高等学校教材

工程系统分析力学

黄昭度 钟奉俄

高等教育出版社

GONGCHENG XITONG
FENXI LIXUE

工程系统分析力学

黄昭度　钟奉俄

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是按照 1987 年“工科分析力学教材研讨会”制定的内容编写的，具有密切联系工程实际、内容全面、论证严谨等特点。内容包括：基本概念，Lagrange 力学的经典问题，Lagrange 力学的专门问题，Hamilton 力学，力学的变分原理，非完整系统动力学。每章后附有习题，书末有答案和索引。本书可作为工科各专业本科生或研究生教材，也适于力学教师、力学工作者及有关工程技术人员作参考书。

(京)112 号

工程系统分析力学

黄昭度　钟奉俄

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 18.5　字数 440 000

1992 年10月第 1 版　1992 年10月第 1 次印刷

印数 0001—1036

ISBN 7-04-003881-1/TB·199

定价 6.60 元

序

由 Lagrange 和Hamilton 创立的、并经 Jacobi, Hertz, Routh, Appell, Чаплытин 等人发展起来的分析力学已有二百余年的历史。作为离散系统动力学的一般原理和方法，分析力学长期以来一直是理论物理工作者和天文工作者感兴趣的学科，工程科学工作者则很少问津，但这个情况自本世纪 60 年代以来发生了显著变化。由于高新技术的发展，工程科学不断提出复杂离散系统及离散-连续系统动力学问题，这些问题对只掌握初等动力学知识的人是难以解决的，因此分析力学的原理和方法愈来愈广泛和深入地引进到有关工程科学中，这种情况在航空、航天工程、精密机械和仪表，机-电控制系统和机器人等不同技术领域中表现得尤为明显。分析力学和邻近学科如振动理论、运动稳定性、控制理论以及多刚体动力学的发展有着十分紧密的联系，这些学科早期的发展都是以分析力学专题的形式出现的，这在 Lagrange, Routh, Appell 的著作中可以看得很清楚，以后这些学科虽然独立出来，但和分析力学之间仍然存在互相提携，互相促进的紧密关系。此外，分析力学的原理和方法也愈来愈多地渗透到连续体动力学中去这是因为，一方面分析力学作为力学的基本原理和方法，对于连续系统动力学具有普遍意义，一些基本原理如 Hamilton 原理和 Gauss 原理已经卓有成效地用于研究连续体动力学，另一方面，连续体动力学问题的近似求解又往往要采用离散化模型，这就需要应用分析力学的处理方法。

基于以上原因，在高等工科院校有关专业的本科生及研究生中开设分析力学课程势在必行。但目前还缺少一本适合工科本科高年级学生和研究生需要的、有一定理论深度、反映这门学科的最

新成就、又密切联系现代工程实际的分析力学教材。本书作者正是本着这种认识编写这本书的。在材料的收集上，充分注意到了各有关工程领域中应用分析力学方法所取得的成就，从而决定本书的内容和体系，凡是对于工程应用有价值的内容就予以保留，否则就予以删除。在理论阐述上，力求作到概念准确，论证严谨，并充分注意到本学科的当代发展状况，尽可能反映新的观点和方法。对于分析力学和相邻学科的交叉与渗透，本书也有所论述，因此本书除传统的分析力学内容外，还包括振动理论，机-电系统动力学，连续体动力学的变分原理等。

本书每章后都附有一定数量的习题，选编习题的原则是：有易有难，巩固理论，联系实际；因此所编习题大多来自工程实际，或有一定工程背景，或是相邻学科所需，实际价值不大的习题很少选用。

本书内容反映了作者多年来在清华大学，西安矿业学院，北方工业大学等院校讲授分析力学的教学经验。本书编写过程中，北京航空航天大学黄克累教授，哈尔滨工业大学谈开孚教授及西安矿业学院薛问西教授审阅过本书手稿，提出了不少宝贵意见，清华大学胡璐犀教授校对、订正并誊清了全部手稿，在此一并致以衷心的谢意。

