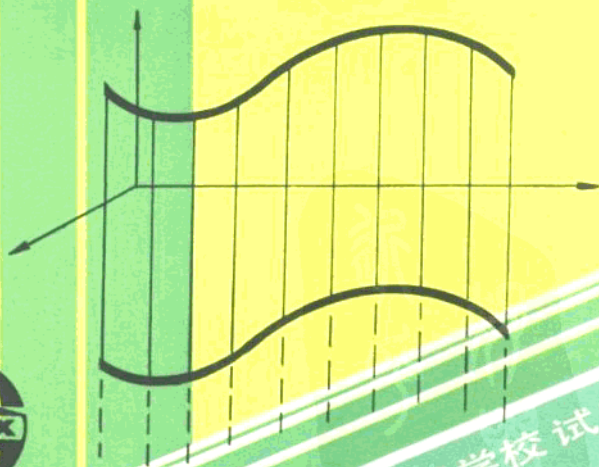


应用数学基础

姚允龙 黄午阳 编著



职工高等学校试用教材

PDG

57.9

10

职工高等学校试用教材

应用数学基础

姚允龙 编著
黄午阳

上海科学技术文献出版社

职工高等学校试用教材

应用数学基础

姚允龙 黄午阳 编著

*

上海科学技术文献出版社出版
(上海市武康路2号)

新华书店上海发行所发行
上海商务印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 15.5 字数 416,000

1986年8月第1版 1986年8月第1次印刷

印数: 1—8,000

书号: 13192·88 定价: 3.40 元

《科技新书目》120-206

前 言

随着工程技术的发展,数学特别是应用数学获得了日益广泛的应用。对于工科院校的学生来说,如按传统教材那样去学有关的数学内容势必耗费大量时间,这完全是没有必要的。因为工科学生学数学的目的主要在于应用,而不是去搞数学理论的研究。基于这一出发点,我们认为可对传统教材的体系及内容作较大的更动,以使学生在一年时间内学完微积分、常微分方程、级数、线性代数、概率论、线性规划等基础内容。《应用数学基础》一书正是为了达到上述目的而编写的一本教材。

该书与传统教材相比具有以下特点:

1. 利用二次函数的最值问题引出导数及一些简单的求导公式。
2. 将导数直接定义为切线的斜率。
3. 对极限理论作了简化处理。
4. 将定积分直接定义为面积,并把广义积分作为它的特例来处理。
5. 在线性代数中突出了矩阵及其有关运算。
6. 对概率的计算作了简化处理。

我们认为,对于工科院校以及不是专门从事数学理论研究的同志来说,本书的处理方法还是可行的。在编写本书的过程中,曾得到许多同志的热情鼓励 and 大力支持,在此向他们表示衷心感谢。我们恳切地希望同志们多提宝贵意见以使本书不断完善。

编 者

目 录

前言	1
第一章 一元微分学	1
§ 1 函数与自变量	1
§ 2 最值与导数	9
§ 3 导数的几何意义	19
§ 4 求导法	30
§ 5 极限与连续性	41
§ 6 导数的一些应用	51
§ 7 罗必达法则	64
第二章 积分学	69
§ 1 不定积分	69
§ 2 定积分与牛顿·莱布尼兹公式	73
§ 3 积分的变量代换法	86
§ 4 若干常见可积类	98
§ 5 积分的应用举例	106
第三章 空间解析几何	116
§ 1 空间直角坐标系	116
§ 2 曲面	120
§ 3 向量代数	125
§ 4 向量代数(续)	130
§ 5 平面	135
§ 6 空间直线	138
§ 7 空间曲线	141
第四章 多元微分学	146
§ 1 多元函数求导	146

