弹性矩形薄板振动

曹国雄

弹性矩形薄板振动

中国建筑工业出版社

弹性矩形薄板振动

曹　国　雄

中国建筑工业出版社

本书系统地阐述了有关弹性薄板振动计算的各种解法，并对实际工程中应用较广的正交各向异性板和各向同性板，在各种不同边界条件下的自由振动，以及在各种振动荷载作用下的强迫振动等进行详细推导，列出通式，并编成表格以资应用。

书中附有根据弹性薄板振动理论各种解法进行分析的部分实测例子，可供实际工程参考。

本书可供土建专业的工程技术人员、教学与科研工作者处理及研究振动问题时参考。

弹性矩形薄板振动

曹 国 雄

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京市顺义县印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/16 印张：$19\frac{1}{4}$ 插页：1 字数：465千字

1983年10月第一版　1983年10月第一次印刷

印数：1—5,900册　定价：2.60元

统一书号：15040·4547

序

随着我国社会主义大规模建设的发展，弹性薄板的振动问题，在各项工程中显得越来越重要。因而，对弹性薄板结构动力学问题合理的解决就感到非常迫切。但有关弹性薄板振动计算的资料殊感缺乏，尤其难得有结合当前实际应用的专著。就在目前较为常见的有关振动书籍中[1],[11],[20],[59]，一般只列举了六种不同支承边界矩形板的近似解法，而对应用广泛的加肋板或正交各向异性板等均未予讨论，也有片面采用静力学的概念来分析动力问题，将其分割成条形计算的。由于这种假设的不合理，导得的振幅或内力等值均不足以反映结构物的真实情况，从而形成某些工程中时而偏于保守，时而偏于不安全，或产生有害的变形，以致影响正常的生产和使用。鉴于上述情况，作者根据长期工作实践的经验以及所积累的部分振动实测资料补充整理成册，以适应实际建设工作的需要。书中根据弹性薄板理论和振动原理对正交各向异性板及各向同性板求得其精确解（级数解），进而导出大量的近似公式（变分解、差分解等）并编制成各种表格，以资实际工程的应用。

书中所举弹性薄板振动的例子，涉及建筑、桥梁及船舶等方面，但因条件所限而有所舍弃。

全书共分六章及三个附录。第一章除阐述薄板横向振动的一些基本假设、薄板的内力、边界条件、板的势能和动能以外，主要讨论了弹性薄板自由振动的各种解法，如级数法、能量法和变分法等，并列出大量表格。

第二章论述矩形板的强迫振动问题，主要利用双三角级数和单三角级数法，求出各种振动荷载作用下振幅、内力的精确解。

第三章探讨弹性薄板振动的数值解法，主要利用差分法求得各种不同支承条件下矩形、三角形、菱形、正六角形和环形等板的固有频率，及其在强迫荷载作用下的振幅计算等。此外，对有限元法在弹性薄板振动上的应用作了简要介绍。

第四章对正交各向异性板的自由振动进行分析，主要利用瑞利-李滋法求出各种不同支承的矩形薄板的基频及高频的通式。

第五章研究正交各向异性板强迫振动的问题，主要利用单三角级数法以求得其精确解。在导得四边简支单跨板的一系列结论基础上，推证出七动力矩方程，以求解双向连续板的振动问题。最后对连续板支座振动所引起的振动影响等问题亦作了必要的叙述。

第六章为正交各向异性板强迫振动的近似解。主要根据能量法和虚功原理导出十八种不同支承条件的矩形板在各种不同形式强迫荷载作用下振幅的近似计算公式，并作出大量表格。所列公式经过简单的变换，可同样适用于各向同性板。对工程实践中应用较广的角点支承板的振动问题，亦有所论述。为实际应用的方便，除对板的频谱作简要的讨论外，并介绍了连续板振幅传布的折减系数值，其精度可满足一般工程要求。

附录中以表格形式列出了有关各种材料和外形的正交各向异性板的刚度计算公式以及建筑工程中应用较广的预制槽形板楼盖的刚度等，可在工程设计中直接查用。

本书第三章的有限元法部分由裴星树同志执笔，全稿的整理及插图等承余培根、韦兆序同志协助，特此致谢。

以上内容除一些基本理论系参考有关文献并补充应用实例进行编纂外，其它部分基本上由作者自行推导获得。其中部分材料，如第三章弹性薄板振动的数值计算(有限差分解)及第四、五章正交各向异性板的固有振动及强迫振动计算等先后在1961～1964年上海市土木工程学会年会及1965年全国振动会议上作过介绍。限于水平，谬误之处在所难免，敬希读者给予批评指正。

