高等数学简明教程

（第二册）

李 忠 周建莹 编著

北京大学出版社

高等数学简明教程

（第二册）

李　忠　周建莹　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学简明教程　第二册/李忠，周建莹编著. —北京：北京大学出版社，1999.1

ISBN 7-301-03996-4

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①李… ②周…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 36404 号

书　　名：高等数学简明教程(第二册)
著作责任者：李　忠　周建莹　编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-03996-4/O・426
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168　32 开本　12.5 印张　315 千字
1999 年 1 月第一版　1999 年 1 月第一次印刷
印　　数：0001—4000 册
定　　价：15.00 元

内 容 简 介

这套教程是物理类各专业大学生的高等数学教材，共分三册，供三个学期使用。第一册的内容是一元函数的微积分及空间解析几何；第二册的内容是多元函数的微积分及常微分方程；第三册的内容是级数，含参变量积分，傅里叶级数与傅里叶积分，概率论与数理统计。

本书为第二册，共分四章。内容包括：多元函数微分学及其在几何中的应用，二重积分、三重积分及其在物理中的应用，曲线积分、曲面积分与场论初步，常微分方程等。

本书的作者们曾在北京市教委及北京大学正式立项，进行高等数学课程内容体系改革的试点工作。本书就是在试点基础上编写而成的。它打破了原来先讲微分学后讲积分学的传统讲授次序，重新架构了教学内容体系，力求使读者尽快掌握微积分的核心思想与基本计算；同时避免了由于积分概念出现过晚而造成的与其他专业基础课在配合上的脱节现象。在极限理论及其相关问题上，本书的处理也有特色，既保证了理论的严谨性，又避免了过分形式化的弊端，使读者感到朴素自然。该书强调数学理论的实际背景及其在其他学科中的作用；在内容的讲授及习题、例题的配置上尽可能展示了数学的应用价值。本书叙述简洁，深入浅出，便于自学。

本书可作为综合性大学、高等师范院校物理类及其相关专业本科生的高等数学课的教材，也可供数学教师、科技工作者及数学爱好者阅读，对非物理类专业的师生，也可有选择地使用本书作为高等数学教材。

目　录

第五章　多元函数微分学

在本书第一册中，我们主要讨论了一个自变量的函数的微积分，即一元函数微积分. 但是，许多问题中所涉及的函数是包含多个自变量的函数，即多元函数. 因此，将一元函数的微分学与积分学推广到多元函数的情形是十分必要的. 本章中我们先讨论多元函数的微分学，而将其积分学留到下一章.

多元函数的微分学是以一元函数微分学为基础的. 两者之间有许多类似之处，但在某些地方有实质性的差别. 对于这一点读者应当在学习中特别留意.

虽然一元函数的微分学与多元函数的微分学有某种实质差别，然而，二元函数的微分学与三元函数或更多元函数的微分学并无实质的差别. 因此，为简单起见，在本章的大部分叙述中以讨论二元函数为主；至于更多个自变量的情况，我们相信读者自己能够得出相应的结论.

§1　多 元 函 数

1. 多元函数的概念

多元函数就是含有多个自变量的函数. 例如，三角形之一边 c 是另外两边 a 与 b 及其夹角 θ 的函数：

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}.$$

而一定质量的理想气体的压强 P 是其体积 V 及温度 T 的函数：

$$P = k\frac{T}{V} \quad (k = \text{常数}).$$

在这里 c 是三个自变量的函数，而 P 是两个自变量的函数.

为了描述多个自变量，我们须要将它们按照一定次序加以排列而形成一个有序的数组. 例如在前面的例子中自变量形成的数组分别是(a,b,θ) 与(T,V).

为了对多元函数有一个几何上的了解，我们将两个自变量形成的数组，如上面的(T,V)，看作是平面上的一个点，而将三个自变量所形成的数组，比如上面的(a,b,θ)，看作是空间中的一个点.

当一个二元函数的两个自变量在一定的允许范围内变化时，相应的数组则对应于平面上的某一个点集合. 在这种看法下，一个二元函数实质上就是平面上某个点集合到实数域 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射(见图 5.1). 同样地，一个三元函数实质上就是三维空间中某个点集合到实数域 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射.