§ 2	多元函数的最值	151
§ 3	拉格朗日乘子法	158
§ 4	二重积分	162
第五章	无穷级数	171
§ 1	无穷级数	171
§ 2	幂级数与初等函数的计算	176
第六章	常微分方程	184
§ 1	常微分方程的初等解法	184
§ 2	线性常系数微分方程	192
§ 3	齐次方程的通解	204
第七章	线性代数	212
§ 1	矩阵	212
§ 2	矩阵(续)	237
§ 3	初等变换	259
§ 4	n 维欧氏空间 R^n	275
§ 5	行列式	291
§ 6	方阵的对角化	298
第八章	概率论	315
§ 1	概率空间	315
§ 2	事件与事件的运算	322
§ 3	概率树法	331
§ 4	独立性与二项分布	343
§ 5	随机变量及其数字特征	351
§ 6	正态变量	360
§ 7	多元随机变量	369
§ 8	求分布函数的例子	381
§ 9*	独立随机变量和的极限分布	384
§ 10*	马尔柯夫链	389
第九章	拉普拉斯变换	400
§ 1	拉普拉斯变换	400

§ 2	拉普拉斯变换的其他公式	410
§ 3	脉冲的拉普拉斯变换	415
第十章	曲线曲面积分	422
§ 1	曲线积分	422
§ 2	格林公式	430
§ 3	曲面的法向、切平面及面积	435
§ 4	曲面积分	439
第十一章	线性规划	450
§ 1	线性规划的提出	450
§ 2	标准线性规划	454
§ 3	单纯形法	462
§ 4	大 M 法	474
附表 1	泊松分布的数值表	479
附表 2	正态分布密度函数及分布函数的数值表	482

第一章 一元微分学

§1 函数与自变量

函数概念是大家熟悉的概念,譬如

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1.1.1)$$

$$y = \sin x \quad (1.1.2)$$

$$y = \frac{x}{1+x} \quad (1.1.3)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (1.1.4)$$

都是函数的例子。这些例子中的 x 是自变量, y 是 x 的函数(也称为因变量)。而在例子

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

中,自变量是 t , 函数是 x 。记号 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=y(x)$, $y=h(x)$, $x=x(t)$ 等等都是表示函数。在记号 $y=f(x)$ 中, 自变量是 x , 而 y 是 x 的函数。但在记号 $x=x(t)$ 中, 自变量是 t , 而 x 是 t 的函数。

若 $y=f(x)$ 中, x 用一个数 x_0 (或一个公式) 代入, 可得一个数 $f(x_0)$ (或一个新式子)。譬如对 $f(x)=x^2$, 有 $f(0)=0^2=0$, $f(2)=-2^2=-4$, $f(-1)=(-1)^2=1$, $f(t)=t^2$, $f(\sin t)=\sin^2 t$, $f\left(\frac{1}{u}\right)=-\left(\frac{1}{u}\right)^2=-\frac{1}{u^2}$, $f(f(x))=(f(x))^2=(x^2)^2=x^4$ 等等。

练习题

1) 设 $f(x)=x^2+x+1$, 求 $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(t)$, $f\left(\frac{2}{x}\right)$, $f(u+v)$ 。

2) 设 $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$, 求 $x^2(t)+y^2(t)$, $x(t)y(t)$,

$y(t)/x(t)$, $y(x(t))$, $f(x(t))+f(-y(t))$ (f 同第一题)。

【答案 1) $f(1)=3$, $f(-1)=f(0)=1$, $f(t)=t^2+t+1$,
 $f\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(4+2x+x^2)$, $f(u+v)=(u+v)^2+(u+v)+1$; 2) $x^2(t)$
 $+y^2(t)=1$, $x(t)y(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$, $y(t)/x(t)=\operatorname{tg} t$, $y(x(t))=\sin(\cos t)$, $f(x(t))+f(-y(t))=3+\cos t-\sin t$ 。】

使函数有意义的自变量取值范围叫该函数的定义域。譬如(1.1.3)式,分母不能为零,故它的定义域是 $x+1\neq 0$,即 $x\neq -1$ 。为了表示各种函数的定义域,使用区间记号 (a, b) , $[a, b]$ 等等是方便的:

(a, b) 表示满足 $a < x < b$ 的数 x 全体,读成开区间 a 到 b ;

$[a, b]$ 表示满足 $a \leq x \leq b$ 的数 x 全体,读成闭区间 a 到 b 。

譬如,开区间 $(0, 1)$ 表示大于零小于1的数的全体,而闭区间 $[0, 1]$ 则表示大于等于零小于等于1的数的全体,因此闭区间 $[0, 1]$ 比开区间 $(0, 1)$ 多了0与1两个端点。

此外 $(a, b]$ 表示 $a < x \leq b$; $[a, b)$ 表示 $a \leq x < b$,分别读成半开闭区间 a 到 b ,半闭开区间 a 到 b 。

例1 求函数 $y=\sqrt{x}+1/\sqrt{1-x}$ 的定义域。

解 $\sqrt{x}$ 要求 $x \geq 0$ 。而 $\sqrt{1-x}$ 要求 $1-x \geq 0$ 即 $x \leq 1$,但分母要求不等于零,故 $x < 1$ 。最后得定义域是闭开区间 $[0, 1)$ 。

易见函数(1.1.1)式的定义域是全直线,记为 $(-\infty, +\infty)$,读作从负无穷大到正无穷大。不难想到满足 $x > 0$ 的 x 全体应记为 $(0, +\infty)$,读作开区间0到正无穷大。类似地可知 $[0, +\infty)$, $(-\infty, a)$ 等等记号的含义。

练习题

1) 在数轴上表出 $[-1, 1]$; $[2, +\infty)$; $(-\infty, -3)$;

2) 指出 $[0, +\infty)$ 与 $(0, +\infty)$ 的区别;

3) 求函数(1.1.2)与(1.1.4)的定义域。

【答案 1) 见图1.1-1; 2) $[0, +\infty)$ 比 $(0, +\infty)$ 多了一点0; 3) $(-\infty, +\infty)$ 及 $(0, 1)$ 。】

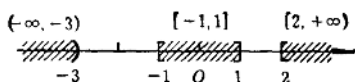


图 1.1-1

区间是比较简单的集合。还会遇到更为丰富多采的集合，这时可采用条件法来指明这些集合，例如

$$A = \{n | n \text{ 是自然数}\}$$

表示了自然数 $n=1, 2, \dots$ 所组成的集合， n 叫该集合的元素，一般用条件法来指明集合时，总是用大括号 $\{\dots\}$ ，在一竖线之后表示条件。又如集合

$$A = \{ \text{人} | \underbrace{\text{年龄} \leq 30 \text{ 岁}}_{\text{条件}} \}$$

表示了年龄不大于 30 岁的人的全体，其中“人”是该集合的元素。如果 x 是集合 A 的元素，则可记为 $x \in A$ ，读成 x 属于 A 。譬如

$$\frac{1}{2} \in [0, 1], 10 \in \{n | n \text{ 是自然数}\}$$

在 x 不是集合 A 的元素时，则记为 $x \notin A$ ，读成 x 不属于 A ，譬如

$$-1 \notin [0, 1], \frac{4}{3} \notin [0, 1], 10.5 \notin \{n | n \text{ 是自然数}\}$$

使用“ $\in$ ”与“ $\notin$ ”记号必须一头是元素，另一头是集合：

$$\begin{array}{ccc} x \in A & x \notin A \\ \text{元素} & \text{集合} & \text{元素} & \text{集合} \end{array}$$

有时两个集合可比较大小，譬如 $[0, 2]$ 比 $[0, 1]$ 大，这时可记为

$$\begin{array}{ccccccc} [0, 1] \subset [0, 2] & \text{或} & [0, 2] \supset [0, 1] \\ \text{小} & & \text{大} & & \text{大} & & \text{小} \end{array}$$

