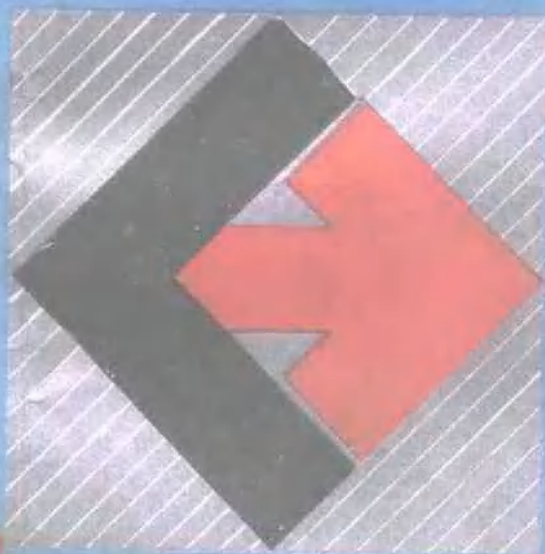


► 高等学校教材

工程系统分析力学

► 黄昭度 钟奉俄

► 高等教育出版社



GONGCHENG XITONG
FENXI LIXUE

0316
H95-2

361266

工程系统分析力学

黄昭度 钟奉俄



高等教育出版社

内 容 提 要

本书是按照 1987 年“工科分析力学教材研讨会”制定的内容编写的, 具有密切联系工程实际、内容全面、论证严谨等特点。内容包括: 基本概念, Lagrange 力学的经典问题, Lagrange 力学的专门问题, Hamilton 力学, 力学的变分原理, 非完整系统动力学。每章后附有习题, 书末有答案和索引。本书可作为工科各专业本科生或研究生教材, 也适于力学教师、力学工作者及有关工程技术人员作参考书。

(京)112 号

2.102/10

工程系统分析力学

黄昭虞 钟奉俄

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 18.5 字数 440 000

1992 年10月第1版 1992 年10月第1次印刷

印数 0001—1036

ISBN 7-04-003881-1/TB·199

定价 6.60 元

序

由 Lagrange 和 Hamilton 创立的、并经 Jacobi, Hertz, Routh, Appell, Чаплыгин 等人发展起来的分析力学已有二百余年的历史。作为离散系统动力学的一般原理和方法, 分析力学长期以来一直是理论物理工作者和天文工作者感兴趣的学科, 工程科学工作者则很少问津, 但这个情况自本世纪 60 年代以来发生了显著变化。由于高新技术的发展, 工程科学不断提出复杂离散系统及离散-连续系统动力学问题, 这些问题对只掌握初等动力学知识的人是难以解决的, 因此分析力学的原理和方法愈来愈广泛和深入地引进到有关工程科学中, 这种情况在航空、航天工程、精密机械和仪表, 机-电控制系统和机器人等不同技术领域中表现得尤为明显。分析力学和邻近学科如振动理论、运动稳定性、控制理论以及多刚体动力学的发展有着十分紧密的联系, 这些学科早期的发展都是以分析力学专题的形式出现的, 这在 Lagrange, Routh, Appell 的著作中可以看得很清楚, 以后这些学科虽然独立出来, 但和分析力学之间仍然存在互相提携, 互相促进的紧密关系。此外, 分析力学的原理和方法也愈来愈多地渗透到连续体动力学中去这是因为, 一方面分析力学作为力学的基本原理和方法, 对于连续系统动力学具有普遍意义, 一些基本原理如 Hamilton 原理和 Gauss 原理已经卓有成效地用于研究连续体动力学, 另一方面, 连续体动力学问题的近似求解又往往要采用离散化模型, 这就需要应用分析力学的处理方法。

基于以上原因, 在高等工科院校有关专业的本科生及研究生中开设分析力学课程势在必行。但目前还缺少一本适合工科本科高年级学生和研究生需要的、有一定理论深度、反映这门学科的最

新成就、又密切联系现代工程实际的分析力学教材。本书作者正是本着这种认识编写这本书的。在材料的收集上，充分注意到了各有关工程领域中应用分析力学方法所取得的成就，从而决定本书的内容和体系，凡是对于工程应用有价值的内容就予以保留，否则就予以删除。在理论阐述上，力求作到概念准确，论证严谨，并充分注意到本学科的当代发展状况，尽可能反映新的观点和方法。对于分析力学和相邻学科的交叉与渗透，本书也有所论述，因此本书除传统的分析力学内容外，还包括振动理论，机-电系统动力学，连续体动力学的变分原理等。