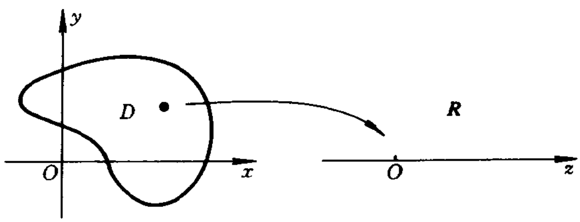

图 5.1

今后，我们将全体有序的实数组(x,y) 所组成的集合记作 $\boldsymbol{R}^2$，也即

$$\boldsymbol{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \boldsymbol{R}, y \in \boldsymbol{R}\}.$$

同时，我们将全体有序的三元实数组(x,y,z) 所组成的集合记作 $\boldsymbol{R}^3$，也即

$$\boldsymbol{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x \in \boldsymbol{R}, y \in \boldsymbol{R}, z \in \boldsymbol{R}\}.$$

过去我们把实数集合 $\boldsymbol{R}$ 与具有坐标的直线(数轴) 上的全体点相等同. 今后，我们将把 $\boldsymbol{R}^2$ 与 $\boldsymbol{R}^3$ 分别跟具有坐标的平面与三维空间中的全体点相等同.

在各种实际问题中，我们还会遇到自变量的个数多于 3 的函数. 比如，许多物理量不仅依赖于物体在空间中的位置 —— 这须

要用三个变量来描述，而且还依赖于时间. 像这样的物理量则是一个四元函数.

一般说来，为描述 n 元函数的自变量，我们须要考虑 n 个有次序的实数组：

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

以及由全体这种数组所组成的集合：

$$\boldsymbol{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_j \in \boldsymbol{R}, j = 1, 2, \cdots, n\}.$$

我们把每一个数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称作 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个点.

现在，我们给出多元函数的正式定义.

定义 设有一个集合 $D \subset \boldsymbol{R}^n$. 如果对于集合 D 中每一点 $(x_1, \cdots, x_n)$，按照一定的规则 f，都有一个唯一确定的实数 $u \in \boldsymbol{R}$ 与之相对应，则称 f 是一个定义在 D 上的 n 元函数. 这里 D 被称为 f 的**定义域**. 与 $(x_1, \cdots, x_n)$ 相对应的数 u 被称为 f 在 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的**值**，并记为 $f(x_1, \cdots, x_n)$. 全体函数值的集合

$$f(D) = \{f(x_1, \cdots, x_n) \mid (x_1, \cdots, x_n) \in D\}$$

称为 f 的**值域**.

显然，在前边关于三角形边长的例子中，c 作为 (a, b, θ) 的函数，其定义域为

$$\{(a, b, \theta) \mid a > 0, b > 0, 0 < \theta < \pi\},$$

而其值域则是 $(0, +\infty)$.

因为习惯上将 $\boldsymbol{R}^2$ 中的点用 (x, y) 表示，而 $\boldsymbol{R}^3$ 中的点用 (x, y, z) 表示，故通常的二元函数与三元函数我们用 $u = f(x, y)$ 与 $u = f(x, y, z)$ 表示.

像一元函数情形一样，多元函数在很多情况下是由一个表达式给出，这时函数的定义域 D 是一切使得表达式有意义的点 $(x_1, \cdots, x_n)$ 所组成的集合.

前面定义多元函数时，n 元函数是作为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个集合 D 到 $\boldsymbol{R}$ 中的一个映射给出的. 但是二元函数可以有更直观的几何解释，这就是函数图形的概念.

我们已经熟悉将一个一元函数 $y=f(x)$ 视作是平面上的一个图形. 更确切地说,它是平面上一切满足 $y=f(x)$ 的点 (x,y) 之集合.

对于二元函数 $z=f(x,y)$ 也可以有类似的解释. 在取定直角坐标系 $Oxyz$ 的三维空间,集合

$$\{(x,y,z)|z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\}$$

称为 f 的图形,这里 D 是 f 的定义域.

例 1 函数 $z=\sqrt{r^2-(x^2+y^2)}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant r^2,\quad r>0\}.$$

它是 Oxy 平面上的一个圆,其圆心为原点,半径为 r. 这个函数的图形则是位于 Oxy 平面上方的半个球面(见图 5.2).

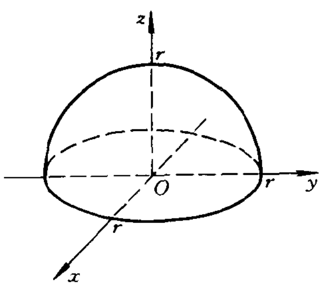

图 5.2

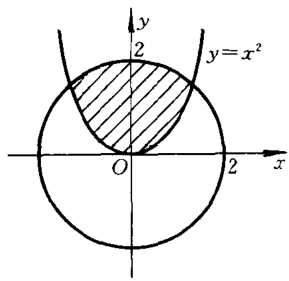

图 5.3

例 2 函数 $z=(\sqrt{y-x^2})+\ln[4-(x^2+y^2)]$ 的定义域是满足

$$\begin{cases}y\geqslant x^2,\\x^2+y^2<4\end{cases}$$

的点 (x,y) 的全体. 在 Oxy 平面上,这个集合中的点位于抛物线 $y=x^2$ 上或其上方且在圆周 $x^2+y^2=4$ 之内部,如图 5.3 阴影部分所示. 这个函数的图形是一张曲面,但不易画出.