曹国雄

于上海

符　　号

x, y, z	直角坐标
r_x, r_y	板中面在xz和yz平面内的曲率半径
σ_x, σ_y, σ_z	与x，y，z轴平行的正应力分量
τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz}	直角坐标中的剪应力分量
M_x, M_y	板在分别垂直于x轴和y轴的二截面的单位长度上的弯矩
M_{xy}	板在垂直于x轴截面的单位长度上的扭矩
Q_x, Q_y	板在分别垂直于x轴和y轴的二截面的单位长度上平行于z轴的剪力
a, b	板的平面尺寸
D_1, D_2	分别为弹性主方向（即x，y方向）的抗弯刚度
D_k	板的抗扭刚度
D	板的抗弯刚度
E_1, E_2	分别为板的主方向（即x，y方向）的弹性模数
E	弹性模数
$F(x, y, t)$	强迫振动荷载
f	频率
G	为板xy面的剪切模数
g	重力加速度
h	板的厚度,
k	土壤的压缩弹性系数
K_r $K_r(\alpha)$, $K_r(\beta)$	荷载的换算系数
m, m_0	质量
M, M_r	集中质量
M_0, M_1, M_2'	集中振动力矩，分布振动力矩
M_a, M_b, M_d	支坐处分布振动力矩
P_0, P	集中振动荷载，均布振动荷载
$\bar{q}_0$	板单位面积上重量（$\bar{q}_0=rh$）
q	连续分布荷载幅度
S, $\bar{S}$	板上集中质量的处数，影响系数
T	板的功能
U	板的势能
v, v_0	速度，初速度
$w(x, y, t)$	板的振幅

W_0	初挠度
w_0	本征函数，振幅，挠度
w_m^o，w_m^a	支坐振幅
$y(x,\ t)$	梁的振幅
α，β，β_1，β_2	动力系数，初相位，相位角
r	单位体积的容重，非弹性阻尼系数
θ	强迫频率
μ_1，μ_2	分别为板的主方向（即 x，y 方向）泊松比
μ	泊松比
ω_{mn}	固有频率
ω_1^0，ω_2^0	多跨板第一、第二频段区间的最低频率
ω_1^*，ω_2^*	多跨板第一、第二频段区间的最高频率
$\psi_j(x)$	梁的基本函数
∇^2	拉普拉斯算子$\left(\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$
	固定支承
	简支支承
	自由支承

目　录

第一章 薄板自由振动

§1-1 薄板振动的微分方程

高度远小于底面尺度成较薄的扁平形的弹性体，称为薄板。平行于薄板的上下面且平分其厚度的平面称为中面。薄板承受垂直于板面的横向荷重时，便发生挠曲，并且在其平面内有张力发生。但当

（1）板的厚度远小于其它二尺度，

和（2）板的挠度比它的厚度小，

则（3）板平面内的张力可略而不计；

同时，按照线性平板理论，尚假定

（4）在挠曲前中面的法线在变形后仍为挠曲中面法线，和（5）板的各水平层间的正应力与其它各量相比是一个较小的量。

这些便是弹性薄板小挠度问题的基本假设，据此可推导基本计算式，以解决各种具体问题[3],[25]。

现将 x 及 y 轴置于板的中面上，z 轴向下。板受弯曲后，取板的垂直横截面平行于 xz 平面，如图 1-1 所示，则从微分学可知，曲线上任一点的曲率等于其曲率半径的倒数。因此，若以 r_x 代表在薄板挠曲后的中面上任意点沿 x 方向的曲率半径，则

$$\frac{1}{r_x}=\frac{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

因薄板挠度很小，所以 $\tan\alpha\cong\alpha$，$\tan^2\alpha\cong 0$，于是

$$\frac{1}{r_x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (a)$$

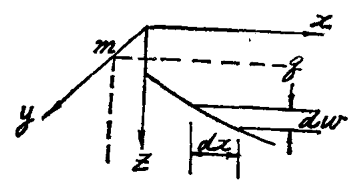

图 1-1

挠曲向下时曲率规定为正，因而使 $\frac{1}{r_x}$ 的值带有负号。按同理可知在沿 y 方向的曲率为

$$\frac{1}{r_y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (b)$$

（a）和（b）式说明薄板的曲率计算与梁相同。

若以图 1-2 表示薄板在沿 x 方向某垂直面上挠曲后的状态，则从该图可知，在中性面上任意点 F' 的法线于挠曲过程中所转过的角为 $-\frac{\partial w'}{\partial x}$。这里所以采用负号是当 z 的负值代入（即在中性轴以下）时，能相当于拉应力区域有正的应变值。从这一转动可使在离中性轴 F' 点 z 距离外有一沿 x 方向的偏移。