本书每章后都附有一定数量的习题，选编习题的原则是：有易有难，巩固理论，联系实际；因此所编习题大多来自工程实际，或有一定工程背景，或是相邻学科所需，实际价值不大的习题很少选用。

本书内容反映了作者多年来在清华大学，西安矿业学院，北方工业大学等院校讲授分析力学的教学经验。本书编写过程中，北京航空航天大学黄克累教授，哈尔滨工业大学谈开孚教授及西安矿业学院薛问西教授审阅过本书手稿，提出了不少宝贵意见，清华大学胡露犀教授校对、订正并誉清了全部手稿，在此一并致以衷心的感谢。

作 者

1991 年 6 月

目 录

第一章 基本概念	1
1.1 约束及其分类	2
1.1.1 约束	2
1.1.2 约束的分类	5
1.2 广义坐标	17
1.3 准速度与准坐标	23
1.4 位形空间与状态空间	30
1.4.1 位形空间	30
1.4.2 状态空间	34
1.5 可能位移、实位移、虚位移	37
1.5.1 可能位移	37
1.5.2 实位移	38
1.5.3 虚位移	38
1.5.4 以准坐标变分表示虚位移	43
1.5.5 自由度	44
1.6 理想约束	45
1.6.1 约束力	45
1.6.2 几种常见约束及其约束力的虚功	46
1.6.3 理想约束	49
1.6.4 第一类 Lagrange 方程	51
1.7 动能、主动力的虚功及势能	52
1.7.1 动能	52
1.7.2 主动力的虚功	60
1.7.3 势能	63
1.8 动力学普遍方程(d'Alembert-Lagrange 原理)	69
第二章 Lagrange 力学(一)	82
2.1 第二类 Lagrange 方程	82
2.1.1 第二类 Lagrange 方程的一般形式	82
2.1.2 Lagrange 函数及有势系统的 Lagrange 方程	85

2.2	广义势及带电质点在电磁场中的运动	92
2.3	约束力的求法	94
2.4	能量积分	96
2.5	系统总能量的变化,陀螺力和耗散力	101
2.5.1	总机械能的变化	101
2.5.2	陀螺力	102
2.5.3	与非定常约束有关的广义陀螺力	104
2.5.4	扰动微分方程中的广义陀螺力	109
2.5.5	耗散力及耗散函数	113
2.6	循环积分	118
2.7	Noether 定理	124
2.8	Lagrange 方程的降阶	130
2.8.1	Whittaker 方程——利用广义能量积分降阶	131
2.8.2	Legendre 变换	134
2.8.3	Routh 变换与Routh 方程——利用循环积分降阶	136
2.9	保守系统的微振动理论	143
2.9.1	平衡位置的稳定性	143
2.9.2	稳定平衡位置附近的微振动	144
2.9.3	主振型向量的正交性	148
2.9.4	主振型矩阵,主坐标变换	150
2.9.5	系统对外扰力的响应	156
2.10	保守陀螺系统的微振动	157
2.11	几个具体的工程系统动力学问题	164
2.11.1	陀螺摆的动力学问题	164
2.11.2	带有单圆盘的旋转轴的振动问题	169
2.11.3	圆形限制三体问题	175
2.11.4	轨道卫星的姿态运动问题	180
第三章 Lagrange 力学(二)		199
3.1	碰撞问题的 Lagrange 方程	199
3.2	以准坐标表示的运动方程——Euler-Lagrange 方程	205
3.2.1	Euler-Lagrange 方程	205
3.2.2	三标记号的求法	210
3.2.3	自由刚体的运动微分方程	211

