决策分析

陈 珽编著

科学出版社

决 策 分 析

陈 珽 编著

科 学 出 版 社
1 9 8 7

内 容 简 介

决策分析是帮助工业企业各级管理干部制定决策的科学分析方法．本书介绍制定决策的基本分析方法和有关的基础理论．

全书共三篇十四章．第一章至第五章为随机性决策分析；第六章介绍决策分析方法的实施步骤和人制定决策时的某些行为；第七章至第十一章为多目标决策分析;第十二章介绍多个决策人的群决策问题;第十三章和第十四章为序贯决策．

书中列举了不少例题,以帮助读者理解本书内容,并掌握和发展这些方法去解决实际中所面临的具体问题．

本书可供工业企业各级管理干部、工程技术人员、科学工作者以及大专院校的管理专业、系统工程专业与应用数学专业的师生阅读．

决 策 分 析

陈 珽 编著

责任编辑 李淑兰

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987年9月第一版 开本：787×1092 1/16

1987年9月第一次印刷 印张：21 3/4

印数：0001—7,000 字数：499,000

ISBN 7-03-000062-5/TP·7

统一书号：15031·856

定价： 5.10 元

前　　言

在工业企业的经营管理工作中，经常需要制定各种决策．决策分析是帮助工业企业各级管理干部制定决策的一种科学分析方法．研究这种方法，并运用它去解决我国四化建设中的实际问题，对提高我国工业企业的经营管理水平是有很大帮助的．

决策分析是一门年青的学科，它的前身是本世纪四十年代开始建立起来的统计决策理论．六十年代以后，以统计决策理论为基础向应用方面发展，研究的范围也日益扩大，从单目标问题扩展到多目标问题，从单个决策人扩展到由多个决策人组成的领导集体，从一次制订决策扩展到多次序贯地制订决策，如此等等，形成了一个十分活跃的、生气勃勃的研究领域．但是，许多有重大实际意义的决策问题，到目前为止还没有非常有效的分析方法．因此对于有能力的、勇于探索的科学研究工作者，这个研究领域仍然是一片待开垦的处女地，能提供许多有意义的研究课题．

本书的编写目的是介绍制定决策的基本分析方法和有关的基础理论．目前已经提出了很多种分析方法，本书只选择了部分较有实用价值的方法进行介绍，同时还注意避开了较深奥的理论问题．书中枚举了一些例题，虽然这些例题多数是虚拟的，但对帮助读者理解本书的内容，并掌握和发展这些方法去解决我国工业企业经营管理中的实际问题，或许是有帮助的．

本书分为三篇：第一篇为随机性决策分析．第一章到第四章介绍以统计决策理论为基础发展起来的决策分析；第五章介绍随机优势，它是从研究财经问题开始的另一类分析方法；第六章介绍决策分析方法的实施步骤和人在制定决策过程中的某些行为问题．第二篇为多目标决策分析．第七章介绍多目标决策的基本概念；第八章把本书第一篇中的效用理论推广到多目标决策问题．由于多属性效用(或价值)函数常常难于估计，因此很多人提出了许多种寻求多目标决策问题解的更有实用价值的方法，包括寻求非劣解和最佳调和解，这是本书第九章到第十一章的内容．有多个决策人的群决策问题，则是本书第十二章的内容．第三篇为序贯决策分析，包括单目标问题和多目标问题等两章，介绍确定性的和随机性的序贯决策问题的基本分析方法．

从模糊数学奠基人 L.A.Zadeh 开始，就注意把模糊数学运用到决策分析，二十多年来发表了许多论文和专著，它是决策分析中一个有意义的研究领域．为了不使本书的篇幅过大，编者没有收入这方面的内容，有兴趣的读者可阅读有关的中、外文书籍．

由于决策分析还不是一门很成熟的学科，在国内外文献中采用的专门名词(包括中译名)不尽一致，在编写本书的过程中，编者遇到了这方面的困难．本书采用的名词不一定恰当，希望读者阅读后提出宝贵的意见．

