〔美〕A. 鲁滨逊 著

非标准分析

科学出版社

非标准分析

〔美〕A. 鲁滨逊 著

申又枨 王世强 张锦文 等译

科学出版社

1980

内 容 简 介

本书介绍作者在六十年代初建立的非标准分析理论及其在数学各个分支的应用.

第一章为引言;第二章介绍非标准分析的数理逻辑的形式工具;第三章阐述非标准分析数学结构的基本性质并运用这个理论展开了微积分学;第四章用非标准的理论重建拓扑学的各种基本概念;第五章至第九章为非标准分析的结构应用于实、复变函数、线性赋范空间、拓扑群和变分法等方面的内容;第十章介绍有关微积分学的历史.

本书可供高等学校数学系师生和科学研究工作者阅读.

A. Robinson

NON-STANDARD ANALYSIS

North-Holland Publishing Company, 1974

非 标 准 分 析

〔美〕A. 鲁滨逊 著

申又枨 王世强 张锦文 等译

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1980 年 9 月第 一 版　开本：787×1092 1/32

1980 年 9 月第一次印刷　印张：10 3/4

印数：0001—5,420　字数：242,000

统一书号：13031·1267

本社书号：1762·13—1

定价： 1.65 元

中译本前言

几年前，为了考察微积分发展史、了解非标准分析的发展过程，我译了本书第十章：关于微积分的历史．同时，王世强等同志译了本书的第一至三章，王世强、张锦文等同志在有关讨论班上分别报告过第二、三章有关非标准分析的数理逻辑方法．后来，一些同志建议把全书译成中文，出版中译本．张锦文同志承担了有关组织工作．

参加本书翻译工作的有王世强（第二章 §§2.6—2.12），张锦文（第六章），孙永生（第三、五章），廖祖伟（第九章），袁萌（第七、八章），吴望名（第一章及第二章 §§2.1—2.5）和程汉生（第四章）等同志，第十章我在原译文基础上又作了些修改．全书最后由王世强、张锦文二同志校对并作了些文字统一工作．

鉴于我们水平低，错误缺点难免，欢迎批评指正．

申又枨

1978.3.23.

前　　言

1960年秋，我想到了现代数理逻辑的概念和方法能够为运用无限小和无限大的数来叙述微积分学提供一个合适的框架．我先是在普林斯顿大学（1960年11月）的一个讨论班的报告中报告了我的想法．随后又在符号逻辑学会（1961年1月）年会的一次发言中，以及在一篇刊登在阿姆斯特丹皇家科学院院报的文章（Robinson [1961]）中，相继发表了我的想法．我把所得到这一课题叫做非标准分析，因为它包含有所谓算术的非标准模型，并且部分地是受到了后者的启发．算术的非标准模型的存在，首先是 T. Skolem 提出来的．

这些年来，非标准分析在若干方向上有了相当大的发展．因为直到目前为止，许多结果仅仅是在课程、讲义和复写的报告中提出来了，所以想到，专门为这一课题写一本书是适宜的．

几年来，在这个领域中，通过同一些同行们的讨论，活跃了我的思路．这里我想冒昧地提到的有：R. Arens，C. C. Chang，A. Erdelyi，A. Horn，G. Kreisel，I. Lakatos 以及 J. B. Rosser．特别要对 W. A. J. Luxemburg 表示感谢，他的关于非标准分析的演讲和讲义，对于使数学家们知道这一课题起了很大的作用．