3.3 载体-被载系统的运动微分方程	217
3.3.1 载体的运动微分方程	218
3.3.2 被载系统的相对运动微分方程	223
3.4 变质量系统的 Lagrange 方程	239
3.5 带有柔性部件的系统动力学方程	248
3.5.1 柔性部件的力学模型及动力学方程	248
3.5.2 带有柔性部件的载体动力学方程	253
3.6 机电系统的 Lagrange-Maxwell 方程	266
3.6.1 电路系统的广义回路及基本方程	267
3.6.2 驱动力的确定及 Lagrange-Maxwell 方程	273
第四章 Hamilton 力学	297
4.1 Hamilton 正则方程	298
4.1.1 Lagrange 系统的正则方程	298
4.1.2 任意系统的正则方程	306
4.2 Hamilton 函数的物理意义及正则方程的首次积分	307
4.2.1 Hamilton 函数的物理意义	307
4.2.2 能量积分	308
4.2.3 循环积分	308
4.3 正则方程的降阶	309
4.3.1 利用能量积分降阶	309
4.3.2 利用循环积分降阶	311
4.4 Poisson 括号与 Lagrange 括号	315
4.4.1 Poisson 括号	315
4.4.2 Jacobi-Poisson 定理	317
4.4.3 Lagrange 括号	319
4.5 正则变换	321
4.5.1 正则变换的定义	321
4.5.2 $d\delta f = \delta df$	322
4.5.3 正则变换的判别定理	324
4.6 正则变换的一些重要性质	327
4.7 生成函数	333
4.7.1 生成函数的简单方案	333
4.7.2 生成函数的一般方案	339

4.8	Hamilton-Jacobi 方程	340
4.8.1	Hamilton-Jacobi 方程	340
4.8.2	Hamilton Jacobi 定理	344
4.9	几种特殊情况下 Hamilton-Jacobi 方程的求解	345
4.9.1	H 不显含时间 t 的情况	345
4.9.2	存在循环坐标的情况	346
4.9.3	可分离变量的情况	347
4.10	正则振动理论	357
第五章	力学的变分原理	365
5.1	变分原理概述	365
5.2	非完整约束条件下的虚位移的定义	368
5.2.1	一阶约束情形	369
5.2.2	高阶约束的情形	371
5.3	微分变分原理	374
5.3.1	Mangeron 原理	374
5.3.2	Jourdain 原理	375
5.3.3	Gauss 原理	376
5.4	微分-变分交换关系	378
5.4.1	问题的提出	378
5.4.2	Hölder 定义的交换关系	379
5.4.3	Соболев 定义的交换关系	381
5.5	Hamilton 原理	383
5.5.1	变分法导引	383
5.5.2	Hamilton 原理的一般形式	388
5.5.3	完整系统的 Hamilton 原理	392
5.5.4	非完整系统的 Hamilton 原理	394
5.6	Hamilton 原理与正则方程及正则变换的关系	398
5.6.1	由 Hamilton 原理推导正则方程	398
5.6.2	由 Hamilton 原理建立正则变换	403
5.7	Hamilton 作用量的极值性质	405
5.8	基于变分原理的直接解法	407
5.8.1	基于 Hamilton 原理的直接解法	408
5.8.2	变时间端点下的 Hamilton 原理及应用	416

5.8.3 基于广义 Helmholtz 原理的直接解法	420
5.8.4 基于微分原理的直接解法	427
5.9 最小作用量原理	433
5.10 变分原理在连续体动力学中的推广及应用	440
5.10.1 线弹性动力学的时域微分原理	441
5.10.2 线弹性动力学的时域积分原理	444
5.11 变质量系统的 Hamilton 原理	457
第六章 非完整系统动力学	466
6.1 引言	466
6.2 Routh 方程	467
6.3 关于非完整系统中准速度及准坐标	473
6.3.1 准速度的变分	473
6.3.2 准坐标的变分	475
6.3.3 函数对准速度及对准坐标的导数	476
6.4 Чаплыгин 方程	477
6.4.1 广义 Чаплыгин 方程	478
6.4.2 Чаплыгин 方程	481
6.5 Boltzmann-Hamel 方程	495
6.5.1 一阶非线性非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程	495
6.5.2 一阶线性非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程	497
6.5.3 γ_{ik}^* 及 ε_k^* 的求法	499
6.5.4 关于广义 Чаплыгин 方程与 Boltzmann-Hamel 方程的讨论	511
6.6 Appell 方程	515
6.6.1 Appell 形式的 Jourdain 原理	515
6.6.2 Appell 方程	516
6.6.3 Appell 函数	519
6.7 建立动力学方程的 Kane 方法	529
6.7.1 Kane 方法概要	530
6.7.2 刚体中的广义主动力和广义惯性力	533
6.8 再论非完整系统动力学的积分变分原理	543
习题答案	554
参考文献	571
索引	574