我们同样可以定义三元函数乃至一般 n 元函数的图形的概念. 但是,三元函数或 n 元函数 $(n\geqslant 3)$ 的图形须要借助于四维空间或 $n+1$ 维空间. 故这时函数的图形就只能想象而不能画出了,

对于我们来说研究 n 元函数并无实际用途.

2. $\boldsymbol{R}^n$ 中的集合到 $\boldsymbol{R}^m$ 的映射

上面讨论的 n 元函数实质上就是 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个集合到 $\boldsymbol{R}$ 的一个映射. 这个概念的一般化就是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个集合到 $\boldsymbol{R}^m$ 的映射. 这种映射在数学或物理中是经常用到的.

我们先看两个实例.

例 3 平面曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

其中 φ 与 ψ 是在 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数. 这实质上是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的集合 $[\alpha,\beta]$ 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的一个映射. 我们同样把这一映射用一个符号表示: $f: [\alpha,\beta] \to \boldsymbol{R}^2$. 但是, 这时与函数不同, 对于每一个 $t \in [\alpha,\beta]$, $f(t)$ 不再是一个值, 而应是 $\boldsymbol{R}^2$ 中一个点. 因此, $f(t)$ 应由两个坐标刻画, 即

$$f(t) = (\varphi(t), \psi(t)).$$

例 4 平面上的坐标变换

$$\begin{cases} u = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ v = x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{cases}$$

其中 α 为常数. 映射 $(x,y) \to (u,v)$ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的一个映射, 这里 u 与 v 是两个二元函数.

设 D 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个集合. 又设 f 是 $D \to \boldsymbol{R}^m$ 的一个映射. 那么, 对于 D 中的每一个点 $(x_1,\cdots,x_n)$, 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中都有一个唯一确定的点 $(y_1,\cdots,y_m)$ 与之相对应, 这里每一个 $y_j (j = 1,\cdots,m)$ 都是由 $(x_1,\cdots,x_n)$ 所确定的. 故 y_j 是 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的一个函数, 设它为 $f_j(x_1,\cdots,x_n) (j = 1,\cdots,m)$. 这样一来, 上述映射 $f: D \to \boldsymbol{R}^m$ 相当于 m 个 n 元函数:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n). \end{cases}$$

因此，$\boldsymbol{R}^n$ 中的集合到 $\boldsymbol{R}^m$ 的一个映射可用有序的 m 个 n 元函数表示. 其中第 j 个 n 元函数 f_j 称作映射的第 j 个分量.

不仅坐标变换是这类映射，而且一般地说，只要我们在讨论问题时须要引用若干个新的变量去替换原有的若干个变量，这时新旧变量之间就形成了一种对应关系. 这种对应关系一般说来就是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的集合到 $\boldsymbol{R}^m$ 的一个映射；这里 n 是旧变量的个数，而 m 是新变量的个数.

3. $\boldsymbol{R}^n$ 中的拓扑

回顾一元函数极限的定义，立即发现邻域的概念在其中占有重要地位. 因此，要想对于 n 元函数建立极限概念，首先应该在 $\boldsymbol{R}^n$ 中建立邻域的概念.

我们回顾，在数轴 $\boldsymbol{R}$ 上邻域概念的建立是基于数轴上两点间的距离. 因此，要想在 $\boldsymbol{R}^n$ 中建立邻域的概念就应在 $\boldsymbol{R}^n$ 中建立距离的概念. 在数轴 $\boldsymbol{R}$ 上点 x 到 x_0 的距离为

$$|x - x_0| = \sqrt{(x - x_0)^2}.$$

在平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中点 $P(x,y)$ 到 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离为

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

而空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中点 $P(x,y,z)$ 到 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的距离为

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

因此，很自然地将 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 到 $P_0(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 的距离定义为

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - x_j^0)^2}.$$

若将 $\boldsymbol{R}^n$ 中的两点 P 与 Q 的距离记作 $d(P,Q)$，那么它满足下列条件：

(1) $d(P,Q) \geqslant 0$，当且仅当 $P = Q$ 时等号成立；

(2) $d(P,Q) = d(Q,P)$，$\forall\ P,Q \in \boldsymbol{R}^n$；

(3) $d(P,Q) \leqslant d(P,R) + d(R,Q)$，$\forall\ P,Q,R \in \boldsymbol{R}^n$.