A. 鲁滨逊

1965年4月

第 二 版 序

本书第一版出版后已经七年了．若从它的课题问世算起则已经过去将近两倍长的年月了．现在有必要出版新版本这一事实，表明这里所阐述的思想吸引了人们相当的注意．至少可以说，这个课题本身的意义和它的历史联系，迄今已广泛地为人们所重视．除此以外，在最近的数学文献中，有许多论文的内容包括了非标准分析对诸如代数数论和数理经济学这样相距甚远的领域中一些现代问题的应用．特别是，感兴趣的读者可能希望参阅近几年来在这个领域中所举行的几次讨论会的会议录．它们包含在下列书中：W. A. J. Luxemburg 编辑的《模型论在代数学、分析和概率论中的应用》（Holt, Rinehart and Winston, Toronto, 1969）；W. A. J. Luxemburg 和 A. Robinson 编辑的《非标准分析文集》，“数学基础和逻辑的研究”丛书第 69 卷（North-Holland, Amsterdam, 1972）；和 1972 年春天在加拿大 Victoria 大学举行的非标准分析讨论会的会议录，该会议录将发表在 Springer-Verlag 的《数学讲义》丛刊[1]．

虽然有一天情况可能会发生变化，我们目前所推荐的非标准方法，对于普遍接受的数学原理（例如包括选择公理的 Zermelo-Fraenkel 公理）来说，还是比较保守的．这意味着非标准的证明总可以由标准的证明来代替，即使后者可能更复杂一些并且更缺少直观性．所以，作者采取这样的观点：非

1）已作为该丛刊第 369 卷出版．——译者注

标准分析对一特殊数学学科的应用只是一个选择问题，自然，每个人实际上怎样取舍是依赖于他早年所受的训练的.

1973 年 3 月，我在普林斯顿高等研究所作报告之后，K. Gödel 说的一段话表述了更加明确的意见. 在他的善意许可之下，我在这里把他的这段话再重复一下.

"我愿意指出一个事实. 这个事实，A. Robinson 教授并没有明确地提出来，但在我看来是非常重要的；即非标准分析不仅常常可以把初等定理的证明，而且也能够将一些深刻结果的证明大大地加以简化. 例如，对于紧致算子存在不变子空间的证明就是这样，暂且不说对结论的改进；在其他一些情况，甚至在更大的程度上是这样. 这种情况应能防止对非标准分析的相当普遍的误解，即认为非标准分析不过是数理逻辑家们的一种多余的活动或一时的爱好，没有什么比这种观点更错误的了. 相反地，我们有充分的理由相信，以这种或那种形式表示的非标准分析，将成为未来的分析学.

一个理由是刚才提到的简化证明的问题，因为简化将有助于新的发现. 另一个甚至更加令人信服的理由是：算术从整数开始进而通过有理数、负数、无理数等等把数系扩大. 但是，在实数之后，下一个十分自然的步骤，即引入无限小，竟被完全忽略了. 我认为，在未来的世纪里，人们将会把这看作是数学发展史上的一件大怪事，就是在发明了微积分三百年之后，第一个精确的无限小理论才发展起来. 我倾向于相信，这件怪事同另一个存在于同一长时间的怪事有点联系，这另一件怪事就是有些问题例如 Fermat 问题，它只用初等算术的十个符号就能写出来，但是，在提出了问题三百年之后，仍然未能加以解决. 上面提到的疏忽也许要对以下的事实负有很大的责任：比起抽象数学的巨大发展来说，具体的数值问题的解决是远远地落后了."

我极为感谢 Peter Winkler，他改正了本书第一版中出现的很多印刷错误，并且补上了第八章定理 8.1.12 原来陈述中的一个漏洞。

A. 鲁滨逊

1973 年 10 月

目　　录

第一章　引　　言

1.1　本书目的

在称为分析的这个数学分支中，奠基的基本概念是极限概念．导数与积分，无限级数的和以及函数的连续性都是用极限来定义的．例如，令 $f(x)$ 是定义在开区间 $(0, 1)$ 内的所有的 x 的一个实值函数，并且令 x_0 是属于该区间的一个数．那么实数 a 是 $f(x)$ 在 x_0 的导数，记作

$$1.1.1 \qquad f'(x_0) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = a,$$

如果下面式子成立的话:

$$1.1.2 \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a.$$

假如我们问一个训练有素的数学家关于 1.1.2. 的含义是什么，那么除了一些非本质差别和术语不同(如利用某些拓扑概念)外，他的解释将会是这样的:

对任何正数 ε，存在一个正数 δ，能使 $(0, 1)$ 内的适合 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x，都有

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a\right| < \varepsilon.$$

现在我们再问是否我们的数学家不能接受关于 1.1.1 和 1.1.2 如下更直接的解释:

对 $f(x)$ 的定义区间内的任何 x，若 $dx = x - x_0$ 无限接近于 0 但不等于 0，则比值 $\dfrac{df}{dx}$ 无限接近于 a，其中

$$df = f(x) - f(x_0).$$

对于这个问题我们可以期望的回答是：这个定义在表现形式上或许是较简单的，但不幸的是它也没有意义．如果我们试图再解释说所谓两数相互无限接近是指它们的距离（它们的差的模)是无限地小，即小于任何正数，我们或许会遭到反驳，说这仅仅在两数相同时才有可能．并且我们会听到慷慨陈词，说这显然不是我们的本意，因为这种说法会使我们的解释产生不言而喻的错误．

然而，不顾这种粉碎性的反驳，无限地小或无限小量的思想看来很自然地吸引我们的直观．无论如何，在微积分学的形成阶段无限小是被广泛运用的．正因为有上面引用的反对言论，说两个不同实数之间的距离不可能是无限地小，G. W. Leibniz 才论证了无限小理论包含理想数的引入，它与实数比较可以是无限地小或无限地大，但它也具有和实数同样的性质．然而，Leibniz 和他的弟子及后继者都没有能够给以一个合理的发展来导出这样一个系统．结果是无限小理论逐渐名声扫地而最终被经典的极限理论所取代．

本书证明了 Leibniz 的思想能够全面维护，并且它对经典分析和许多其他数学分支开辟一条新奇和富饶的研究途径．我们方法的关键是对数学语言和数学结构之间的关系进行细致分析，这种方法是现代模型论的基础．

1.2 内容概述

本书计划如下．在第二章我们描述了来自数理逻辑的形式工具，它是为后来的叙述所需要的．我们的讨论涉及到一阶和高阶理论并包括有限性原理（紧致性定理）的一个证明．这个原理对我们的研究是十分重要的．

在第三章我们阐述了作为非标准算术和非标准分析框架

的数学结构的基本性质，证明这些结构为无限小理论提供了一个合适的基础，并运用这个理论展开了微积分学初步．接着我们引入一阶和高阶微分并应用于经典微分几何中的某些简单问题．诚然，这些微分是无限小，如同在欧洲大陆出版的微积分早期课本（如 l'Hospital 的《无限小分析》）中所朴素地采用过的那样．因而在剔除了某些明显的并常常受到攻击的不协调性之后，这些课本中所运用的方法就能建立在坚实的基础上．

在第四章我们证明无限小理论具有一个推广形式，它可应用于(非度量的)拓扑空间．在这个理论中我们重建拓扑学的各种基本概念．特别是得到了紧致空间的一个引人注意的特征，它有一些应用．

第五章讨论实变函数，用非标准分析的术语定义了 Lebesgue 测度，并在此框架中证明了一些标准分析的定理．接着讨论了 Schwartz 分布论． 按我们的途径对这些广义函数给出一个具体的实现，特别是对分布的局部值概念的讨论提供了有效的方法．

在第六章中，我们论述复变函数的非标准理论． 详细讨论的应用领域有：(i) 多项式的解析理论，讨论复区域内多项式零点的位置．(ii) 整函数奇点的理论，包括 Picard 定理和 Julia 方向．然而，更有意义的是我们的理论以一种很自然的方式给出某些广义函数代替了正规族理论．

第七章探讨线性赋范空间论，在几个方向上论述了紧致算子的非标准理论． 特别是证明了 Hilbert 空间中有紧致平方的线性算子具有一个非平凡的不变子空间．值得指出的是这里给出的分析是这一结果的首次证明，它解决了由 K. T. Smith 和 P. R. Halmos 提出的一个问题(见 Bernstein 和 Robinson [1966])．这一理论在讨论谱分析方面也有应用．

在第八章中，我们考察拓扑群，特别是 Lie 群. 在我们的理论中，一个群的单位元的无限小邻域是实际存在的并且组成一个群. 对于给定的拓扑群或 Lie 群而言这个群体现了无限小群的直观概念. 它可以和这一理论的标准概念联系起来.