记号“ $\subset$ ”称为“包含于”，如 $[0, 1]$ 包含于 $[0, 2]$ ，而 $[0, 2]$ 包含 $[0, 1]$ 。又如

$$\begin{aligned} \{ \text{人} | \text{年龄} \leq 30 \text{ 岁} \} &\subset \{ \text{人} | \text{年龄} \leq 100 \text{ 岁} \} \\ \{ n | n \text{ 是偶数} \} &\subset \{ n | n \text{ 是自然数} \} \end{aligned}$$

等等。注意包含记号“ $\subset$ ”只能用在集合比较之中：

$$A \subset B$$

集合 集合

练习题

下面的用法中哪些是对的，哪些是不对的（不对的请改正）：

$$0 \in (-1, 1); 0 \in (0, 1); \frac{1}{2} \subset [0, 3]; -1 \notin [-1, 0];$$

$$(0, 1) \subset [0, 1]; (0, 2) \subset (-\infty, +\infty); (-1, 1) \in [-2, 2]$$

【答案 对；不对， $0 \notin (0, 1)$ ；不对， $\frac{1}{2} \in [0, 3]$ ；不对， $-1 \in [-1, 0]$ ；对；对；不对， $(-1, 1) \subset [-2, 2]$ 。】

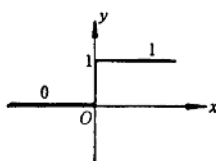


图 1.1-2

不要以为函数只能由一个公式来表示。实际上许多函数是用分段形式来表示的。譬如(图 1.1-2)

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

是个典型的分段函数，它在 $x \geq 0$ 时取值为 1，在 $x < 0$ 时取值为 0。于是有 $f(0) = 1$ ， $f(1) = 1$ ， $f(-1) = 0$ 等等。

练习题

1) 已知分段函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

求 $F(-10)$ ； $F(-\frac{1}{2})$ ； $F(0)$ ； $F(1)$ ； $F(100)$ ； $F(F(x))$ ，并作 $F(x)$ 的图形；

2) 写出绝对值函数 $y = |x|$ 的分段表示式。

【答案 1) $F(-10) = F(-\frac{1}{2}) = F(0) = 0$ ； $F(1) = 1$ ； $F(100) = 100$ ； $F(F(x)) = F(x)$ ，图 1.1-3(a)；2) 由图 1.1-3(b) 知

$$|x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

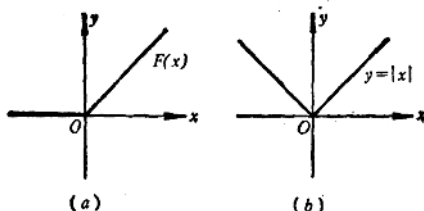


图 1.1-3

例 2 设个人月收入小于 a 元时免税。大于 a 元时，超过部分按 $k\%$ 加税，写出月收入 x 与应交税 y 之间的函数分段表示式。

解 在 $x \leq a$ 时， $y = 0$ 。在 $x > a$ 时，超过 a 元部分 $x - a$ 中应交 $(x - a) \cdot k\% = \frac{k}{100}(x - a)$ 的税，故

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{k}{100}(x - a), & x > a \end{cases}$$

在许多问题中，自变量不止一个。例如 $z = x + y + 1$ ， $z = x / \sqrt{x^2 + y^2}$ 等等中，自变量有 x, y 两个。有两个自变量的函数叫二元函数，类似地有三个自变量的函数叫三元函数，等等。二元函数可记成 $z = F(x, y)$ ，自然其中字母可改用任何其它字母。譬如 $F(x, y) = x + y - 1$ ， $G(t, s) = t^2 + s^2 - 1$ ， $w(u, v) = u / \sqrt{u^2 + v^2}$ 等等。三元及多元函数也有类似的记号。

练习题

1) 设 $F(x, y) = x + y - 1$ ，求 $F(0, 0)$ ， $F(1, 0)$ ， $F(1, 2)$ ， $F(t, t)$ ， $F(x, -1)$ ；