前面两条性质显然成立，而第三条的证明也不困难，留给读者自行证明(参见习题 5.1 的第 4 题)．第三条中的不等式称作**三角不等式**，在三维空间中它的几何解释就是三角形的两边之和大于第三边．(因为 P、Q、R 可能在同一直线上，故也有可能成立等号．)

在 $\boldsymbol{R}^n$ 中定义了距离之后，我们就可以在 $\boldsymbol{R}^n$ 中定义一点 P_0 的邻域了．

定义 设 $P_0 \in \boldsymbol{R}^n$ 为给定的一点，r 是给定的正数．我们定义 P_0 点的 ***r* 邻域**是集合

$$U_r(P_0) = \{P \in \boldsymbol{R}^n \mid d(P_0,P) < r\}.$$

当 $n = 1$ 时，一点 $P_0 \in \boldsymbol{R}$ 的 r 邻域是以该点为中点、以 r 为半径的开区间．当 $n = 2$ 时，一点 $P_0 \in \boldsymbol{R}^2$ 的 r 邻域是以 P_0 为中心、以 r 为半径的圆的内部(不包含边界)，通常也称开圆．当 $n = 3$ 时，一点 $P_0 \in \boldsymbol{R}^3$ 的 r 邻域就是以 P_0 为中心、以 r 为半径的球的内部(不包含球面)，通常也称开球．

在一元函数的微积分中，我们遇到的函数大多定义在一个区间上，它是数轴上的"一段"．但在多元函数中函数的定义域将会较复杂些．我们将用区域的概念来替代过去的区间．

现在我们来定义开集及区域的概念．

设 $E \subset \boldsymbol{R}^n$ 是一个给定的集合．根据集合 E 我们将 $\boldsymbol{R}^n$ 中的点分作三类：E 的内点、外点与边界点．一点 $P \in \boldsymbol{R}^n$ 称为 E 的**内点**，如果存在一个正数 r 使得 P 点的 r 邻域整个包含于 E：

$$U_r(P) \subset E.$$

一点 $P \in \boldsymbol{R}^n$ 称为 E 的**外点**，如果存在一个正数 r 使得 P 点的 r 邻域与 E 不交：

$$U_r(P) \cap E = \varnothing,$$

这里 $\varnothing$ 表示空集. 既非内点又非外点的点称为 E 的**边界点**. 一点 $P \in \boldsymbol{R}^n$ 是 E 的边界点,当且仅当对于任意的正数 r,P 点的 r 邻域 $U_r(P)$ 中既有 E 中的点又有非 E 中的点.

例 5 设集合 R 是平面 $\boldsymbol{R}^2$ 中的一个矩形的内部:

$$R = \{(x,y) \mid -a < x < a,\ -b < y < b\},$$

其中 $a > 0, b > 0$ 是常数,则原点 $(0,0)$ 是 R 的一个内点,点 (a,b) 是一边界点,点 $(2a,2b)$ 是一外点. 更一般地说,集合 R 内的每一点都是其内点,而它的四条边上的每一点都是边界点,而矩形之外(不含边)任意一点都是外点.

例 6 设 R_1 是带边的矩形:

$$R_1 = \{(x,y) \mid -a \leqslant x \leqslant a,\ -b \leqslant y \leqslant b\},$$

其中 $a > 0, b > 0$ 是常数. 显然,在 $\boldsymbol{R}^2$ 中 R_1 与例 5 中 R 有相同的内点、外点及边界点. R_1 区别于 R 的地方是 R_1 包含其全部边界点.

根据定义很容易看出,一个集合 E 的全部内点都包含于 E 之中,而 E 的全部外点都不含于 E 之中. 对于 E 的一个边界点则有两种可能性:或者包含于 E,或者不包含于 E.

一个集合 E 称为**开集**,如果它的每一点都是内点.

显然,平面上不带边的任意一个矩形内部,不带边的任意一个圆内部都是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的开集.

E 是开集的充要条件是 E 中没有边界点.

一个集合 E 称为**闭集**,如果它包含着它的全部边界点. 例 6 中的 R_1 就是一个闭集.

开集与闭集恰好是两种极端情况,前者不包含任何边界点而后者包含其全部边界点. 显然,有些集合介于两者之间:包含部分边界点但非全部,例如:

$$R_2 = \{(x,y) \mid -a < x \leqslant a,\ -b \leqslant y < b\}$$

(建议读者自己画出这个集合的图). 在 $\boldsymbol{R}^2$ 中这样的集合则既非开集,也非闭集.