作　者

1991 年 6 月

目　　录

第一章 基本概念

在初等动力学中，力、质量、加速度被当作基本力学量，动力学方程则是依据牛顿定律或由牛顿定律导出的普遍定理（动量定理、动量矩定理等）建立的，因此称这部分内容为牛顿力学。其优点是直观性强。但是在工程实际中所遇到的问题多是非自由系统，即研究对象的位置、速度在运动中常受到预先规定的某些限制，这些限制统称为约束。用牛顿定律直接解决非自由系统的问题时，往往显得很困难。例如，由 N 个质点组成的受约束系统，按已往的方法，首先要解除约束代之以约束力，而这些约束力又是未知的，然后再列出 $3N$ 个包含未知约束力在内的二阶微分方程组，加上约束方程及约束的物理条件组成一个数目很大的方程组。显然，质点数目和约束条件愈多时，方程的数目也愈多，求解愈困难。但实际上，由于约束的存在，描述这 N 个质点组成的系统的运动并不需要 $3N$ 个变量。约束方程的数目愈多时，描述运动所需要的独立变量则愈少。因此，研究用独立变量表示系统的运动方程就是必然的了。

Lagrange 从另一途径出发，以能量和功（标量）作为力学基本量，以虚功原理作为研究动力学的出发点，用数学分析的方法统一处理任意非自由系统的动力学问题。1788 年他的巨著《分析力学》问世后，奠定了分析力学的基础。因此前期的分析力学又称为 Lagrange 力学。分析力学的方法特别适用于研究非自由系统的力学问题。它为非自由系统列出了决定运动所必需的最少数目的方程，而且这些方程中不包含未知的约束反力，还具有统一的简明形式。这些方程也适用于电学和机电系统的复杂问题。

本章先介绍分析力学的一些基本概念。

1.1 约束及其分类

1.1.1 约束

设有由N个质点 $P_i(i=1,2,\cdots,N)$组成的系统，质点 P_i 的位置由惯性参考系中一固定点O所引的矢径 $\mathbf{r}_i$ 或直角坐标 x_i, y_i, z_i 所确定。为简单计，有时也将系统所有的直角坐标按统一序号记作 $x_1,x_2,\cdots,x_{3N}$。第 i 个质点的坐标为 x_{3i-2},x_{3i-1},x_{3i}。由于各个质点的位置确定之后，整个系统的位置和形状(简称系统的位形)也就完全确定了，因此又将 $3N$ 个坐标 $x_1,x_2,\cdots,x_{3N}$ 称为确定系统位形的坐标。系统运动时，如果各质点的位置、速度等受到一定的限制，则称这种限制为约束。例如，用一根无质量的刚性杆联结两个小球(质点)，运动时由于刚性杆的存在使两球心的距离保持不变；又如圆盘在粗糙平面上作纯滚动时，粗糙平面使圆盘与平面接触点相对于平面的速度恒等于零。这些都是约束的实例。另外还有这样一类问题，如导弹追踪目标时，要求其飞行方向(即速度方向)时时对准目标。这里并没有一个具体的实物结构来限制导弹飞行速度的方向，而是通过控制系统来实现约束的。约束的形式和机理虽是千差万别，但它们的共同本质在于迫使系统各质点的位置、速度等运动学要素必须满足一定的条件。这种条件可用以下一般形式的方程来表示：

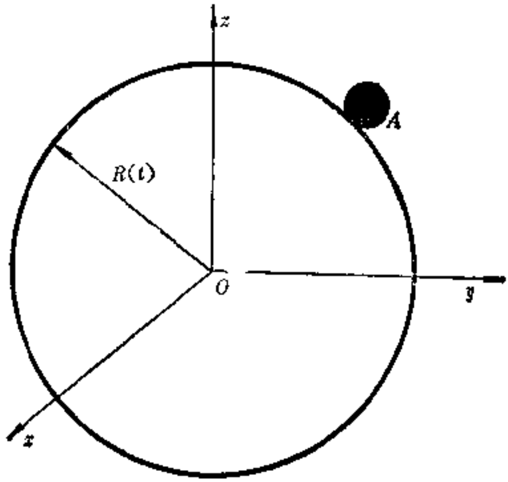
$$f_s(x,\dot{x},t)=0 \qquad s=1,2,\cdots,l \tag{1.1.1}$$

其中 x 是 $x_1,x_2,\cdots,x_{3N}$ 的全体；字母上的点“·”表示该字母代表的量对时间的导数$\left(\text{如 }\dot{x}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$，而 $\dot{x}$ 则是 $\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_{3N}$ 的全体(这种用一个不带下标的字母代表有下标的同一字母的全体的简化记法，今后将一直采用，不再作说明)。方程(1.1.1)称为约束方