近年来，我国许多专家学者发表了很多决策分析的论文和著作．编者收集了一部分列入本书的参考文献之中，但宥于见闻，难免挂一漏万，敬希见谅．

本书中有星号(*)的章节以及 § 4.8 中的 4.8.2，4.8.3 和定理 3.1、定理 12.1 的证明，在初次阅读时可以略去，以后有必要时再补看．

在本书编写过程中，曾与岳超源、王书宁、吕珂、唐大宏等同志进行过有意义的讨论．岳超源同志详细阅读了全部底稿，提出了许多修改意见，作者对他们的帮助，致以衷心的感谢．

由于水平所限，书中一定会有不少缺点和错误，请读者批评指正．

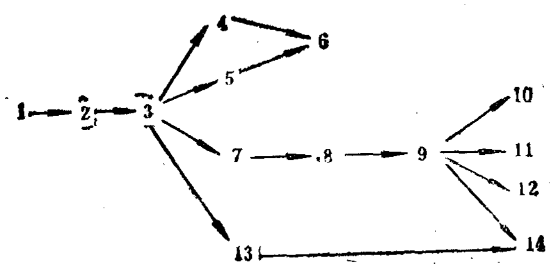
陈　珽

一九八六年二月

目　录

第一篇　随机性决策分析

各章间关系图



第一篇　随机性决策分析

第一章　随机性决策问题的基本概念

人们在日常生活和工作中经常遇到许多需要作出判断和决定的问题．例如，在天气晴雨不定的情况下，出门是否要带伞？在市场需求难于准确预测的情况下，是否应生产一定数量的某种新产品？如此等等．这类问题称为随机性决策问题．本章首先介绍它的基本概念和基本分析方法，然后再介绍它的发展简史．

§1.1　随机性决策问题的基本特点

随机性决策问题的基本特点，是后果的不确定性和后果的效用，现分述如下．

每个随机性决策问题都包含两个方面，即决策人采取的行动(简称决策)和自然状态(简称状态)．在带伞问题中，决策人的决策是带伞或不带伞，状态是下雨或不下雨．在生产问题中，决策人的决策是生产或不生产某种产品，如果生产，应生产多少件，状态是该产品的市场需求量．状态不能由决策人控制，而且在事先决策人还不能对它准确预测．由于状态的不确定性，故不论决策人采取什么行动，都可能产生各种不同的后果．例如带伞问题，如决策人带伞，则有两种可能的后果，即带伞遇雨和带伞不遇雨．如决策人不带伞，也会有两种后果，即不带伞遇雨和不带伞不遇雨．因此，这个带伞问题共有两种决策和四种后果．生产问题的情况更复杂一些，决策人能采用的决策有许多种，例如，他可以不生产，也可以生产一万件、五万件或十万件．这种产品在市场上的销售可能有三种情况，即畅销、滞销或销路一般，它们是这个问题的状态．由于这个问题的决策有四种，而状态有三种，因此能产生十种可能的后果(不生产只有一种后果)．因为出现什么状态是不确定的，所以，决策人作出某种决策以后会出现什么后果也是不确定的．后果的这种不确定性是随机性决策问题的主要特征之一．的确，对于带伞问题，如决策人在出门之前能肯定天晴或下雨，则是否带伞就无需作任何决策分析了．

随机性决策问题的另一个特点是需要确定各种后果的效用．效用是后果价值的量化．由于在不确定情况下，无论决策人采取什么决策，他都会遇到他事先不能完全预料的后果，因此，他要承担一定的风险．各个决策人对冒风险的态度往往不相同．例如，老年人很害怕没有带伞遇到雨，而青年人则较少顾虑．所以，同样的后果对不同的决策人会产生不同的效用．此外，即使在没有风险的情况下，不同的决策人对各种后果也有不同的偏好．在进行定量的决策分析之前，必须确定所有后果的效用．只有这样，人们才能比较各种决策的优劣，并从其中选择他们所最喜爱的那个决策．

以上两点，即后果对决策人的不确定性(它又是由状态的不确定性所引起的)和对所

有后果赋于效用，是决策分析中的两个关键问题．在决策分析中，状态的不确定性主要用主观概率去表示，而研究后果的效用则有效用理论，我们将在本编的第二章和第三章中分别介绍．

综上所述，每个统计决策问题都包含有以下三个要素：

(1) **非空集 Ξ**．它包含所有可能的自然状态，例如前面提到的带伞问题有两个自然状态，即 $\Xi=\{\theta_1,\theta_2\}$，$\theta_1$ 为下雨，θ_2 为不下雨；生产问题有三个自然状态，即 $\Xi=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$，$\theta_1$ 为商品畅销，θ_2 为商品销路一般，θ_3 为商品滞销．