有一种特别情况也应提醒读者：若 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个集合没有边界点（如 $\boldsymbol{R}^n$ 本身或空集 $\varnothing$），则它既是开集又是闭集. 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中既是开集又是闭集的集合只有 $\boldsymbol{R}^n$ 本身与空集 $\varnothing$.

设 E 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个开集. 我们说 E 是**连通的**，如果 E 中任意两点都可以用一条落在 E 中的折线相连接.

$\boldsymbol{R}^n$ 中的连通的非空开集称为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的**区域**. 它是 $\boldsymbol{R}$ 上开区间之推广.

在前面的例 5 中矩形 R 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中一个区域.

设 G 是一个区域，∂G 表示 G 的全部边界点组成的集合，那么集合 $G \cup \partial G$ 是一个闭集. 今后，我们记集合 $G \cup \partial G$ 为 $\overline{G}$，并称之为**闭区域**.

在 $\boldsymbol{R}^1$ 中的区域就是开区间，而其中的闭区域可以是闭区间，或是 $\boldsymbol{R}$ 本身，或者是$[a, +\infty)$ 或$(-\infty, a]$.

集合 $E \subset \boldsymbol{R}^n$ 称为**有界集合**，如果存在一个正数 ρ，使得 E 包含于以原点为心、以 ρ 为半径的球内. 如果不存在这样正数 ρ，则称 E 为无界集合.

区域及闭区域有可能是无界的. 如 $\boldsymbol{R}^2$ 中的带形区域

$$S = \{(x,y) \mid 0 < y < 1\}$$

及其相应的闭区域

$$\overline{S} = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\},$$

都是无界的.

在研究多元函数微积分时，我们对于区域有特殊的兴趣. 它完全相当于 $\boldsymbol{R}^1$ 中的开区间. 我们也对有界闭区域有特殊兴趣，尤其在讨论连续函数的性质时，它相当于 $\boldsymbol{R}^1$ 中的闭区间.

习　题　5.1

1. 确定下列函数的定义域并画出定义域的图形：

(1) $z = (x^2 + y^2 - 2x)^{1/2} + \ln(4 - x^2 - y^2)$；

(2) $z = (x^2 - y^2)^{-1}$；

(3) $z=\ln(y-x^2)+\ln(1-y)$;

(4) $z=\arcsin\dfrac{x}{a}+\arccos\dfrac{y}{b}\quad(a>0,b>0)$.

2. 指出下列集合中哪些集合在 $\boldsymbol{R}^2$ 中是开集,哪些是区域,哪些是有界区域,哪些是有界闭区域?

(1) $E_1=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$;

(2) $E_2=\{(x,y)\mid |x|<1,|y-1|<2\}$;

(3) $E_3=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2,x\geqslant y^2\}$;

(4) $E_4=\{(x,y)\mid y\neq\sin\dfrac{1}{x}$ 且 $x\neq 0\}$.

3. 设 $E\subset\boldsymbol{R}^n$ 为任意一个集合,∂E 为 E 的边界点集合. 试证明 $\overline{E}=E\cup\partial E$ 是一个闭集合.

4. 像在 $\boldsymbol{R}^3$ 中一样,我们把 $\boldsymbol{R}^n$ 中的每一点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 同时也视作一个向量,并定义两个向量

$$\alpha=(x_1,\cdots,x_n)\ \text{及}\ \beta=(y_1,\cdots,y_n)$$

的加法运算

$$\alpha+\beta=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$$

及数乘运算

$$\lambda\alpha=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n),\quad\forall\lambda\in\boldsymbol{R}.$$

此外,我们也可以定义两个向量之内积:

$$\alpha\cdot\beta=x_1y_1+\cdots+x_ny_n,$$

并规定

$$\sqrt{\alpha\cdot\alpha}=|\alpha|$$

作为向量的模. 试证明:

(1) $\alpha\cdot\beta\leqslant|\alpha|\cdot|\beta|,\forall\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}^n$;

(提示:考虑任意一个实数 λ. 由 $|\alpha+\lambda\beta|^2\geqslant 0$ 导出一个以 λ 为变元的二次三项式 $\geqslant 0$. 再利用二次三项式非负的条件即得.)

(2) $|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|,\forall\alpha,\beta,\gamma\in\boldsymbol{R}^n$;

(3) 将点 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 及 $Q(y_1,\cdots,y_n)$ 分别看成向量 α 及 β,