● 工程数学提高丛书

复变函数与积分变换

典型题分析解集

○ 李建林　编

○ 西北工业大学出版社

工程数学提高丛书

复变函数与积分变换
典型题分析解集

李建林 编

西 北 工 业 大 学 出 版 社
1999年4月 西安

（陕）新登字 009 号

【内容简介】 本书是以复变函数与积分变换基础理论中一些典型题目的分析解答为中心，与同名课程教学相配套的辅助参考资料。选题的内容符合复变函数与积分变换教学的基本要求，并力求照顾到各种类型。全书共八章，每章由分析解答与习题两部分组成，书末附有习题的答案、解题方法或提示。可供理工科大学或师范院校教学相应课程的师生参考使用。

工程数学提高丛书
复变函数与积分变换典型题分析解集
李建林 编
责任编辑 王俊轩
责任校对 齐随印
*

（邮编:710072 西安市友谊西路 127 号 电话:8491147）
全国各地新华书店经销
空军电讯工程学院印刷厂印装
ISBN 7-5612-1055-8/O·140
*
开本：850 毫米×1168 毫米 1/32 印张：7.5 字数：183 千字
1998 年 6 月第 1 版 1999 年 4 月第 2 次印刷
印数:5 001—11 000 册 定价:9.50 元

前　言

复变函数与积分变换是工程数学的两个重要分支，其理论与方法在自然科学和工程技术中有着广泛的应用。为了帮助广大读者正确理解和掌握它的基本理论与方法，增强分析问题与解决问题的能力，作者编写了《复变函数与积分变换典型题分析解集》，并力求做到以下两点：

1. 着重分析解题思路，揭示解题规律。许多例题既提供了解题思路及计算与证明的过程，又给出了一题的多种解法。书中还有一些综合题。

2. 注重题材的代表性，力求照顾到各种类型，以典型带一般。对于一些题类选好典型，使读者举一反三，触类旁通。

考虑到这门课程本身的特点及参阅本书的读者应具备的微积分知识，编者并非对每题都专作分析说明，而只作简捷的论证推导，并在适当的地方补充说明。这样使读者不仅能得到简明而准确的解答，而且也能培养分析问题与解决问题的能力。另外，读者通过阅读这本解集，并做适量的习题，同时配合教学的基本要求，将会对复变函数与积分变换的理论和方法有更加深入的理解。

由于编者水平有限，书中难免存在缺点与错误，敬请读者批评指正。

编　者

1998 年 1 月

《工程数学提高丛书》编委会

目　录

第一章　复数与复变函数

一、典型题分析

例 1.1　求复数$\dfrac{\eta\cos\theta-1}{\eta\cos\theta+1}$的实部与虚部，其中$\eta=e^{i\varphi}$.

【分析】　欧拉公式给出$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$，利用复数的除法，便可求出复分式的实部与虚部．

解　因　$$\frac{\eta\cos\theta-1}{\eta\cos\theta+1}=\frac{\cos\varphi\cos\theta-1+i\sin\varphi\cos\theta}{\cos\varphi\cos\theta+1+i\sin\varphi\cos\theta}$$

给分子与分母同乘以分母的共轭复数可知

$$\frac{\eta\cos\theta-1}{\eta\cos\theta+1}=\frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta-1+\sin^2\varphi\cos^2\theta+2i\sin\varphi\cos\theta}{(\cos\varphi\cos\theta+1)^2+\sin^2\varphi\cos^2\theta}=$$

$$\frac{\cos^2\theta-1+2i\sin\varphi\cos\theta}{1+2\cos\varphi\cos\theta+\cos^2\theta}$$

故实、虚部分别为

$$\frac{-\sin^2\theta}{1+2\cos\varphi\cos\theta+\cos^2\theta}\qquad\frac{2\sin\varphi\cos\theta}{1+2\cos\varphi\cos\theta+\cos^2\theta}$$

例 1.2　若$x,\ y,\ \xi,\ \eta$都是实数，试解方程组

$$\begin{cases}(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)\xi+(1+4i)\eta=1+5i\\(3-i)x+(4-2i)y+(1+i)\xi+4i\eta=2-i\end{cases}$$