(2) **非空集 $\mathscr{A}$**．它包含了决策人所有可能采取的行动．例如在带伞问题，决策人能采取的行动有两种，即 $\mathscr{A}=\{a_1,a_2\}$，a_1 为带伞，a_2 为不带伞．在生产问题有四种行动，即 $\mathscr{A}=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$a_1$ 为不生产，a_2 为生产一万件，a_3 为生产五万件，a_4 为生产十万件．

(3) **效用函数 $u(\theta,a)$**．它是定义在 $\Xi\times\mathscr{A}$ 上的一实值函数，包含了各种后果对决策所产生的效用．例如带伞问题有四种可能的后果，因此有四个效用值；在生产问题上则有十个．效用函数的值将用第三章提供的方法去确定，它可以为正值也可以为负值．对于某个效用函数，当我们认为对应于正值的后果使决策人受益，则对应于负值的后果使决策人遭受损失．在有些文献中也用损失函数 $l(\theta,a)$ 去代替效用函数．

如果一随机性决策问题不包含任何不确定因素，那么根据问题中的上述三要素，决策人很容易确定最优行动．这就是在给定的自然状态下选择一行动 a 使相应的效用 $u(\theta,a)$ 为最大．根据这个原则，如天下雨则带伞，否则不带伞．因为下雨带伞的效用比不带伞大，而不下雨不带伞的效用又比带伞大．

但在实际的随机性决策问题中，决策人事先总不能清楚地了解尚未发生的自然状态，或者说，自然状态对决策人总有某种程度的不确定性，因此采取正确的行动就不是很简单的事．对于这类不确定问题，决策人在采取行动之前首先应对每种自然状态出现的可能性作出估计．例如在带伞问题中，下雨的可能性有多少？在生产问题中，生产一定数量的产品投放市场以后其销路将如何？由于自然状态还未出现，决策人只能凭他的经验、常识和收集到的信息去主观地判断各种自然状态出现的概率．例如他估计明天下雨的概率为 p，不下雨的概率为 $1-p$．他估计某种产品投放市场后畅销的概率为 p_1，销路一般的概率为 p_2，滞销的概率为 $1-p_1-p_2$．由于这种概率不能通过在相同条件下的大量重复试验去确定，只能由决策人主观估计，因此称为主观概率．由于主观概率是在没有进行任何试验之前设定的，因此它的分布称为先验分布．我们将用 $\pi(\theta)$ 去记自然状态 θ 的先验密度．关于主观概率的问题将在本编第二章详细讨论．

§1.2 随机性决策问题的基本分析方法和步骤

制定决策有各种各样的办法．在许多情况下人们往往是根据自己的经验或直觉去作出判断和决定．例如，出门是否带伞，在没有听到天气预报时，每个人将根据自己的经验去作决定．但是，对于一些复杂的问题，例如制定产品的生产计划，只凭经验往往不可能作出正确决定，需要采用一种合乎逻辑的方法去帮助人们思考，这就是本书将介绍的决策分析方法．这种方法是使用由决策人自己判断的概率和主观估计的效用函数，去制定决

策的一种典范的方法．这种典范方法的基本思想可用下例说明．

我们研究上节的生产问题．这个问题可用图 1.1 的决策树去表示．图中的方点称为决策点，圆点称为机会点，a_1，a_2，a_3 和 a_4 称为决策(或行动或方案)，它们由决策人所选择，相应的分枝称为决策枝．图中的 θ_1，θ_2，θ_3 和 θ_4 称为状态，它们由客观环境所确定，相应的分枝称为机会枝．在每个机会枝上注明有概率 p_{ij}，它表示采取决策 a_i 时，状态 θ_j 的概率．由决策 a_i 和状态 θ_j 联合产生的后果的效用在图中用 $u(a_i, \theta_j)$ 表示．