第一章 基本概念

在初等动力学中,力、质量、加速度被当作基本力学量,动力学方程则是依据牛顿定律或由牛顿定律导出的普遍定理(动量定理、动量矩定理等)建立的,因此称这部分内容为牛顿力学。其优点是直观性强。但是在工程实际中所遇到的问题多是非自由系统,即研究对象的位置、速度在运动中常受到预先规定的某些限制,这些限制统称为约束。用牛顿定律直接解决非自由系统的问题时,往往显得很困难。例如,由 N 个质点组成的受约束系统,按已往的方法,首先要解除约束代之以约束力,而这些约束力又是未知的,然后再列出 $3N$ 个包含未知约束力在内的二阶微分方程组,加上约束方程及约束的物理条件组成一个数目很大的方程组。显然,质点数目和约束条件愈多时,方程的数目也愈多,求解愈困难。但实际上,由于约束的存在,描述这 N 个质点组成的系统的运动并不需要 $3N$ 个变量。约束方程的数目愈多时,描述运动所需要的独立变量则愈少。因此,研究用独立变量表示系统的运动方程就是必然的了。

Lagrange 从另一途径出发,以能量和功(标量)作为力学基本量,以虚功原理作为研究动力学的出发点,用数学分析的方法统一处理任意非自由系统的动力学问题。1788年他的巨著《分析力学》问世后,奠定了分析力学的基础。因此前期的分析力学又称为Lagrange力学。分析力学的方法特别适用于研究非自由系统的力学问题。它为非自由系统列出了决定运动所必需的最少数目的方程,而且这些方程中不包含未知的约束反力,还具有统一的简明形式。这些方程也适用于电学和机电系统的复杂问题。

本章先介绍分析力学的一些基本概念。

1.1 约束及其分类

1.1.1 约束

设有由 N 个质点 $P_i (i=1, 2, \dots, N)$ 组成的系统, 质点 P_i 的位置由惯性参考系中一固定点 O 所引的矢径 $\mathbf{r}_i$ 或直角坐标 x_i, y_i, z_i 所确定。为简单计, 有时也将系统所有的直角坐标按统一序号记作 $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$ 。第 i 个质点的坐标为 $x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}$ 。由于各个质点的位置确定之后, 整个系统的位置和形状(简称系统的位形)也就完全确定了, 因此又将 $3N$ 个坐标 $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$ 称为确定系统位形的坐标。系统运动时, 如果各质点的位置、速度等受到一定的限制, 则称这种限制为约束。例如, 用一根无质量的刚性杆联结两个小球(质点), 运动时由于刚性杆的存在使两球心的距离保持不变; 又如圆盘在粗糙平面上作纯滚动时, 粗糙平面使圆盘与平面接触点相对于平面的速度恒等于零。这些都是约束的实例。另外还有这样一类问题, 如导弹追踪目标时, 要求其飞行方向(即速度方向)时时对准目标。这里并没有一个具体的实物结构来限制导弹飞行速度的方向, 而是通过控制系统来实现约束的。约束的形式和机理虽是千差万别, 但它们的共同本质在于迫使系统各质点的位置、速度等运动学要素必须满足一定的条件。这种条件可用以下一般形式的方程来表示:

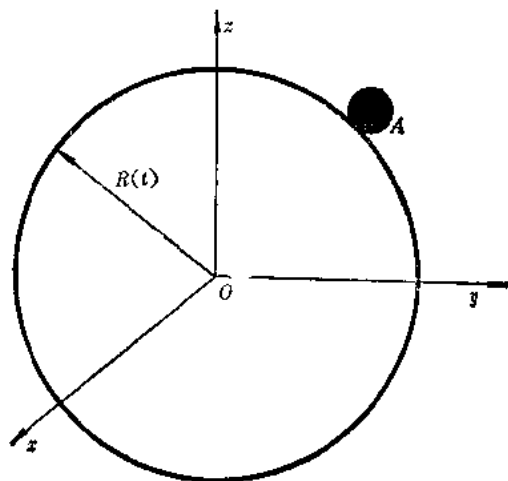
$$f_s(x, \dot{x}, t) = 0 \quad s=1, 2, \dots, l \quad (1.1.1)$$

