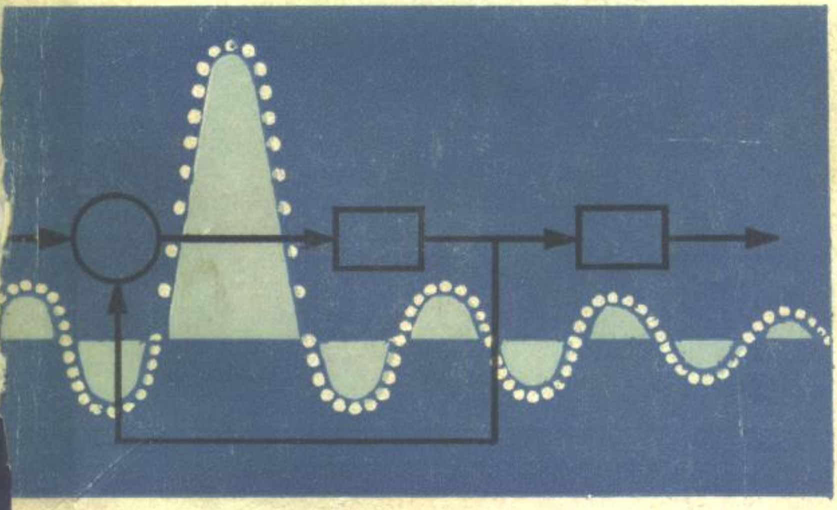
信号与系统
例题分析及习题

乐正友　　杨为理　　应启珩



清 华 大 学 出 版 社

信号与系统
例题分析及习题

乐正友　杨为理　应启珩

清华大学出版社

内 容 提 要

本书是在《信号与系统》（郑君里、杨为理、应启珩编）一书基础上编写的课外教材。全书共九章。第一章至第六章讨论连续信号与系统，第七章和第八章讨论离散信号与系统，第九章讨论系统的状态变量分析。

本书共选编典型例题99道，习题240道，其中绝大多数是《信号与系统》一书所没有的。书末附有习题答案。

本书可供无线电技术或自动化类有关专业的教师和学生使用，也可作为广大自学者学习“信号与系统”课程的辅导材料。

信号与系统例题分析及习题

乐正友　杨为理　应启珩

*

清华大学出版社出版

北京　　清华园

中国人民解放军第1201印刷厂排版

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

开本：850×1168 1/32　印张：15 3/4　字数：407千字

1985年6月第1版　　1985年6月第1次印刷

印数：00001～30,000

统一书号：15235·156　　定价：2.80元

前　言

"信号与系统"是无线电技术和自动化类专业的技术基础课。它的任务是研究确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本概念和基本分析方法，包括对于连续时间信号与系统和离散时间信号与系统的时间域分析和变换域分析，以及输入——输出描述和状态空间描述。

教学实践表明，学生在学习"信号与系统"课的过程中，需要借助各种典型的例题加深对本课程主要内容的理解，而做一定数量的习题则是掌握和巩固基本概念的有力手段。为此，我们在历年教学实践的基础上编写了本书。它可以作为"信号与系统"课程的课外教材供教师和学生参考，也可以作为广大自学者学习"信号与系统"课程的辅导材料。

本书共包括九章。第一章至第六章讨论连续信号与系统，第七章和第八章讨论离散信号与系统，第九章集中讨论连续系统与离散系统的状态变量分析。其结构、体系与《信号与系统》一书基本一致。

本书共选编例题99道，习题240道，其绝大部分与《信号与系统》一书不重复，并在内容上作了适当补充。其来源主要是历年教学中积累的习题、思考题和试题，以及近年来招考研究生的试题。其中既有概念题，又有证明题和运算题，也有实际应用题，力求体现"信号与系统"课程的主要内容和基本要求。在每章的开始都归纳了本章的重点，列出了本章的主要公式。书末附有习题答案。每章都选编了一些有代表性的例题，给出详细的解题步骤，对结果进行必要的分析，力图阐明本章的重点和基本分