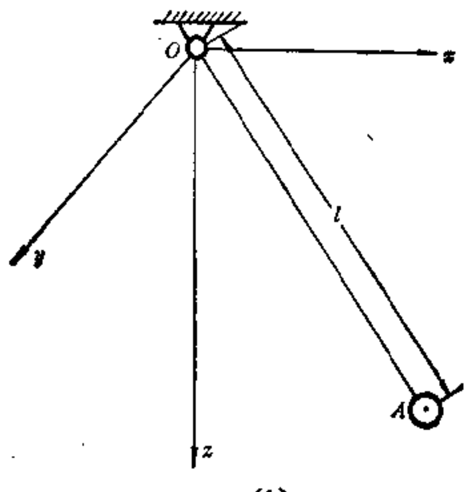
程。有时为了简便起见也将约束方程用质点的矢径表示:

$$f_s(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots, l) \tag{1.1.1$'$}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是质点的矢径,代表 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ 的全体。(一个函数关系



(a)



(b)

图 1.1

用坐标 x 表示或用矢径上表示，并没有本质的区别，今后总认为给定了其中一种形式也就给定了相应的另一种形式。)

例题 1.1.1 一个质点 A 被限制在一个不断膨胀的球面上运动(图 1.1a)；或用一不计质量且不断改变长度的细杆将质点 A 与固定点 O 联结 (图 1.1b)。写出此两种情况下质点的约束方程。

解 将球的半径记作 $R(t)$，杆长记作 $l(t)$。取坐标如图所示。约束方程分别为:

$$x^2+y^2+z^2-R^2(t)=0 \tag{a}$$

$$x^2+y^2+z^2-l^2(t)=0 \tag{b}$$

例题 1.1.2 导弹 A 追击目标 B。要求导弹速度方向总指向目标。试写出约束方程。

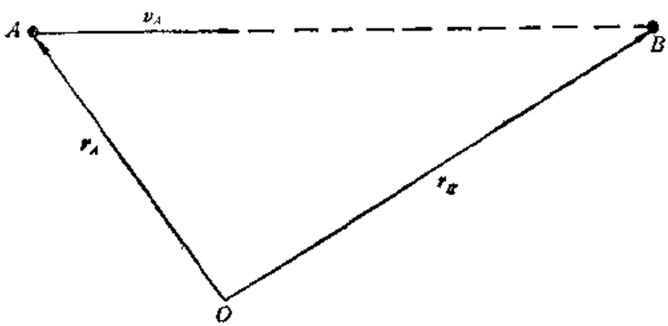


图 1.2

解 以 $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B$ 分别记 A, B 的位置(图 1.2)，则约束方程为:

$$\frac{\dot{\boldsymbol{r}}_A}{|\dot{\boldsymbol{r}}_A|}=\frac{\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A}{|\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A|} \tag{a}$$

或者写成标量形式:

$$\frac{\dot{x}_A}{x_B-x_A}-\frac{\dot{y}_A}{y_B-y_A}=0, \frac{\dot{x}_A}{x_B-x_A}-\frac{\dot{z}_A}{z_B-z_A}=0 \tag{b}$$

1.1.2 约束的分类

在例题 1.1.1 中，两个结构不同的约束却有相同的约束方程。在分析力学中，由于我们关心的是各质点间的位置、速度等等所应满足的关系而不是约束的结构，因而对例题 1.1.1 中两种约束就无需区别。也就是说，今后所说的约束，仅是指约束方程而言，而不追究其具体的构造。因而约束的分类也完全是按约束方程的不同类型而区分的。

一、完整约束和非完整约束

在约束方程(1.1.1)中，如果仅含坐标 x 和时间 t 而不含速度 $\dot{x}$ 时，称为完整约束或几何约束。也就是说，完整约束只限制系统各质点的位置而不限制速度。完整约束的约束方程具有如下的数学表达式：

$$f_s(x, t)=0 \qquad (s=1, 2, \cdots, l) \tag{1.1.2}$$

如果除位形外，系统各点坐标的时间导数(包括速度、加速度等)也受到一定限制，则这种限制条件称为非完整约束。非完整约束中最简单的，也是最常见的一种情况是所谓一阶线性非完整约束，其特点是仅速度受到限制，且约束方程中被限制的速度以线性项形式出现：

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{si}\dot{x}_i + A_s = 0 \qquad (s=1, 2, \cdots, g) \tag{1.1.3}$$