其中 x 是 $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$ 的全体; 字母上的点“ $\cdot$ ”表示该字母代表的量对时间的导数(如 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$), 而 $\dot{x}$ 则是 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_{3N}$ 的全体(这种用一个不带下标的字母代表有下标的同一字母的全体的简化记法, 今后将一直采用, 不再作说明)。方程(1.1.1)称为约束方

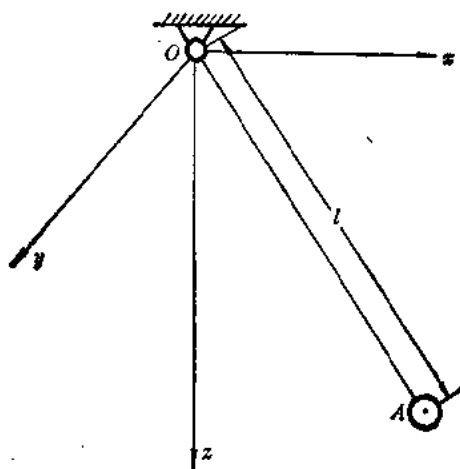
程。有时为了简便起见也将约束方程用质点的矢径表示:

$$f_s(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, l) \quad (1.1.1)'$$

其中 $\mathbf{r}$ 是质点的矢径, 代表 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ 的全体。(一个函数关系



(a)



(b)

图 1.1

用坐标 x 表示或用矢径上表示, 并没有本质的区别, 今后总认为给定了其中一种形式也就给定了相应的另一种形式。)

例题 1.1.1 一个质点 A 被限制在一个不断膨胀的球面上运动(图 1.1a); 或用一不计质量且不断改变长度的细杆将质点 A 与固定点 O 联结(图 1.1b)。写出此两种情况下质点的约束方程。

解 将球的半径记作 $R(t)$, 杆长记作 $l(t)$ 。取坐标如图所
示。约束方程分别为:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2(t) = 0 \quad (a)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2(t) = 0 \quad (b)$$

例题 1.1.2 导弹 A 追击目标 B 。要求导弹速度方向总指向目标。试写出约束方程。

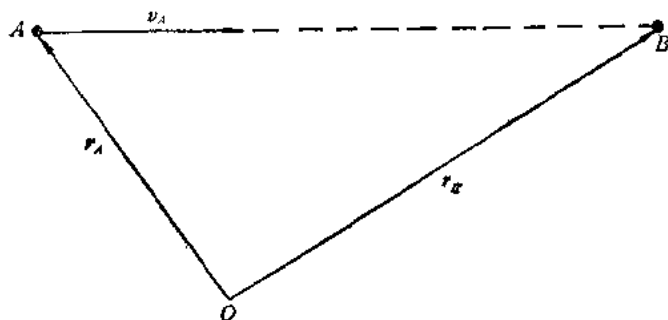


图 1.2

解 以 r_A, r_B 分别记 A, B 的位置(图 1.2), 则约束方程为:

$$\frac{\dot{r}_A}{|r_A|} = \frac{r_B - r_A}{|r_B - r_A|} \quad (a)$$

或者写成标量形式:

$$\frac{\dot{x}_A}{x_B - x_A} - \frac{\dot{y}_A}{y_B - y_A} = 0, \quad \frac{\dot{x}_A}{x_B - x_A} - \frac{\dot{z}_A}{z_B - z_A} = 0 \quad (b)$$

1.1.2 约束的分类

在例题 1.1.1 中,两个结构不同的约束却有相同的约束方程。在分析力学中,由于我们关心的是各质点间的位置、速度等等所应满足的关系而不是约束的结构,因而对例题 1.1.1 中两种约束就无需区别。也就是说,今后所说的约束,仅是指约束方程而言,而不追究其具体的构造。因而约束的分类也完全是按约束方程的不同类型而区分的。

一、完整约束和非完整约束

在约束方程(1.1.1)中,如果仅含坐标 x 和时间 t 而不含速度 $\dot{x}$ 时,称为完整约束或几何约束。也就是说,完整约束只限制系统各质点的位置而不限速度。完整约束的约束方程具有如下的数学表达式:

$$f_s(x, t) = 0 \quad (s=1, 2, \dots, l) \quad (1.1.2)$$

如果除位形外,系统各点坐标的时间导数(包括速度、加速度等)也受到一定限制,则这种限制条件称为非完整约束。非完整约束中最简单的,也是最常见的一种情况是所谓一阶线性非完整约束,其特点是仅速度受到限制,且约束方程中被限制的速度以线性项形式出现:

$$\sum_{i=1}^{3N} A_{si} \dot{x}_i + A_s = 0 \quad (s=1, 2, \dots, g) \quad (1.1.3)$$