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} \tag{c}$$

同理，沿 y 方向该点的偏移可表示为

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y} \tag{d}$$

则在 x 和 y 方向的应变为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

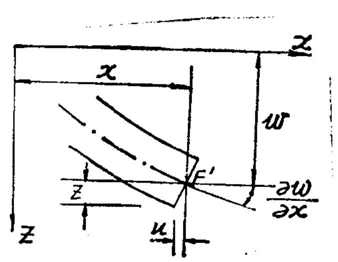

图 1-2

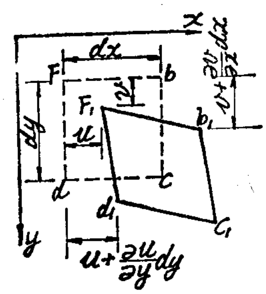

图 1-3

为了求得相应的剪应变的算式，更进一步在 F 处取一微分体 $Fbcd$，如图1-3。它的 Fb 和 Fd 边分别平行于 x 和 y，并与中性轴的距离亦为 z。受弯矩作用后 F、b、c 和 d 四角点即有偏移。若 F_1 点的偏移为（u,v），则 d 点的偏移沿 x 方向是 $u+\frac{\partial u}{\partial y}dy$，$b$ 点沿 y 方向的偏移是 $v+\frac{\partial v}{\partial x}dx$。因此，剪应变是

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{f}$$

将（c）和（d）式代入（f）式，便得

$$\gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{g}$$

根据虎克定律

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E} \end{aligned}\right\} \tag{h}$$

式中 E 为材料的弹性模量，μ 为其泊松比。从（e）和（h）式可知

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y) = \frac{Ez}{(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{r_x}+\mu\frac{1}{r_y}\right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x) = \frac{Ez}{(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{r_y}+\mu\frac{1}{r_x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

这种垂直于微分体侧面的力称作正应力。正应力为拉力时规定为正，压力时为负。水平的剪应力值为

$$\tau_{xy}=G\gamma_{xy}=-2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=-2Gz\frac{1}{r_{xy}} \tag{1-2}$$

式中G为剪切模量。象梁的理论中任何地方垂直剪应力应等于水平剪应力的理由一样，考虑到此微分体沿z轴的力偶平衡，得

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$

图1-4所示σ_x、σ_y、τ_{xy}和τ_{yx}的方向皆表示正方向。而其正应力和水平剪力可依其厚度化为力偶，即在单位长度上的

$$\left.\begin{aligned}M_x&=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_x z dz\\ M_y&=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\sigma_y z dz\\ M_{xy}&=-\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\tau_{xy} z dz\end{aligned}\right\} \tag{i}$$

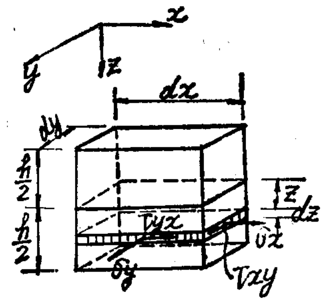

图 1-4

各项数量的正号方向，对于弯矩是能使板的下部产生拉应力或挠曲向下时为正；剪力则在微分体左侧而向上者为正，至于扭矩则规定在某侧面前视之，产生反钟向者为正。依次则可知$M_{xy}=-M_{yx}$。

将（1-1）和（1-2）式的结果代入（i）式，整理后得

$$\left.\begin{aligned}M_x&=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\frac{Ez^2}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{r_x}+\mu\frac{1}{r_y}\right)dz=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ M_y&=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\frac{Ez^2}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{r_y}+\mu\frac{1}{r_x}\right)dz=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

$$M_{xy}=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}2Gz^2\frac{1}{r_{xy}}dz=D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{1-4}$$

各式中$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$称为板的圆柱刚度或抗弯刚度。

在剪力方面，则

$$\left.\begin{aligned}Q_x&=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\tau_{xz}dz\\ Q_y&=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\tau_{yz}dz\end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