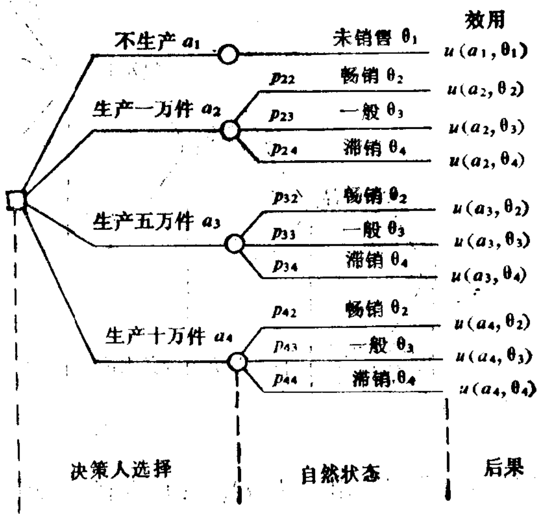


图 1.1 生产问题的决策树

根据 Von Neumann-Morgenstern 的理论，如果一决策人对一决策问题的各种后果的偏好模式是合乎理性的，即满足一定的理性行为公理，则他对后果的偏好模式能用效用函数去表示，而且他采取某一决策 a_i 时的效用，就是以下的期望效用：

$$u(a_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} u(a_i, \theta_j), \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{1.1}$$

上式中的 $u(a_i, \theta_j)$ 是状态为 θ_j 时采取行动 a_i 的效用，而 p_{ij} 为后果 (a_i, θ_j) 发生的概率．在本例中 $m = 4$，$n = 4$．理性行为公理将在 § 3.1 介绍．

计算了每种决策的效用以后，按照理性行为公理决策人应当选择期望效用最大的那个决策作为最优决策．

在上例中我们采用了决策树．决策树是分析随机性决策问题的非常有用的工具，它能直观地把决策问题的结构表达清楚．

决策树也可以用来表示很复杂的决策问题．例如，把上述生产问题作更细致的考虑，则它包含有如下的一系列决策过程；决策人首先要决定是否发展某种产品．如果认为要发展，接着就应考虑研制这种产品的费用．由于研制费用事先不能精确核算，决策人将把它作为一自然状态看待．如果产品研制成功，决策人应决定该产品是否投入批量生产．如果产品决定批量生产，产品的生产成本就提到了议事日程．由于生产成本包含若干不确定的因素，决策人事先也难精确核算，因此也应把它作为自然状态．产品投放市场之前，决策人还需要设定它的价格，投放市场后，产品的销售量决定了这种产品将盈利或赔本．

在上述决策过程中，产品是否发展？是否投产？以及设定销售价格，都是决策人的任务，但产品的研制成本、生产成本、销售数量等则属于自然状态，它们都具有某种不确定性．图 1.2 是这个决策过程的决策树．

当决策人设定了各自然状态的先验密度和各后果的效用以后，求解这个多级决策问题在理论上是容易的．分析的步骤是首先设定产品的销售量的概率分布．这个分布对应于给定的研制费用、生产成本和商品价格．当产品销售量的先验密度 $\pi(\theta)$ 为已知时，就

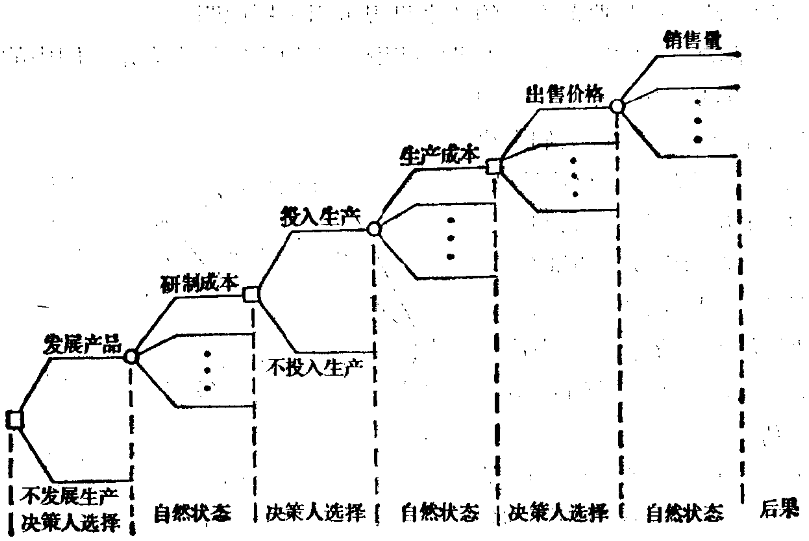


图 1.2　多级决策树

能计算其期望效用 $u(\theta, a)$. 然后选择一种价格 a_0 使期望效用为最大. 我们再设定生产成本的先验密度并计算当研制费用给定时生产这种产品的期望效用. 把它和不投入生产的效用作比较,如果投入生产的期望效用要大一些,则投产,否则不投产. 最后再设定研制费用的先验密度并计算其期望效用,把它和不发展这种产品的效用作比较,作出是否发展这种产品的最后决定.