【分析】　复系数的n元一次方程，只要利用复数相等的概念，可变为$2n$元一次实方程．

解　所给的方程组可写为

$$\begin{cases}(x+y+\xi+\eta)+i(x+2y+3\xi+4\eta)=1+5i\\(3x+4y+\xi)+i(-x-2y+\xi+4\eta)=2-i\end{cases}$$

利用复数相等的概念可知

$$\begin{cases} x+y+\xi+\eta=1 & (1)\\ x+2y+3\xi+4\eta=5 & (2)\\ 3x+4y+\xi=2 & (3)\\ -x-2y+\xi+4\eta=-1 & (4)\end{cases}$$

由式(3) + 式(4) 得

$$x+y+\xi+2\eta=\frac{1}{2} \tag{5}$$

式(5) − 式(1) 得 $\eta=-\frac{1}{2}$;式(2) + 式(4) 得 $\xi=1-2\eta=2$;式(1) + 式(4) 得 $y=\frac{3}{2}$,再由式(1) 得 $x=-2$. 故方程组的解为 $x=-2,\ y=\frac{3}{2},\ \xi=2,\ \eta=-\frac{1}{2}$.

例 1.3 试将复数 $1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 化为三角形式与指数形式.

【分析】 复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 的三角与指数表示式分别为 $z=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ 与 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$,$\varphi=\arg z$. 一般地给定复数 z 后,模 r 的计算比较简单,关键是求 $\arg z$. 复数 z 的辐角主值可按下面公式计算:

$$\arg_{z\neq0} z=\begin{cases}\arctan\dfrac{b}{a}, & \text{当 } a>0,\quad b\gtreqless 0;\\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } a=0,\ b\gtrless 0;\\ \arctan\dfrac{b}{a}\pm\pi, & \text{当 } a<0,\quad b\gtrless 0;\\ \pi, & \text{当 } a<0,\quad b=0\end{cases}$$

其中
$$-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{b}{a}<\frac{\pi}{2}$$

解法 1 由上面公式

$$r=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=$$

$$2\sin\frac{\theta}{2}\text{（注意，}0\leqslant\theta\leqslant\pi\text{）}$$

$$\arg z=\arctan\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\arctan\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)=$$

$$\arctan\left(\tan\frac{\pi-\theta}{2}\right)=\frac{\pi-\theta}{2}$$

故

$$1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=$$

$$2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi-\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\theta}{2}\right)\text{（三角表示式）}=$$

$$2\sin\frac{\theta}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi-\theta}{2}}\text{（指数表示式）}$$

解法 2 利用三角公式，不难看出

$$1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=$$

$$2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}\right)=$$

$$2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi-\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\theta}{2}\right)\text{（三角表示式）}=$$

$$2\sin\frac{\theta}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi-\theta}{2}}\text{（指数表示式）}$$

例 1.4 设 n 为自然数，证明等式

$$\left(\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}\right)^n=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

【分析】上面涉及到复数 n 次幂的等式，通常需要先将复数化为三角形式，然后再用棣莫弗（De Moivre）公式 $(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi$ 证明．

证 令 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$，可知

$$\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}=\frac{1+\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}{1+\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi}=$$

$$\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}-2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=$$

$$\frac{\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}}=$$

$$\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$$

故

$$\left(\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}\right)^n=\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi=$$

$$\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

例 1.5 若 n 为自然数，且 $x_n+\mathrm{i}y_n=(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$，求证

$$x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}=4^{n-1}\sqrt{3}$$

【分析】 复数 n 次幂的实部 x_n 与虚部 y_n，可以通过将复数化为三角形式，利用棣莫弗公式得到．求出 x_n 与 y_n 后只须验证结论．

证 由 $x_n+\mathrm{i}y_n=(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n=2^n\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{3}\right)$，利用复数相等可得

$$x_n=2^n\cos\frac{n\pi}{3},\quad y_n=2^n\sin\frac{n\pi}{3}$$

于是

$$x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}=2^{2n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{3}-$$