2) $w(x, y, z) = x + 2y + 3z$ 及 $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 是几元函数？求 $w(0, 0, 0)$ ， $w(1, -1, 0)$ ， $G(1, 1, 1)$ ， $G(\sqrt{x}, \sqrt{2y}, \sqrt{3z})$ ；

3) 求 $z = 1 / \sqrt{x^2 + y^2}$ 的定义域。

【答案 1) $F(0, 0) = -1$ ， $F(1, 0) = 0$ ， $F(1, 2) = 2$ ， $F(t, t) = 2t - 1$ ， $F(x, -1) = x - 2$ ； 2) 三元函数， $w(0, 0, 0) = 0$ ，

$w(1, -1, 0) = -1$, $G(1, 1, 1) = 3$, $G(\sqrt{x}, \sqrt{2y}, \sqrt{3z}) = x + 2y + 3z$; 3) $x^2 + y^2 \neq 0$, 即 $(x, y) \neq (0, 0)$ 。】

本节余下部分复习一下一些中学已学过的初等数学：什么叫偶函数？函数图形关于 y 轴对称的函数 $y=f(x)$ 叫偶函数，它的公式是 $f(-x)=f(x)$ ，譬如 $y=x^2$, $y=\cos x$ 都是偶函数。什么叫奇函数？图形关于原点对称的函数叫奇函数，它的公式是 $f(-x)=-f(x)$ ，譬如， $f(x)=x$, x^3 , $\frac{1}{x}$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ 等都是奇函数。什么叫周期函数？若存在 $T>0$ ，使 $f(x+T)=f(x)$ 的函数叫周期函数，其中 T 叫周期，最小的 T (如果存在) 就叫最小周期。很多情形下，周期是指最小周期。譬如 $\sin x$, $\cos x$ 周期为 2π ，而 $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ 周期为 π 。奇、偶函数带来的好处是使我们只须讨论 $x \geq 0$ 那一部分区间上函数的性质就足够了；而周期函数使我们只要讨论一个周期范围内函数的性质就足够了 (见图 1.1-4)。

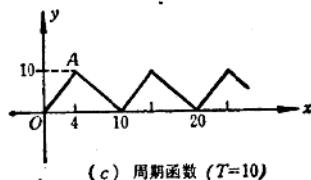
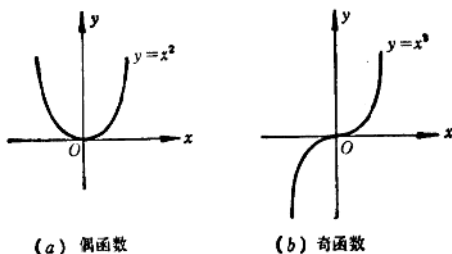


图 1.1-4

例 3 y 表示库存量， x 表示日期。图 1.1-4(c) 表示了 y 与 x 的关系。试用分段函数将 $y=y(x)$ 表示出来。

解 从图 1.1-4(c) 可看出库存量 y 是日期 x 的周期函数, 周期为 $T=10$ 。故我们只需在 $[0, 10]$ 上将 y 表示出来已足够。在闭区间 $[0, 4]$ 上, 图形是过原点的直线, 其斜率为 $10/4=2.5$ 。故 $0 \leq x \leq 4$ 时, $y=2.5x$ 。在 $4 < x \leq 10$ 时, 也是一直线, 且过 $(4, 10)$ 及 $(10, 0)$ 两点, 于是可算出 $y = -\frac{5}{3}(x-10)$ 。故在 $[0, 10]$ 上

$$y=y(x)=\begin{cases} \frac{5}{2}x, & 0 \leq x \leq 4 \\ -\frac{5}{3}(x-10), & 4 < x \leq 10 \end{cases}$$