由上面的讨论可知,决策分析的基本步骤有以下四步:

第一步　构成决策问题. 这一步要为决策问题提供决策(即产生方案或行动)和标定目标. 对于一些简单的决策问题,可供采用的决策和要达到的目标都是非常清楚的. 例如在带伞问题中,可采用的决策仅有两种即带伞和不带伞,而希望达到的目标是在尽可能少地增加决策人负担的情况下不被雨淋湿. 但在复杂的情况下,构成一决策问题并不是一件容易的事. 例如,有的决策问题可供选择的决策很多,但其中许多并不是好的决策. 这时如能有一筛选模型去消除那些"劣"的决策,就十分有利于下一步的分析. 又如有的决策问题,初看起来似乎完全没有合理的决策. 这时需要从问题的目标出发,去启发人们创造决策,如此等等.

第二步　确定各种决策可能的后果并设定各种后果发生的概率.

第三步　确定决策人的偏好,并对效用赋值.

第四步　评价和比较决策. 这一步的目的是在以上三步的基础上去选择决策人最满意的决策. 评价决策的依据是计算各种决策的期望效用. 根据 Von Neumann-Morgenstern 的效用理论,可以选择期望效用最大的决策作为决策人最满意的决策.

以上分析步骤可用图 1.3 表示.

以上步骤并不是一成不变的,例如为了分析的方便,有时可把第三步放在第二步之前进行. 如果决策人对于分析的结果感到不够满意,则需要收集新的信息,并把这种新信息运用到决策分析中去. 这个问题我们将在第四章贝叶斯分析中介绍.

在图 1.3 中包含有灵敏度分析,需要对它作一点说明. 一个复杂的决策问题往往有

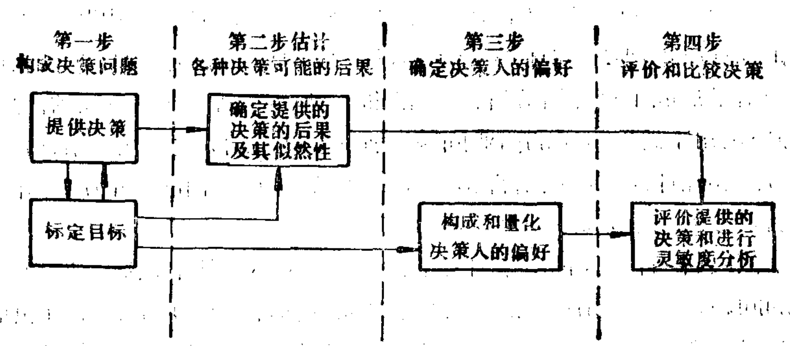


图 1.3 决策分析的基本步骤

多个不确定因素影响决策的后果，所以它有多个状态变量. 例如一产品的销售额，不仅决定于顾客的爱好，还决定于该产品的质量、价格等. 这些因素在开始研制产品时都是不确定的. 要求比较准确地估计所有状态的概率是件困难的事. 因此，如果能把状态用它的标称值作为一个确定的量去处理，分析起来就容易得多. 把一个不确定量作为一个确定量去处理，能不能这样做？要对它进行灵敏度分析.