$$2^{2n-1}\cos\frac{n\pi}{3}\sin\frac{(n-1)\pi}{3}=$$

$$2^{2n-1}\sin\left[\frac{n\pi}{3}-\frac{(n-1)\pi}{3}\right]=$$

$$2^{2n-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=4^{n-1}\sqrt{3}$$

例 1.6 求证：三个复数 z_1，z_2，z_3 成为等边三角形顶点的充要条件是它们适合等式

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$$

证法 1 $\triangle z_1z_2z_3$ 是等边三角形的充要条件为：向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 绕 z_1 旋转 $\frac{\pi}{3}$ 或 $-\frac{\pi}{3}$ 即得向量 $\overrightarrow{z_1z_3}$，也就是 $z_3-z_1=(z_2-z_1)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$ 或

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}-\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

两边平方化简，可得

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$$

证法 2 等式 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$ 可写成

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\tag{1}$$

若复数 z_1,z_2,z_3 满足式(1) 时，则有

$$|z_3-z_1|^2=|z_1-z_2|\ |z_2-z_3|\tag{2}$$

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}-1=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}-1$$

或

$$\frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}\tag{3}$$

式(3) 两边取绝对值又可得

$$|z_2-z_3|^2=|z_1-z_2|\ |z_3-z_1|\tag{4}$$

上面式(2) 与式(4) 相除可得 $|z_3-z_1|^3=|z_2-z_3|^3$ 即 $|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$. 再代入式(2) 可知 $|z_3-z_1|=|z_2-z_3|=|z_1-z_3|$. 从而 z_1,z_2,z_3 为一等边三角形的顶点．反之，若 $\triangle z_1z_2z_3$ 为等边三角形，则

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right|=1$$

$$\begin{cases}\arg\left(\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = \arg(z_2 - z_1) - \arg(z_3 - z_1) = \pm \dfrac{\pi}{3} \\ \arg\left(\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) = \arg(z_1 - z_3) - \arg(z_2 - z_3) = \pm \dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

且正负号取法相同．

故
$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

例 1.7 设 z_1 与 z_2 为任意复数，a_1 与 a_2 为实数且 $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$，试证明不等式

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1^2 + z_2^2| \leqslant 2\frac{|a_1z_1 + a_2z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2} \leqslant$$
$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1^2 + z_2^2|$$

【分析】 在证明有关复数模（或绝对值）的等式或不等式时，常用公式 $|z|^2 = zz^*$，$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1z_2^*)$ 以及三角不等式 $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$. 由于所证的不等式两边均与 a_1, a_2 无关，并且 $2\dfrac{|a_1z_1 + a_2z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2} = 2\left|\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}z_1 + \dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}z_2\right|^2$，我们可以引进辅助角 α 使 $\tan\alpha = \dfrac{a_1}{a_2}$（或 $\dfrac{a_2}{a_1}$）来考虑此式的最大值与最小值．

证 令 $\tan\alpha = \dfrac{a_1}{a_2}$，则

$$\begin{aligned}\frac{2|a_1z_1 + a_2z_2|^2}{a_1^2 + a_2^2} = {} & 2|z_1\sin\alpha + z_2\cos\alpha|^2 = \\ & 2\{|z_1|^2\sin^2\alpha + |z_2|^2\cos^2\alpha + \\ & 2\mathrm{Re}(z_1z_2^*)\sin\alpha\cos\alpha\} = \\ & |z_1|^2 + |z_2|^2 + (|z_2|^2 - |z_1|^2)\cos2\alpha + \\ & 2\mathrm{Re}(z_1z_2^*)\sin2\alpha = \\ & |z_1|^2 + |z_2|^2 + A\cos2\alpha + B\sin2\alpha \qquad (1)\end{aligned}$$

其中 $A = |z_2|^2 - |z_1|^2, B = 2\mathrm{Re}(z_1 z_2^*)$ 均为实数．

由三角函数的知识可得

$$-\sqrt{A^2+B^2} \leqslant A\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha \leqslant \sqrt{A^2+B^2} \qquad (2)$$

事实上，利用等式 $A\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\sin(2\alpha+\gamma)$，其中 $\tan\gamma = \dfrac{A}{B}$，易知(2)式成立．