由上可知，这些弯矩、扭矩和剪力均是 x 和 y 的函数，所以在讨论此微分体的平衡时，必须考虑到这些微量的影响。若单位面积上的横向荷重用 p 表示，则在微分体面上的荷重为$pdxdy$；而根据平衡条件得（见图1-5）

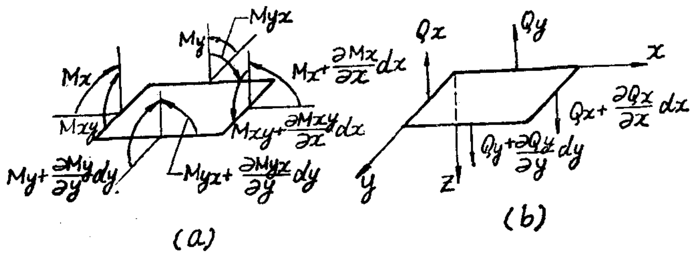

图 1-5

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+p=0 \qquad (1\text{-}6)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial M_y}{\partial y}+Q_y=0 \qquad (1\text{-}7)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial M_x}{\partial x}-Q_x=0 \qquad (1\text{-}8)$$

此时，从（1-7）、（1-8）和（1-4）式得

$$\left.\begin{aligned}Q_x&=-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ Q_y&=-D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}9)$$

在（1-6）、（1-7）和（1-8）式中消去Q_x及Q_y，且因$M_{xy}=-M_{yx}$，故得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}=-p \qquad (1\text{-}10)$$

将（1-3）及（1-4）式代入（1-10）式，最后得

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p}{D} \qquad (1\text{-}11)$$

此即受横向荷重时薄板的基本算式。对薄板振动时，必须将 $p(x,y)$ 代以

$$F(x,y,t)-\frac{\bar{q}_0}{g}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

此时，振动薄板的微分方程为[31]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{\bar{q}_0}{gD}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{1}{D}F(x,y,t) \qquad (1\text{-}12)$$

式中 $w(x,y,t)$——薄板振动时的振幅值；

$\bar{q}_0$——板的单位面积上重量❶；

$F(x,y,t)$——强迫振动载荷强度。

当板强迫振动时，如强迫频率与薄板的固有频率相等或接近时，则振幅及内力值等骤增，此即共振现象，这时必须计及阻尼。若采用复数阻尼理论[19][20]，则上式中板的弹性力项应乘以$(1+ir)$，而强迫荷载须写成复数形式如

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)(1+ir)+\frac{\bar{q}_0}{gD}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{1}{D}F(x,y)e^{i\theta t} \qquad (1\text{-}13)$$

边界条件——薄板的边界可为直线形，亦可为曲线形；其支承情形与梁相同，可有简支、固定、自由及弹性支承四种，欲求（1-12）或（1-13）式的解必须符合其边界条件。

❶ 此处所指板的单位面积上的重量，除 rh 板自重外，尚包括当计算板的自振频率或强迫振动时，板单位面积上所作用的静荷重。

若板的中面仍在xy面上，x和y轴平行于两边：

（一）在固定边上无挠度，且在此边上的切面必须与xy面重合，所以，若假定固定边在x轴上，用算式表示，即

$$(w)_{y=0}=0,\quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}=0 \tag{1-14}$$

（二）在简支边上无挠度亦无弯矩，所以，若简支边在y轴上

$$(w)_{x=0}=0,\quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0}=0 \tag{1-15}$$

（三）在自由边上，如图1-6的$x=a$边，无弯矩，无扭矩亦无垂直力，即

$$(M_x)_{x=a}=0,\ (M_{xy})_{x=a}=0,\ (Q_x)_{x=a}=0 \tag{j}$$

这三个条件是泊松提出来的，后来经克希霍夫（Kirchhoff.G）证明。将其后两个条件合并为一个，即扭矩和剪力可以组合为

$$V_x=\left(Q_x-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=a}=0 \tag{k}$$

将（1-4）和（1-9）式代入得

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]_{x=a}=0 \tag{1-16}$$

此外，在自由边上的弯矩为零的条件是

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a}=0 \tag{1-17}$$

从上述的扭矩转移，结合图1-6可知，不仅剪力分布于$x=a$边上，并且在该边的两末端产生两个集中力，如图1-7所示，它们的大小和M_{xy}相等（M_{xy}是单位长度上的扭矩，单位与力相同）。同样，在$y=b$边上，亦可得到分布于该边上的剪力及两个集中力M_{yx}。就是说，当一薄板在某种荷载情形下支承于四边时，不仅是有沿边分布的反力，且在角隅有集中的反力。