灵敏度分析有两种，一种称为确定的灵敏度分析，另一种称为随机的灵敏度分析. 确定的灵敏度分析是把所有的状态变量除一个以外都设定在它们的标称值上，然后，让这个未设定的状态变量的值在一定范围内变化，去观察它所产生的后果的效用的相应变化，并计算其灵敏度. 如果通过灵敏度分析发现某个状态变量的变化对其后果有严重的影响，则值得进一步去设定它的概率分布. 否则，只需采用它的标称值就够了. 由于我们只需要对状态变量能不能作为确定量处理作粗略估计，因此，采用确定的灵敏度分析，一般也可以了. 但如果灵敏度分析的精度要求比较高，那就需要采用随机的灵敏度分析. 这种分析和确定的灵敏度分析不同之处，在于它考虑了状态变量是随机变量这个特点. 在进行这种分析时，除一个状态变量被规定在一定范围内取值外，其余的状态都作为随机变量，它们的条件分布密度被设定. 这种分析往往是在决策分析的第四步进行. 对于十分灵敏的状态，有可能需要进一步收集新的信息，以改进其概率估计.

对决策变量作确定的灵敏度分析也是很重要的. 借助于这种分析可以找出其中关键的决策变量，这些决策变量对后果有重要的影响.

§1.3 随机性决策分析的发展简史

决策分析是运筹学中一个年青的分支，它是在统计决策理论的基础上发展起来的. 虽然两个世纪以前 Bernoulli[63] 就发表了一篇论文论述效用的概念和效用函数的可能形式，但直到 1931 年 Ramsey[142] 才根据主观概率和效用这两个概念提出制定决策的理论. 在不确定性方面，De Finetti[79] 对主观概率的结构作了重大的贡献，而在不确定情况下制定决策的现代效用理论则是由 Von Neumann-Morgenstern[169] 发展起来的. 他们提出了一集公理，并指出当满足这一集公理时，能对决策问题的每种后果设定效用，而且决策人最喜爱的方案必定是期望效用最大的方案.

在五十年代初期 Wald[170] 和 Savage[156] 提出了统计决策问题并逐步建立了相应的

理论体系，它有严格的哲学基础和公理框架. Raiffa 和 Schlaiffer[141] 等人在六十年代进一步发展了统计决策理论，他们考虑了通过试验去收集新的信息以改进制订的决策的可能性，这些结果形成了贝叶斯分析. 与此同时，Raiffa 等人，主要是哈佛大学商学院的人，把这种理论用于研究真实的商业问题，称为应用统计决策理论. 随后 Howard[107] 把系统分析方法和统计决策理论结合起来，进一步发展了实用的分析方法，并采用一更有应用倾向的名称——决策分析.

六十年代以后，许多人把决策研究的范围继续扩大，其中包括：1) 关于制订决策的行为方面的问题，2) 效用函数和主观概率分布的估计，3) 序贯决策（包括马尔科夫决策），4) 多目标决策，5) 群决策，6) 模糊集理论在决策分析中的应用，7) 发展软件等等. 这些问题中一部分已超越了 Howard 定义的"决策分析"的范围，因此是否应采用一更有概括性的名词是值得斟酌的. 编者仍采用"决策分析"一词去表达本书所涉及的内容，而把 Howard 所定义的决策分析的内容归入第一篇，称为随机性决策分析.

第二章 先验信息和主观概率

随机性决策问题的基本特点之一是后果的不确定性，它又是由状态的不确定性所引起的. 状态的不确定性，往往不能通过在相同条件下的大量重复试验，去确定它的概率分布，只能由决策人作出主观估计，因此称为主观概率.

决策人作出主观估计的依据，是他所获得的先验信息. 所谓先验信息，是指进行贝叶斯分析时，在通过试验收集有关状态的新信息之前，决策人所掌握的信息. 由状态的先验信息所确定的概率分布，称为先验分布，它是进行贝叶斯分析的基础. 本章将介绍主观概率的基本概念和设定先验分布的若干方法.

§2.1 主观概率的基本概念

概率论是研究随机事件的数量规律性的理论. 人们通常通过随机试验去观察随机事件. 所谓随机试验，是指不能事先准确地预言它的结果，而且在相同条件下可以重复进行的试验.

有许多决策问题不允许人们去进行随机试验，是由于两个原因. 首先，某些决策问题需要对尚未发生，又具有某种不确定性的事件进行预测. 这些事件不允许人们在相同条件下重复进行试验. 例如在第一讲中列举的带伞问题和生产问题，都是这种情况. 未来的天气和将要在市场上销售的商品，都不可能事先在相同条件下重复作试验，因此，不能用随机试验去确定他们的概率. 此外，有些决策问题在理论上虽然可以进行随机试验，但由于各种原因，实际上也无法进行. 例如有关洲际导弹发射的决策问题，将涉及导弹命中的概率. 这种概率虽然原则上能通过在相同条件下的重复试验去确定，但由于发射一枚洲际导弹的费用十分昂贵，事实上也不可能多次重复发射.