又因为

$$\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{|z_1|^4 + |z_2|^4 - 2|z_1^2 z_2^2| + 4\{\mathrm{Re}(z_1 z_2^*)\}^2} =$$

$$\sqrt{|z_1|^4 + |z_2|^4 + 2\mathrm{Re}(z_1^2 z_2^{*2})} =$$

$$\sqrt{|z_1^2 + z_2^2|^2} = |z_1^2 + z_2^2|$$

所以由式(1)式(2)即得要证明的不等式．

例 1.8 若 a,b 为两个复数，且 $|a| < 1$，$|b| < 1$，证明

$$\frac{|a| - |b|}{1 - |a|\ |b|} \leqslant \left|\frac{a+b}{1+a^* b}\right| \leqslant \frac{|a| + |b|}{1 + |a|\ |b|}$$

【分析】 上面涉及到复数绝对值的不等式，我们可以应用例1.7中提到的常用公式考虑其平方构成的不等式．

证 因

$$\left|\frac{a+b}{1+a^* b}\right|^2 = \frac{|a|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}(a^* b)}{1 + |a^* b|^2 + 2\mathrm{Re}(a^* b)} \xlongequal{\text{def}} \frac{m+t}{n+t}$$

其中 $m = |a|^2 + |b|^2$, $n = 1 + |a^* b|^2$, $t = 2\mathrm{Re}(a^* b)$.

考察实变量函数 $\varphi(x) = \dfrac{m+x}{n+x}$. 因 $\varphi'(x) = \dfrac{n-m}{(n+x)^2} = \dfrac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(n+x)^2} > 0$，$\varphi(x)$ 是 x 的增函数，而

$$-2|a|\ |b| \leqslant t = 2\mathrm{Re}(a^* b) \leqslant 2|a^* b| = 2|a|\ |b|$$

所以

$$\varphi(-2|a|\ |b|) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(2|a|\ |b|)$$

或

$$\left(\frac{|a|-|b|}{1-|a||b|}\right)^2 \leqslant \left|\frac{a+b}{1+a^*b}\right|^2 \leqslant \left(\frac{|a|+|b|}{1+|a||b|}\right)^2$$

由此即得要证明的不等式.

另法 因

$$\left(\frac{1\pm|a||b|}{|a|\pm|b|}\right)^2-1=\frac{(1\pm|a||b|)^2-(|a|\pm|b|)^2}{(|a|\pm|b|)^2}=$$

$$\frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(|a|\pm|b|)^2} \tag{1}$$

于是由 $|a+b|^2\leqslant(|a|+|b|)^2$, $|a|<1$ 及 $|b|<1$ 可知

$$\frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(|a|+|b|)^2}\leqslant\frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|a+b|^2}=$$

$$\frac{(1+a^*b)(1+ab^*)-(a+b)(a^*+b^*)}{(a+b)(a^*+b^*)}=$$

$$\left|\frac{1+a^*b}{a+b}\right|^2-1$$

结合式(1) 即得要证的第二个不等式. 同理由$(|a|-|b|)^2\leqslant|a+b|^2$, $|a|<1$ 及 $|b|<1$ 可知

$$\frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(|a|-|b|)^2}\geqslant\frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|a+b|^2}=$$

$$\left|\frac{1+a^*b}{a+b}\right|^2-1$$

结合式(1) 即得要证的第一个不等式.

例 1.9 证明方程 $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k(0<k\neq1,\ z_1\neq z_2)$ 表示 z 平面上一个圆周,其圆心为 z_0,半径为 ρ,且

$$z_0=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2},\quad \rho=\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|}$$

证 圆周

$$|z-z_0|=\rho \xLeftrightarrow{\text{将 } z_0,\rho \text{ 代入}} \left|\frac{z-z_1-k^2(z-z_2)}{1-k^2}\right|=$$

$$\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|} \xLeftrightarrow{\text{同除 } |z-z_2|} \left|\frac{z-z_1}{z-z_2}-k^2\right|=$$

$$k\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}-1\right| \xlongequal{\text{令 } w=\frac{z-z_1}{z-z_2}} |w-k^2| =$$

$$k|w-1| \xlongequal{\text{两边平方}} |w-k^2|^2 = k^2|w-1|^2 \Leftrightarrow$$

$$|w|^2 = k^2 \Leftrightarrow |w| = k \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k.$$

从分析结果即得要证明的论断.