析方法，并澄清某些易于出现的错误概念。为了培养学生综合解决问题的能力，本书除了在许多例题中给出多种解法外，还选编了部分难度较大、灵活性较强的综合习题。

本书经集体讨论，分工执笔。第一、二、四、五、七章由乐正友同志编写，第三、八章由杨为理同志编写，第六、九章由应启珩同志编写。郑君里同志审阅了部分书稿。樊月华同志校核了部分例题与习题答案。张尊侨同志绘制了部分插图。

由于我们的水平有限，难免有错误和不妥之处，热诚欢迎读者批评指正。

作　　者

一九八三年七月于清华

目　　录

第一章　绪　　论

公　式　摘　要

（一）　冲激信号$\delta(t)$的基本性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0) \tag{1-1}$$

$$\delta[-(t-t_0)]=\delta(t-t_0) \tag{1-2}$$

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1-3}$$

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{1-4}$$

$$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t) \tag{1-5}$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t) \tag{1-6}$$

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0) \tag{1-7}$$

$$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\delta(t-t_1-t_2) \tag{1-8}$$

（二）　冲激偶信号$\delta'(t)$的基本性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)dt=-f'(t_0) \tag{1-9}$$

$$\delta'[-(t-t_0)]=-\delta'(t-t_0) \tag{1-10}$$

$$\delta'(at)=\frac{1}{a^2}\delta'(t) \tag{1-11}$$

$$f(t)\delta'(t)=f(o)\delta'(t)-f'(o)\delta(t) \tag{1-12}$$

$$\frac{d\delta(t)}{dt}=\delta'(t) \tag{1-13}$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau)d\tau = \delta(t) \tag{1-14}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0 \tag{1-15}$$

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t) \tag{1-16}$$

（三） 信号$f(t)$分解为奇分量$f_o(t)$与偶分量$f_e(t)$之和

$$\begin{cases} f(t) = f_o(t) + f_e(t) \\ f_o(t) = \dfrac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \\ f_e(t) = \dfrac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \end{cases} \tag{1-17}$$

（四） 正交函数集

设n个函数$g_1(t)$，$g_2(t)$，……，$g_n(t)$在区间$[t_1, t_2]$内是正交函数集，则

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} g_i(t)g_j(t)dt = 0 \\ \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt = K_i \end{cases} \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n \tag{1-18}$$

设任一函数$f(t)$可由正交函数集$\{g_n(t)\}$在其正交区间$[t_1, t_2]$内的线性组合来近似，则

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^{n} c_i g_i(t) \tag{1-19}$$

系数

$$c_i = \frac{\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(t)g_i(t)dt}{\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt} \tag{1-20}$$

方均误差

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 K_i\right] \tag{1-21}$$

（五） 勒让德正交多项式$P_n(t)$

一组勒让德多项式$\{P_n(t)\}$($n=0, 1, 2, \cdots\cdots$)在区间$[-1, 1]$内构成一个完备正交函数集。其中

$$\begin{cases} P_n(t)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n] \\ P_0(t)=1 \\ P_1(t)=t \\ P_2(t)=\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{1}{2} \\ P_3(t)=\dfrac{5}{2}t^3-\dfrac{3}{2}t \\ \cdots\cdots \end{cases} \tag{1-22}$$

（六） 线性时不变因果系统特性

若线性时不变因果系统的激励信号是$e(t)$，响应为$r(t)$，则该系统具有下列特性：

叠加性与齐次性

$$c_1e_1(t)+c_2e_2(t)\longrightarrow c_1r_1(t)+c_2r_2(t) \tag{1-23}$$

时不变性

$$e(t-t_0)\longrightarrow r(t-t_0) \tag{1-24}$$

微分特性

$$\frac{de(t)}{dt}\longrightarrow\frac{dr(t)}{dt} \tag{1-25}$$

积分特性

$$\int_0^t e(\tau)d\tau\longrightarrow\int_0^t r(\tau)d\tau \tag{1-26}$$

因果性

$$若t<t_0时e(t)=0，则t<t_0时r(t)=0 \tag{1-27}$$

例题与习题要点

· 信号与波形

- 冲激信号的定义及其基本性质
- 信号运算及相应的波形变换
- 信号分解
- 函数的正交性与完备正交性
- 线性时不变系统特性的应用

例　　题

例 1-1　粗略绘出下列各函数式的波形图。

(1) $f_1(t)=(2-e^{-t})u(t)$

(2) $f_2(t)=(5e^{-t}-5e^{-3t})u(t)$

(3) $f_3(t)=e^{-t}\cos 10\pi t[u(t-1)-u(t-2)]$

(4) $f_4(t)=\left(1-\frac{|t|}{2}\right)[u(t+2)-u(t-2)]$

解

描绘信号波形是本课程的一项基本训练。在绘图时应注意信号的基本特性。对所绘出的波形，应标出信号的初值、终值及一些关键点的值，如极大值和极小值等。图 1-1 绘出了各函数的波形。