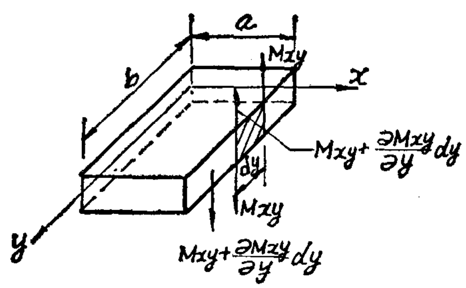

图 1-6

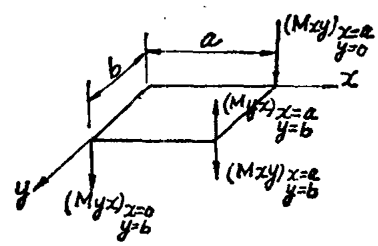

图 1-7

如图1-8为四边简支的方形板受均布荷载时中面的挠曲情形，图中虚线代表中面上与x和y轴平行的某一纤维的挠曲。此二挠曲线在近角隅A处沿x方向的$\frac{\partial w}{\partial x}$为负，且当$y$逐渐增大时，其绝对值反逐渐减小，所以$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$为正。从（1-4）式可知，在此角上$M_{xy}$为正，则$M_{yx}$为负。结合图1-8中的$M_{xy}$和$M_{yx}$的方向，得到在$A$点集中力皆向下。于是从对称关系可以肯定四角的集中反力大小相等，每一个集中反力

$$R=2(M_{xy})_{\substack{x=a\\y=a}}=2D(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=a}} \tag{1-18}$$

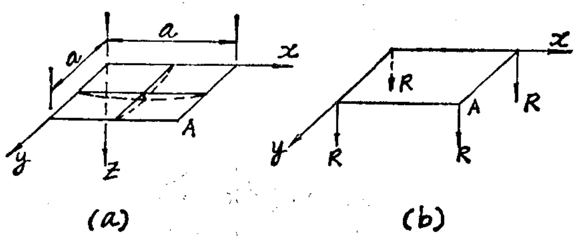

图 1-8

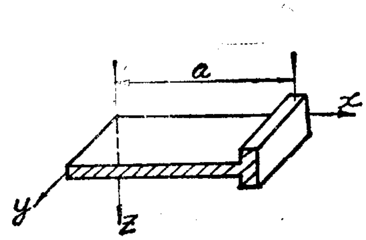

图 1-9

（四）在弹性支承边界上，如图1-9矩形板的$x=a$边与梁成为一整体，则在该边上的挠度不等于零，而等于边梁的挠度；同时，该边上切线的转角等于边梁的扭转量。用B表示边梁的抗挠刚度，C表示它的抗扭刚度，从板传递至边梁上在z方向的压力为

$$-V_x=-\left(Q_x-\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=a}$$

$$=D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=a} \tag{l}$$

边梁的挠曲偏微分方程为

$$B\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{x=a}=D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=a} \tag{1-19}$$

这是在弹性边梁上的第一个条件。

边梁在任何一截面上的扭转角是$-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a}$，沿边上的变化是$-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{x=a}$，所以在边梁中心的扭矩是$-C\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{x=a}$。此扭矩沿边界有所变化。因板与梁是一整体，所以连续地将扭矩传至梁上，此扭矩常与弯矩M_x的值相等但方向相反，因此

$$-C\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{x=a}=-(M_x)_{x=a} \tag{m}$$

或将（1-3）的M_x代入，得

$$-C\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)_{x=a}=D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} \tag{1-20}$$

这是在弹性边梁上的第二个条件。

从弹性理论中可知，薄板弯曲的势能公式为

$$dU=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})dxdydz \tag{n}$$

将变形分量（e）、（g）和应力分量值（1-1）、（1-2）代入上式后得

$$dU=\frac{1}{2}\left[\frac{Ez^2}{1-\mu^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{Ez^2}{1-\mu^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{2Ez^2}{1+\mu}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdydz$$

整个薄板的势能为

$$2U=\iiint\frac{Ez^2}{(1-\mu^2)}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(1-\mu)\times\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdydz \tag{o}$$