注　此题也可将 $z = x + \mathrm{i}y$, $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 代入方程，两边平方后，化为 x 与 y 的二次方程，证明它代表圆心为 z_0 半径为 ρ 的圆周.

例 1.10　如果复数 $a + \mathrm{i}b$ 是实系数方程 $a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$ 的根，那么 $a - \mathrm{i}b$ 也是它的根.

【分析】　注意到 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 为实数，即 $a_k = a_k^*(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$，$a - \mathrm{i}b$ 为 $a + \mathrm{i}b$ 的共轭复数，我们可利用复数的共轭运算与根的定义证明.

证　如果复数 $a + \mathrm{i}b$ 是所给实系数方程的根，则

$$a_0(a+\mathrm{i}b)^n + a_1(a+\mathrm{i}b)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(a+\mathrm{i}b) + a_n = 0$$

上式两边取共轭运算可知

$$a_0[(a+\mathrm{i}b)^n]^* + a_1[(a+\mathrm{i}b)^{n-1}]^* + \cdots + a_{n-1}(a+\mathrm{i}b)^* + a_n = 0$$

进而

$$a_0(a-\mathrm{i}b)^n + a_1(a-\mathrm{i}b)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(a-\mathrm{i}b) + a_n = 0$$

这说明 $a - \mathrm{i}b$ 也是所给方程的根.

例 1.11　解方程 $z^* = z^{n-1}$（n 为自然数）.

【分析】　如果令 $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ 将方程 $z^* = z^{n-1}$ 或 $re^{-\mathrm{i}\theta} = r^{n-1}e^{\mathrm{i}(n-1)\theta}$ 利用实虚部相等化为二个实方程 $r\cos\theta = r^{n-1}\cos(n-1)\theta$ 与 $-r\sin\theta = r^{n-1}\sin(n-1)\theta$，那么从此实方程解出 r, θ 是比较困难的. 但给方程两边取绝对值可知 $|z^*| = |z|^{n-1}$，注意到 $|z^*| = |z|$，我们可先求出 $|z|$，然后再通过 $z^* = \frac{|z|^2}{z}$ 解出 z. 另外，由

于不同的自然数 n 可给出不同的解，这也同时需要对 n 加以讨论．

解 (1) 当 $n=1$ 时，方程变为 $z^*=1$，此时解为 $z=1$.

(2) 当 $n=2$ 时，方程变为 $z^*=z$，z 为全体实数．

(3) 当 $n\geqslant 3$ 时，由 $z^*=z^{n-1}$ 得 $|z^*|=|z^{n-1}|$ 或 $|z|=|z|^{n-1}$. 于是 $|z|=0$ 或 $|z|=1$. 显然 $|z|=0$ 给出 $z=0$，当 $z\neq 0$ 时，满足方程 $z^*=z^{n-1}$ 的复数模等于1，即 $|z|=1$. 由于 $zz^*=|z|^2=1$，给方程两边同乘以 z 可知

$$zz^*=z^n \quad 或 \quad z^n=1$$

从而 $z=\sqrt[n]{1}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$. 显然当 $k=0$ 时此解也包含了当 $n=1$ 时的解．

故方程的解当 $n=2$ 时为全体实数；当 $n\neq 2$ 时为 $z=0$ 或 $z=e^{\frac{2k\pi}{n}i}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

例 1.12 对于映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$，求出圆周 $|z|=2$ 的像．

【分析】 由函数 $w=f(z)$ 构成的映射，只要求出 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)$ 的与虚部 $v(x,y)$，就相当于 xoy 平面到 uov 平面的变换：$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$. 对于 z 平面上的曲线，写出其参数方程后，便容易得到像曲线的参数方程．

解 记 $z=x+iy$，$w=u+iv$，则映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$ 相当于 $u+iv=x+iy+\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$，或

$$\left.\begin{aligned} u&=x+\frac{x}{x^2+y^2}\\ v&=y-\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

对于圆周 $|z|=2$，其参数方程为

$$\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases} \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$