练习题

安全库存量法的库存量 y 与日期 x 之间的关系示于图 1.1-5。试用公式将 $[0, 60)$ 上的 $y=y(x)$ 表示出来。

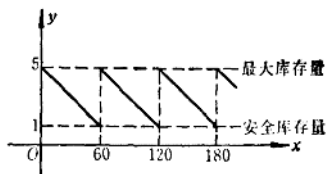


图 1.1-5

【答案 周期 $T=60$,

$$y=y(x) = -\frac{x}{15} + 5, \quad 0 \leq x < 60.]$$

在中学里我们还学过以下函数: 幂函数 $y=x^a$; 指数函数 $y=a^x (a>0)$; 对数函数 $y=\log_a x (a>0, a \neq 1)$, 在底数 $a=10$ 时, 又叫常用对数, 记为 $y=\lg x$; 正弦函数 $y=\sin x$; 余弦函数 $y=\cos x$; 正切与余切函数 $y=\tan x, y=\cot x$; 反三角函数 $y=\sin^{-1}x (-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$, $y=\cos^{-1}x (-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi)$, $y=\tan^{-1}x (-\infty < x < +\infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ 。

在以后我们将经常用到以 $a=e \approx 2.7182818 \dots$ 这个无理数为底数的指数函数 $y=e^x$ 及对数函数 $y=\log_e x = \ln x$ (特称自然对数)。

另外, 角度将采用弧度制来计量。

不等式 $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ 将多次被用到。

习 题

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = 1/\sqrt{x(1-x)};$$

$$(2) y = \lg(2x);$$

$$(3) y = \sin^{-1} \frac{x}{2};$$

$$(4) y = \frac{x-1}{x^2+2x+1};$$

$$(5) y = \ln(x-1);$$

$$(6) z = \frac{x-y}{x+y};$$

$$(7) y = 1/x^2;$$

$$(8) y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

2. 已知 $f(x) = x/(1+x)$, 求:

$$(1) f(1);$$

$$(2) f(-2);$$

$$(3) f(0);$$

$$(4) f(u);$$

$$(5) f(-\sin^2 x);$$

$$(6) f\left(\frac{1}{z}\right);$$

$$(7) f(t-1);$$

$$(8) f(f(x));$$

$$(9) f^2(x);$$

$$(10) f\left(\frac{1}{f(x)}\right).$$

3. 作出下列函数图形:

$$(1) f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| > 1; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 1 \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

4. 已知 $F(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, 求:

$$(1) \text{定义域};$$

$$(2) F(0, 0);$$

$$(3) F(1, 0);$$

$$(4) F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$(5) F\left(\frac{1}{2}, y\right);$$

$$(6) F\left(x, -\frac{1}{2}\right);$$

$$(7) F(t, s);$$

$$(8) F(\sin t, \cos t).$$

5. 指出下面函数中哪些是奇函数, 哪些是偶函数, 哪些是周期函数(同时求出周期):

$$(1) y = \sin x;$$

$$(2) y = 2^x;$$

$$(3) y = \sin^2 x;$$

$$(4) y = \frac{x}{1+x^2};$$

$$(5) y = \lg \frac{x}{2};$$

$$(6) y = |x|;$$

$$(7) y = \ln|x|;$$

$$(8) y = x^4 + 2x^2 + 1;$$

$$(9) y = x^3 + 3x;$$

$$(10) y = \sin^{-1} x;$$

$$(11) y = \cos^{-1} x;$$

$$(12) y = \lg^{-1} x.$$

6. 证明 $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

7. 某单位用计分法来分住房。总分等于工龄分加上职称分。职称由 0, 1, ..., 5 六级组成, 0 级无职称分且每高一级加 5 分。工龄分两种算法:

对0级职称的人,每年1.4分,对1级和1级以上的人,每年1分。用 y 表示总分, x_1 表示职称级别, x_2 表示工龄。试用分段函数表示法写出 y 与 x_1, x_2 之间关系。

8. 记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,譬如 $[1]=1, [1.2]=1, [-1]=-1, [-1.1]=-2$ 。试作出 $y=[x]$ 的图。

9. $\max(a, b)$ 表示 a, b 中较大的一个数,而 $\min(a, b)$ 表示 a, b 中较小的一个数,譬如 $\max(0, 3)=3, \min(-1, 2)=-1$ 。试作出 $y=\max(x, 1-x)$ 及 $y=\min(\sin x, \cos x)$ 的图。

10. 某产品由5个A零件,3个B零件装配而成。现有A,B零件分别为 x_1, x_2 个。问最多能装配多少产品?这时A,B分别余下多少?