在(2)中，由于$f_2(t)$是连续函数，且$f_2(0)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty} f_2(t)=0$，所以 $f_2(t)$一定有极值，故应求出 $f_2(t)$的极值点。

将 $f_2(t)$微分

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f_2(t)]&=-5e^{-t}+15e^{-3t}\\&=5e^{-t}(3e^{-2t}-1)\end{aligned}$$

令$\frac{d}{dt}[f_2(t)]$为零，求得极值点位置

$$t=\frac{1}{2}\ln 3$$

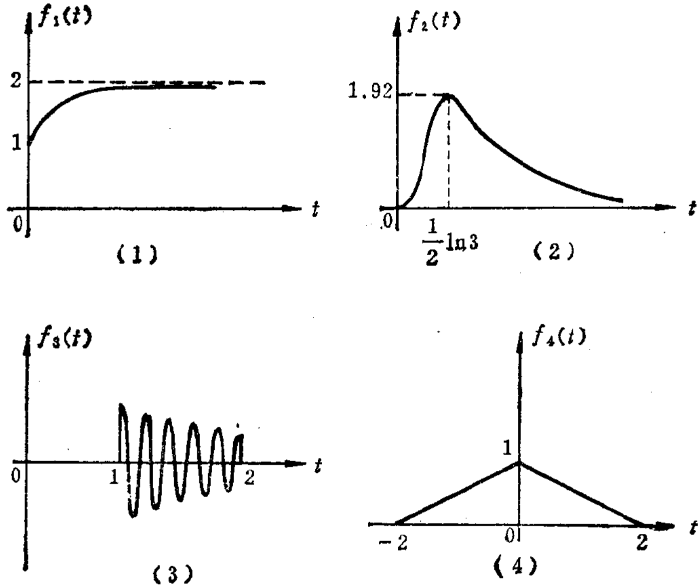


图　1-1

于是$f_2(t)$的极值为

$$f_2(t)\Big|_{t=\frac{1}{2}\ln 3}\simeq 1.92$$

在(3)中，由于$\cos 10\pi t$的周期为$\frac{1}{5}$，故$f_3(t)$在区间[1，2]内应有5个余弦波形。

例 1-2　粗略绘出下列各函数式的波形图。

(1)　$f_1(t)=u(t^2-1)$

(2)　$f_2(t)=\mathrm{sgn}(\sin \pi t)$

(3)　$f_3(t)=\frac{d}{dt}[e^{-t}\cos t\,u(t)]$

(4)　$f_4(t)=\int_0^t(1+\cos \pi\tau)[u(\tau)-u(\tau-2)]d\tau$

解

(1) 由于$u(t^2-1)=u[(t+1)(t-1)]$，据单位阶跃信号$u(t)$的特性可知，当$(t+1)(t-1)>0$时，$u(t^2-1)=1$，当$(t+1)(t-1)<0$时，$u(t^2-1)=0$，从而求得

$$u(t^2-1)=\begin{cases}1 & |t|>1\\ 0 & |t|<1\end{cases}$$

(2) 由于$\sin\pi t$是周期为 2 的周期信号，且

$$\sin\pi t\begin{cases}>0 & 0<t<1\\ <0 & 1<t<2\end{cases}$$

而符号函数$\text{sgn}(t)$的定义为

$$\text{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

因此，$\text{sgn}(\sin\pi t)$也是一周期信号，周期为 2。在[0，2]区间内，其值为

$$\text{sgn}(\sin\pi t)=\begin{cases}1 & 0<t<1\\ -1 & 1<t<2\end{cases}$$

(3) 此题中应注意冲激信号$\delta(t)$的性质

$$\frac{d}{dt}[u(t)]=\delta(t)$$

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

先将$f_3(t)$算出，然后再画图：

$$\begin{aligned}f_3(t)&=\frac{d}{dt}[e^{-t}\cos t\,u(t)]\\ &=(-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t)u(t)+e^{-t}\cos t\,\delta(t)\\ &=-e^{-t}(\cos t+\sin t)u(t)+\delta(t)\\ &=-\sqrt{2}\,e^{-t}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)u(t)+\delta(t)\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}f_4(t)&=\int_0^t(1+\cos\pi\tau)[u(\tau)-u(\tau-2)]d\tau\\ &=\int_0^t(1+\cos\pi\tau)u(\tau)d\tau\end{aligned}$$