显然，例题 1.1.1 是完整约束，例题 1.1.2 是一阶线性非完整约束。以下再来研究几个完整约束与非完整约束的实例。

例题 1.1.3 具有摆动汽缸的平面机构如图 1.3 所示，已知曲柄 $OA=r$，曲柄轴至汽缸铰的距离 $OC=l$，连杆 $AB=l_1$。试分析此系统的约束类型。

解 取如图所示的直角坐标系。设 A、B 两点的坐标为 x_A,

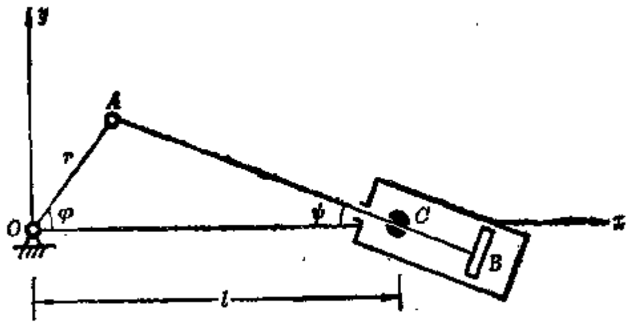


图 1.3

y_A 及 x_B, y_B，则两个约束方程为

$$x_A^2+y_A^2=r^2 \qquad (a)$$

$$(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=l_1^2 \qquad (b)$$

连杆在任何时刻皆必须通过 C 点，这个约束条件可由 OAB 三角形给出以下关系：

$$\frac{\sin(\varphi+\psi)}{l}=\frac{\sin\psi}{r} \qquad (c)$$

或

$$\frac{\sin\varphi+\cos\varphi\operatorname{tg}\psi}{l}=\frac{\operatorname{tg}\psi}{r} \qquad (d)$$

注意以下几何关系：

$$\sin\varphi=\frac{y_A}{r} \qquad \cos\varphi=\frac{x_A}{r} \qquad (e)$$

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{y_A-y_B}{x_B-x_A} \qquad (f)$$

代人 (d) 后，可得到第三个约束方程：

$$\frac{1}{l}\left(y_A+x_A\cdot\frac{y_A-y_B}{x_B-x_A}\right)=\frac{y_A-y_B}{x_B-x_A} \qquad (g)$$

全部约束方程 (a)、(b)、(g) 表明这些约束都是完整约束。

例题 1.1.4 冰刀在平面上滑动，冰刀中点的速度始终沿冰

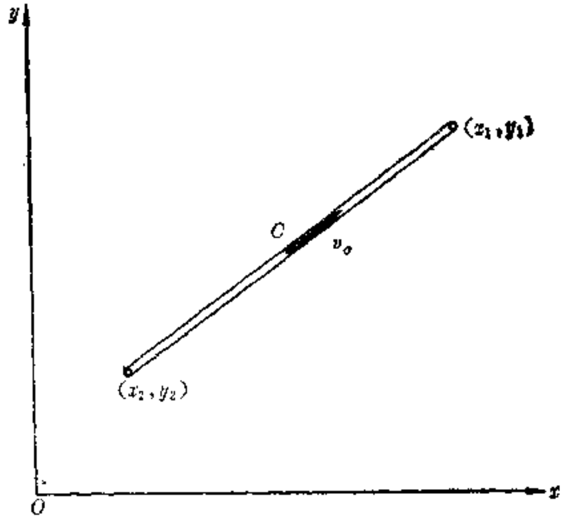


图 1.4

刀的轴线方向。以(x_1, y_1)，(x_2, y_2)分别记冰刀两端点的位置，则冰刀受到的约束为

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-l^2=0 \tag{a}$$

其中 l 是冰刀两端点的距离。速度限制条件为

$$\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_1-x_2}=\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_1-y_2} \tag{b}$$

或写成

$$(y_1-y_2)\dot{x}_1+(y_1-y_2)\dot{x}_2+(x_2-x_1)\dot{y}_1+(x_2-x_1)\dot{y}_2=0 \tag{c}$$

由此可见，(a)是完整约束；(c)是一阶线性非完整约束。

例题 1.1.5 半径为 a 的均质球在粗糙平面上作纯滚动。这是一个具有一阶线性非完整约束的实例，例如，各种滚珠轴承、齿轮传动中齿廓间的滚动，都与此相仿。在刚体动力学中，已知球的转动角速度 ω 在固定坐标 x, y, z 轴上的分量式为：

$$\omega=(\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi)\boldsymbol{i}+$$