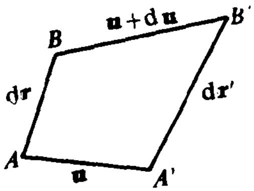

图 1-1

其端点为 A 和 B，在变形后，微线段移到 $A'B'$，端点位移分别为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{u}+\mathrm{d}\boldsymbol{u}$，由图 1-1 看出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{u} \qquad (1 \cdot 2 \cdot 2)$$

若定义

$$\varepsilon = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}'| - |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|} \qquad (1 \cdot 2 \cdot 3)$$

由(1・2・3)式有

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}'| = (1+\varepsilon)|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| \qquad (1 \cdot 2 \cdot 4)$$

将(1・2・4)式两边平方，利用 ε 小变形的假定，则有

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}'|^2 - |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2} \qquad (1 \cdot 2 \cdot 5)$$

由(1・2・2)式有

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}\boldsymbol{r}'|^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = (\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{u}) \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{u}) \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + 2\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u} \end{aligned} \qquad (1 \cdot 2 \cdot 6)$$

去掉 d$\boldsymbol{u}$・d$\boldsymbol{u}$ 高阶小量，由(1・2・6)式有

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}'|^2 = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2 + 2\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u} \qquad (1 \cdot 2 \cdot 7)$$

将(1・2・7)式代入(1・2・5)式有

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|} \qquad (1 \cdot 2 \cdot 8)$$

若位移矢量有

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{l}_1 + u_2\boldsymbol{l}_2 + u_3\boldsymbol{l}_3 \qquad (1 \cdot 2 \cdot 9)$$

若矢量 d$\boldsymbol{r}$ 的方向为(ζ_1，ζ_2，ζ_3)，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|} = \zeta_1\boldsymbol{l}_1 + \zeta_2\boldsymbol{l}_2 + \zeta_3\boldsymbol{l}_3 = \zeta_k\boldsymbol{l}_k = \zeta_i\boldsymbol{l}_i \qquad (1 \cdot 2 \cdot 10)$$

将(1・2・9)、(1・2・10)式代入(1・2・8)式有

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \zeta_i\boldsymbol{l}_i \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{l}_i \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j}\zeta_i\zeta_j \\ &= \boldsymbol{l}_i \cdot \frac{\partial(u_k\boldsymbol{l}_k)}{\partial x_j}\zeta_i\zeta_j \end{aligned} \qquad (1 \cdot 2 \cdot 11)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com