11. 设一个大工程由1, 2, 3号三个分工程构成。2号工程必须在1号完成之后才能进行,而3号工程可与1号、2号工程完全独立地进行。设完成1号, 2号, 3号工程各需 a_1, a_2, a_3 (天)。又设它们开工日期分别为 x_1, x_2, x_3, y 表示完工日期,试用分段表示法或其它方法写出三元函数 $y=f(x_1, x_2, x_3)$ 。

12. 购买某物 x 件,当 $x < 99$ 时,单价为1元;当 $x \geq 100$ 时,单价为0.95元。用 y 表示买 x 件的费用,用分段法写出函数 $y=y(x)$ 并作图。

§2 最值与导数

函数的最大值与最小值统称最值。最值问题是个颇有趣味的问题。二次函数,譬如

$$y = x^2 + x + 4 \quad (1.2.1)$$

可用普通的配方法来求出它的最小值:

$$y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$$

当 $x = -1/2$ 时, y 取到最小值 $y_{\min} = 15/4$ (“min”意思是最小值,而“max”表示最大值)。

对三次函数,配方法就无能为力了。

例1 有边长为10cm的正方形铁皮一张,四角都剪去一个相同的正方形,然后弯成一无盖方盒(图1.2-1)。问所剪去的正方形边长 x 为多少时,所得方盒的容积最大?

解 方盒的容积 V 为

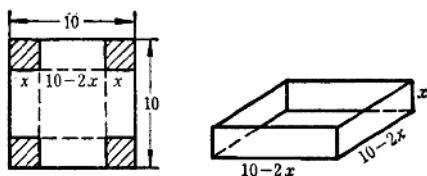


图 1.2-1

$$V = x(10-2x)^2 = 4x^3 - 40x^2 + 100x \quad (1.2.2)$$

这个三次函数最值问题可用一种极有力的求最值工具——导数，来加以解决。原则上，导数法可求出几乎所有函数的最值。

先来介绍导数法求函数 (1.2.1) 最值的过程。这是有启发性的。该方法将 x^2 换成 $2x$ ， x 换成 1，常数项 4 换成 0 便得一新函数（记为 y' 或 y'_x 或 $\frac{dy}{dx}$ ）：

$$\begin{array}{rcc} y = x^2 + x + 4 & & \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \\ y' = 2x + 1 + 0 = 2x + 1, & & \end{array}$$

这个新函数 $y' = 2x + 1$ 就称为是 $y = x^2 + x + 4$ 的导数，然后设导数 $y' = 0$ ：

$$y' = 2x + 1 = 0$$

可解得 $x = -1/2$ ，这正好与配方法所求出的 x 一样。这不是偶然的巧合，其中是有道理的。不妨再试一例：

$$\begin{array}{rcc} y = x^2 - 6x + 12 & & \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \\ y' = 2x - 6 \cdot 1 + 0 = 2x - 6 & & \end{array}$$

（ x 换成 1， $6x$ 就换成 $6 \cdot 1 = 6$ ，而常数项一律换成 0）再令导数 $y' = 0$ ，解得 $x = 3$ 。若用配方法也可得到同样的结果。

现用这个导数法来求 (1.2.2) 的最值，注意 x^3 换成 $3x^2$ ：

$$\begin{array}{rcc} V = 4x^3 - 40x^2 + 100x & & \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \\ V' = 4(3x^2) - 40(2x) + 100 \cdot 1 = 12x^2 - 80x + 100 & & \end{array}$$

再令导数 $V' = 0$ ：

$$V' = 12x^2 - 80x + 100 = 0$$