既然许多决策问题的概率不能通过随机试验去确定，那就只能由决策人根据他们自已对事件的了解去设定. 这样设定的概率反映了决策人对事件掌握的知识所建立起来的信念，称为主观概率，以区别于通过随机试验所确定的客观概率. 概率的客观性是指它独立于任何使用者的个性.

主观概率和客观概率在概率论发展的过程中都各有其支持者，他们的观点根本不同. 客观概率论者认为概率如同重量、容积、硬度一样，是被研究对象的一种物理属性. 而主观概率论者则认为概率是人们对现象的知识的现况的一种测度，而不是现象本身的测度，因此不是被研究对象的一物理属性. 例如，对投掷硬币问题，就有两种不同的解释. 客观概率论者认为投掷硬币出现某个面朝上的概率，是硬币的一物理属性. 主观概率论者则认为这个概率，是建立在人们对投掷硬币这个物理现象的认识的基础上的. 如果这个硬币两面完全对称(事实上并不完全对称)，则我们没有理由认为投掷硬币出现某个面朝上的机会要比另一面多.

主观概率论是进行决策分析的依据. 这是因为客观概率论者要求在相同条件下从现

象的重复性，去得到他们认为有意义的推论．如前所述，许多决策问题，根本无法进行重复试验．而主观概率论者在接受到任何份量的先验信息时，都能对决策问题进行逻辑推理．当然，主观概率论者要能比较正确地设定主观概率，仍有赖于对事件作周密的观察，去获得先验信息，这种信息并不是主观臆造的．而且先验信息愈丰富，则设置的主观概率愈准确．从这个意义看，主观概率论者并不能也不应当否定实践的观点是认识论的第一和基本观点．因此，需要把主观概率和主观唯心论加以区别．

借助于先验信息所确定的主观概率的分布，称为先验分布．设定主观概率，也就是设定离散型或连续型的先验分布．

主观概率与客观概率虽有本质区别，但在定义概率方面却有相同之处．它们都必须遵循若干公认的假设(或称公理系统)，然后从这些假设出发，利用逻辑推理的方法导出更复杂的不确定事件的规律．主观或客观概率的这些基本假设是：

(1) 设 Ω 为一非空集，集中的元素可以是某种试验或观察的结果，也可以是第一章中列举的自然状态，如商品的销路、天气的晴雨等．我们把这些元素当作抽象的点 ω，因而集合为 $\Omega=(\omega)$．

(2) 设 $\mathscr{F}$ 是 Ω 中的一些子集 A 所构成的集．$\mathscr{F}$ 满足以下条件：

1) $\Omega \in \mathscr{F}$；

2) 如 $A \in \mathscr{F}$，则 $\bar{A} \in \mathscr{F}$ $(\bar{A}=\Omega \backslash A)$；

3) 如可列多个 $A_m \in \mathscr{F}$，$m=1,2,\cdots$，则它们的并集也属于 $\mathscr{F}$，即

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathscr{F}. \tag{2.1}$$

(3) 设 $P(A)$ $(A \in \mathscr{F})$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的一实值集函数，如果它满足下列条件，就称为 $\mathscr{F}$ 上的(主观或客观)概率测度，或简称概率．这些条件是

1) 对于每个 $A \in \mathscr{F}$，有 $1 \geqslant P(A) \geqslant 0$；

2) $P(\Omega)=1$；

3) 如可列多个 $A_m \in \mathscr{F}$，$A_iA_j=\phi$，$i \neq j$，则

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right)=\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m). \tag{2.2}$$

这里称点 ω 为基本事件，$\mathscr{F}$ 中的集 A 称为事件，$\mathscr{F}$ 是全体事件的集，$P(A)$ 称为事件 A 的(主观或客观)概率，三元总体 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 称为(主观或客观)概率空间．