对于等厚度 h 的薄板

$$2U=D\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy \tag{1-21}$$

如果板上还作用着荷载$F(x,y,t)$，则

$$2U=D\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy-2\iint F(x,y,t)w\,dxdy \tag{1-22}$$

整个薄板的动能为

$$T=\frac{\bar{q}_0}{2g}\iint\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2dxdy \tag{1-23}$$

当薄板作某一主振动时，则有

$$w(x,y,t)=w_0(x,y)\sin(\omega t+\alpha)$$

对于这种振动，势能和动能的极大值分别为

$$U_{max}=\frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy \tag{1-24}$$

$$T_{max}=\frac{\bar{q}_0\omega^2}{2g}\iint w_0^2\,dxdy \tag{1-25}$$

§1-2 薄板自由振动的级数解

设四边支承的矩形薄板上作用有垂直于板面的横向荷载，板面上所有点都产生位移，使原来的平面变成曲面，如图1-10所示。突然卸去荷载，则板中不平衡的弹性内力必将立即作功，迅速恢复板的原有形状，组成薄板各个质点立即向着未变形时的平衡位置开始运动。由于惯性力，薄板中各个质点到达了平衡位置后并不停止，仍继续运动促使薄板形成相反方向的弯曲变形。由于相反方向的弹性内力的作用，薄板各个质点的运动速度逐渐减慢下来而趋于停止，这样反复的变形过程继续不断，便形成了薄板的振动。突然卸去荷载和突然施加荷载都会使薄板发生振动。由于薄板本身的弹性力引起的振动，称为薄板的自由振动。

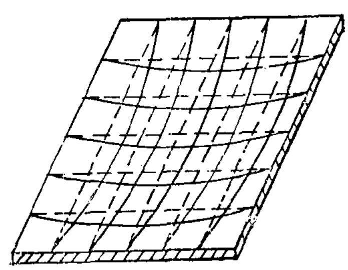

图 1-10

确定薄板的自振频率有级数法、能量法、变分法及数值解法等。本节主要利用级数法来求板的自振频率。

薄板自由振动的微分方程为

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{\bar{q}_0}{gD}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

上式可写为

$$\nabla^2(\nabla^2 w)+\frac{\bar{q}_0}{gD}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{1-26}$$

式中算子 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

在（1-26）式中的挠度 w 不但和质点的座标（x，y）有关，且和时间 t 有关，即

$$w=w(x,y,t) \tag{a}$$

由此，欲从（1-26）式中求得薄板振动时的位移 w，不但要使 w 满足板的边界条件，还要求 w 满足薄板振动的初始条件，即

当 $t=0$ 时

$$\left.\begin{aligned} w&=W_0(x,y)\\ \frac{\partial w}{\partial t}&=v_0(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

振动微分方程（1-26）的解，可使 w 表示成下列形式

$$w=(A\cos\omega t+B\sin\omega t)w_0(x,y) \tag{c}$$

式中 A、B——待求的常数，根据初始条件决定；

ω——板的固有频率；

式中函数 $w_0=w_0(x,y)$，称为本征函数，描述在满足边界条件时的薄板弯曲的基本形状。

将上式微分并代入（1-26）式，经整理后得

$$\nabla^2(\nabla^2 w_0)-\frac{\bar{q}_0\omega^2}{gD}w_0=0 \tag{1-27}$$

利用级数法求解薄板固有频率时，其情况可归纳如下：

若矩形薄板为四边简支时，则本征函数可用双正弦级数表示

$$w_0=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{d}$$

式中 C_{mn} 是未知的系数，这样的表达式满足板边所给定的边界条件，若将（d）式代入（1-27）中，可得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4-\frac{\bar{q}_0\omega^2}{gD}\right]$$
$$\times\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=0 \tag{e}$$

式中系数 C_{mn} 不等于零，故括号中的量必须为零，但因为括号中含有 ω_{mn} 项，故可求得四边简支矩形板的固有频率。

若矩形薄板在 $x=0$ 和 $x=a$ 处为简支，另二对边为任意支承时，则本征函数可用一单正弦级数表示

$$w_0=\sum_{m=1}^{\infty}f_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{f}$$

式中 $f_m(y)$ 只是变量 y 的函数。若将（f）式代入（1-27）式则可得

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left\{f_m''''-2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 f_m''+\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4-\frac{\bar{q}_0\omega^2}{gD}\right]f_m\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}=0 \tag{g}$$