第九章包括在非标准分析的框架内将变分原理应用于若干数学问题. 特别是我们修改了 Riemann 映象定理的经典证明以及位势理论中的 Dirichlet 积分方法. 接着我们考察流体动力学中的若干课题. 凭借无限小解释了边界层理论的基本概念. 我们还给出弹性理论中的 de Saint-Venant 原理的另一种表达形式. 最后，对于 de Saint-Venant 原理本身也在非标准分析的框架内作了合理的解释.

最后一章对微积分学历史中与无限小理论有关的若干阶段作了评述. 由于在这一领域中的近代作者们认为无限小理论是不能有效地建立起来的，这就影响到他们对历史的评价. 因此，有必要纠正这种见解.

人们自然会问：一个非标准方法（这里所说的非标准一词有专门的含义，也就是说，一个非标准分析的方法）是否总能被一个标准的数学证明所代替. 这样提问题的人是把数理逻辑方法看作是在普通数学方法之外的，而为了我们现在的目的我们可以同意这样的区分在实践中是有意义的. 对这个问题的回答是：在每个具体情况下用超幂的方法将一个非标准的证明翻译为一个标准的数学证明是可以的. 然而，这样做往往会使证明变得复杂得多，因此从启发式（heuristic）观点看这种转换也是不足取的. 另外也可能独立地得到一个较短的数学证明.

在最近一百五十年中无限小理论的发展几乎是停滞不前的，而同一时期中在经典的方法上却投入了大量的努力与智

慧. 然而我们相信本书已说明了这样一点：虽然经典方法已经到了成熟时期，但不论是在对旧理论赋予新看法方面还是在探索新结果方面，非标准方法仍能有效地补充标准方法. 我们希望在本书已涉及或未涉及的各分支的专家们，将考虑如何运用非标准方法到他们的研究领域中去，他们将会发现有时若不经过一番努力，一个经典理论恰当的非标准解释是不易得到的. 但一旦得到了，对理论的重建和发展就可能是一番有收获的体验.

人们可以期望现代物理的某些分支，特别是令人头痛的发散问题，可能从非标准分析中得到益处. 虽然本书只包含了将非标准方法应用于经典的应用数学，但这件事只是说明作者的局限而不是方法的局限.

第二章 逻 辑 工 具

2.1 狭义谓词演算

在这一章中我们向读者介绍一些形式体系，它们对以后各章有重要的作用．本章在写法上使读者只要有数理逻辑和抽象集论的初步知识就能阅读．

我们来描述狭义或一阶谓词演算的语言．除去一些次要的变化，可以说这是数理逻辑的基本形式体系．

一个一阶语言 L 是如下定义的．

L 的原子符号是：

(i) 个体对象符号，或称个体常项，通常用小写英文斜体字母来表示，可以带也可以不带附标或撇，如 a, b', c_n^m，有时，为了与通常用法一致，还包括其它的符号如数目字 0，1，2，…．个体常项集是任意但取定的(通常是超限的)．

(ii) (个体)变量，x，y'，z_{kl}（英文字母表最后几个小写斜体字母，带或不带附标或撇，等等)．它们的个数是无限但可数的．

(iii) n 元关系符号，$n \geq 1$，$S(\ )$，$R(\ ,\ ,\ )$，这里 n 表示括号内空位置的个数．关系符号集是任意但取定的，并且可以是超限的．(阶 $n = 0$ 的关系符号不需要，为便于理解，在此剔除．)

(iv) 连接符号(或称连接词)，$\neg$(非)，$\vee$(析取)，$\wedge$(合取)，$\supset$(蕴涵)，$\equiv$(等价)．

(v) 量词，$(\exists)$——存在量词，$(\forall)$——全称量词．