从上面的定义可知，主观概率和客观概率都服从于同一组假设．因此，可以把适用于客观概率的整套逻辑推理方法搬过来，用于主观概率．

§2.2 主观设定先验分布的方法

由于主观概率也是一概率测度，因此设定主观概率的方法和其它测量方法有类似之处．例如要测量一物体的重量，我们总是把这个物体和另一个物体去作比较，找出它们重量之间的关系．由于比较的是两个物体，因此称这种关系为二元关系．如果一个人左右手各提一个口袋，他能够判断哪个口袋要重一些．如果要更精确地测量一物体的重量，那就需要定一个标准重量，例如一公斤或一吨，然后用天平(或秤)把未知重量的物体和已知

重量的法码(或秤砣)进行平衡,于是从已知的重量就能确定未知的重量.这个概念可以移植到设定不确定事件的主观概率上.

在设定主观概率时,我们也要选择一事件作为比较的基准.这个基准是一概率已知的事件,我们把它和概率待定的事件去作比较.设概率已知事件的概率能进行调整,直到决策人认为两个事件(已知的和待定的)是等可能发生的.另一种办法是把一个事件分割为两个等可能事件,如果这两个事件 A 和 B,既是互不相容的,即 $A\cap B=\phi$,又构成整体,即 $A\cup B=\Omega$,则由以上假设可知,这种等可能就意味着两个事件的发生有 50% 对 50% 的机会.因而我们能设定它们的概率均为 0.5.以上两个方法的优点在于它们比较符合人们认识事物的规律.一个人判断两个重量相等的口袋,要比判断两个重量不同的口袋,并指出:"左手拿的口袋要比右手拿的口袋重 2.5 倍",容易得多.

由于上面列举的比较方法都涉及两个事件的二元关系,因此我们还需讨论一下这种二元关系的一般性质.事件 A 和 B 在似然性方面的关系总不外是:"A 比 B 似更可能(发生)",或者"B 比 A 似更可能",或者"A 和 B 等可能".我们把它们分别记作"$A\succ B$","$B\succ A$"和"$A\sim B$".如果我们说"A 至少如 B 那样可能",则记为"$A\succcurlyeq B$".我们认为这种二元关系将符合以下的假设:

假设 1 连通性:事件 A 和 B 按照它们发生的似然性是可以比较的,即在以下三种关系中

$$A\succ B,\ A\sim B,\ A\prec B \tag{2.3}$$

必有一种也仅有一种成立.

如果我们把 A 和 B 当作两个物体的重量,把符号 $\succ$,$\sim$ 和 $\prec$ 理解为重于、等于和轻于,则假设 1 显然满足.但如果把 A 和 B 当作任何两个随机事件,并去比较他们发生的似然性,有时就会遇到困难.例如,事件 A 是"张三在下届选举中当选为区人民代表",而事件 B 是"李四在期末考试中某门功课不及格",则比较起来有些困难.但是幸好我们要比较的事件总是处在同一决策问题中,因此一般在性质上不是很悬殊的.例如,某一决策问题涉及一种新产品第一年的销售量,那么我们比较两个事件,一个是"产品销售额超过 150,000 件",另一个是"产品销售额等于或低于 150,000 件",比较这两个事件发生的似然性,当然是比较容易的.

有的方法也可能要把两个不同类的事件拿去作比较,例如,在本节后面将要介绍的概率盘法,就是把概率盘作为概率已知的事件(基准事件),把它和概率待定的事件(可以是各式各样的)去作比较.但在这里由于概率盘是一个实物,人们能直接观察到,因而在比较时仍然可以减轻人们在智力上的负担.

假设 2 传递性:如 A,B 和 C 是三个事件,设 B 至少如 A 那样可能 ($A\preccurlyeq B$),而 C 又至少如 B 那样可能 ($B\preccurlyeq C$),则 C 至少如 A 那样可能 ($A\preccurlyeq C$).

这个假设在物体的重量测量中显然是正确的.在似然性的范围内,如认为明年某种商品价格上涨率高于 15% 没有 12~15% 那样可能,而 12~15% 的上涨率又没有低于 12% 那样可能,则决策人应当承认该商品价格明年上涨率高于 15% 的可能性比低于 12% 的可能性要小.

假设 3 设事件 A 是事件 B 的一部分,即 A 包含在 B 之中,记作 $A\subset B$,则事件 B 的发生至少如 A 那样可能,即 $A\preccurlyeq B$.