显然,例题 1.1.1 是完整约束,例题 1.1.2 是一阶线性非完整约束。以下再来研究几个完整约束与非完整约束的实例。

例题 1.1.3 具有摆动汽缸的平面机构如图 1.3 所示,已知曲柄 $OA=r$, 曲柄轴至汽缸铰的距离 $OC=l$, 连杆 $AB=l_1$ 。试分析此系统的约束类型。

解 取如图所示的直角坐标系。设 A 、 B 两点的坐标为 x_A ,

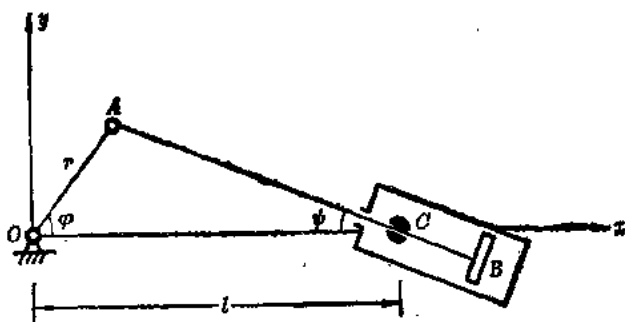


图 1.3

y_A 及 x_B, y_B , 则两个约束方程为

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2 \quad (a)$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2 \quad (b)$$

连杆在任何时刻皆必须通过 C 点, 这个约束条件可由 OAB 三角形给出以下关系:

$$\frac{\sin(\varphi + \psi)}{l} = \frac{\sin \psi}{r} \quad (c)$$

或

$$\frac{\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \psi}{l} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{r} \quad (d)$$

注意以下几何关系:

$$\sin \varphi = \frac{y_A}{r} \quad \cos \varphi = \frac{x_A}{r} \quad (e)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \quad (f)$$

代入 (d) 后, 可得到第三个约束方程:

$$\frac{1}{l} \left(y_A + x_A \cdot \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \right) = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \quad (g)$$

全部约束方程 (a)、(b)、(g) 表明这些约束都是完整约束。

例题 1.1.4 冰刀在平面上滑动, 冰刀中点的速度始终沿冰

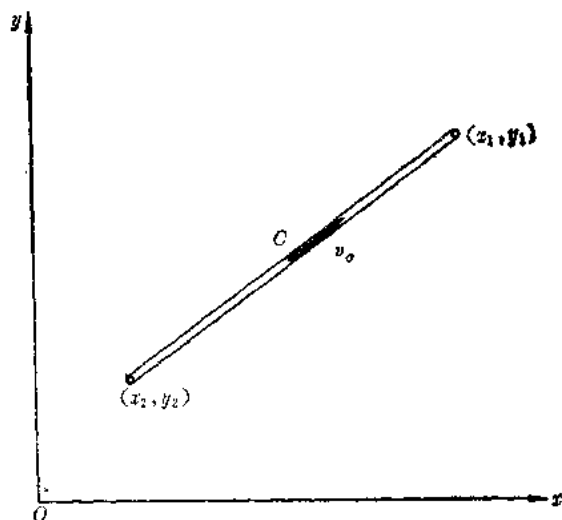


图 1.4

刀的轴线方向。以 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 分别记冰刀两端点的位置, 则冰刀受到的约束为

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0 \quad (a)$$

其中 l 是冰刀两端点的距离。速度限制条件为

$$\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2} \quad (b)$$

或写成

$$(y_1 - y_2)\dot{x}_1 + (y_1 - y_2)\dot{x}_2 + (x_2 - x_1)\dot{y}_1 + (x_2 - x_1)\dot{y}_2 = 0 \quad (c)$$

由此可见, (a) 是完整约束; (c) 是一阶线性非完整约束。

例题 1.1.5 半径为 a 的均质球在粗糙平面上作纯滚动。这是一个具有一阶线性非完整约束的实例, 例如, 各种滚珠轴承, 齿轮传动中齿廓间的滚动, 都与此相仿。在刚体动力学中, 已知球的转动角速度 ω 在固定坐标 x, y, z 轴上的分量式为:

$$\omega = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \mathbf{i} +$$