$$-\int_0^t (1+\cos\pi\tau)u(\tau-2)d\tau$$

$$=\int_0^t (1+\cos\pi\tau)\ d\tau-\int_2^t (1+\cos\pi\tau)d\tau$$

$$=\left(t+\frac{1}{\pi}\ \sin\pi t\right)u(t)$$

$$-\left(t+\frac{1}{\pi}\ \sin\pi t-2\right)u(t-2)$$

$$=\begin{cases} t+\dfrac{1}{\pi}\sin\pi t & 0<t<2 \\ 2 & t\geqslant 2 \end{cases}$$

在计算中，当 $f_4(t)$分成两项积分后，应注意积分函数的存在区间。根据阶跃信号 $u(\tau)$、$u(\tau-2)$的特性，第一项积分应有 $0\leqslant\tau\leqslant t$，而第二项积分应有 $2\leqslant\tau\leqslant t$，于是，第一项积分函数和第二项积分函数应分别在 $t<0$ 和 $t<2$ 时为零，故积分结果应分别带有 $u(t)$和 $u(t-2)$。

各波形如图1-2所示。

如果函数 $f(t)$在 $t=0$ 点有跳变，则规定 $f(t)$在此点的函数值为

$$f(0)=\frac{1}{2}[f(0^-)+f(0^+)]$$

因此$u(t)$、$\mathrm{sgn}(t)$应表示为

$$u(t)=\begin{cases} 1 & t>0 \\ \dfrac{1}{2} & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t=0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

例1-3 求下列函数值

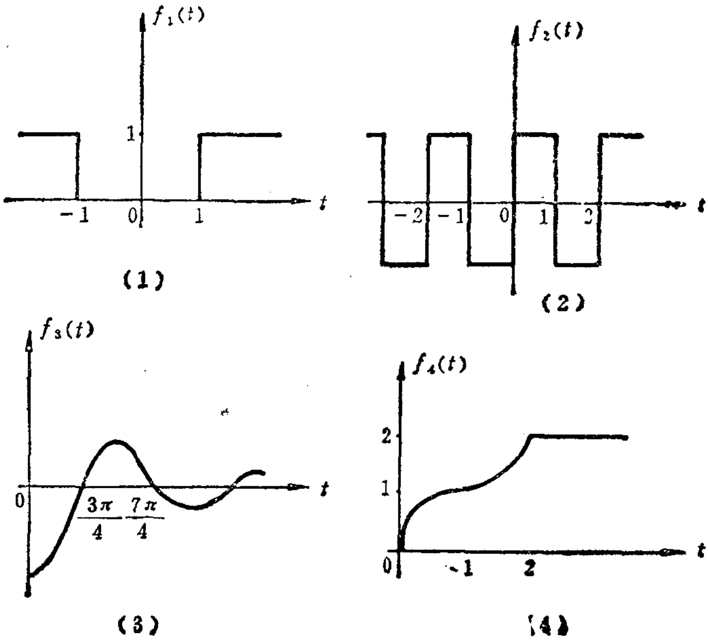


图 1-2

(1) $f(t)=e^{-3t-1}\delta(t)$

(2) $f(t)=2u(4t-4)\delta(t-1)$

(3) $f(t)=\dfrac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t)]$

(4) $f(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}\delta'(\tau)d\tau$

(5) $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t^2-4)dt$

(6) $f(t)=\int_{-1}^{1}\delta(t^2-4)dt$

解

冲激函数是一类应用广泛的重要函数。在卷积运算、傅里叶变换及系统分析中，利用它可以简化许多结论的导出。冲激函数$\delta(t)$有三种定义方法，这里分别作一些简单讨论。