

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

複變函數引論

下 冊

И. И. ПРИВАЛОВ 著

北京大學數學力學系
數學分析與函數論教研室譯



商 務 印 書 館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本



複變函數引論

下冊

И. И. 普里瓦洛夫著

北京大學數學力學系
數學分析與函數論教研室譯

商務印書館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的伊·伊·普里瓦洛夫(И. И. Привалов)著複變函數引論(Введение в теорию функций комплексного переменного)1948年第八版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為綜合大學與師範大學物理—數學系教科書。

本書中譯本分上下兩冊出版。下冊內包括單值函數的孤立奇異點、殘數理論、畢卡定理、無窮乘積與它對解析函數的應用、解析開拓、橢圓函數理論初步、保角映射的一般原則、單葉函數的一般性質等。

本書由北京大學數學力學系數學分析與函數論教研室集體翻譯。

複 變 函 數 引 論

下 冊

北京大學數學力學系
數學分析與函數論教研室譯

★版權所有★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路一一一號

中國圖書發行公司 總經售

商務印書館北京廠 印刷

(53211B)

1953年11月初版 版面字數171,000

印數1—3,500 定價¥15,000

下 冊 目 錄

第六章 單值函數的孤立奇異點

§ 1. 羅朗級數	235
1. 解析函數的羅朗展開式(235)。—2. 羅朗級數的正則部分與主要部分(238)。—3. 羅朗展開式的唯一性(239)。	
§ 2. 單值函數的奇異點的分類	240
1. 孤立奇異點的三種類型(240)。—2. 可去奇異點(240)。—3. 極點(241)。—4. 塞點與極點間的聯系(242)。—5. 本性奇異點(244)。—6. 函數在孤立奇異點鄰域內的性質(246)。	
§ 3. 解析函數在無窮遠點的性質	247
1. 無窮遠點的鄰域(247)。—2. 在無窮遠點的鄰域內的羅朗展開式(248)。—3. 函數在無窮遠點鄰域內的性質(249)。—4. 哥西型積分轉化成哥西積分的條件(250)。	
§ 4. 最簡單的解析函數族	251
1. 整函數(251)。—2. 半純函數(252)。—3. 展開有理函數成部分分式(254)。—4. 代數基本定理(254)。	
§ 5. 在流體動力學中的應用	255
1. 無渦旋且無源泉的流體流動(255)。—2. 流動的特徵函數(257)。—3. 繞過圓柱體的無環流流動(258)。—4. 純環流(260)。—5. 一般情形(261)。	

第六章 習 題	262
---------------	-----

第七章 殘數理論

§ 1. 殘數的一般理論	266
--------------------	-----

1. 函數關於孤立奇異點的殘數(266)。—2. 關於殘數的基本定理(267)。
—3. 函數關於極點的殘數之計算(268)。—4. 函數關於無窮遠點的殘
數(270)。—5. 積分 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ 的計算(271)。

§ 2. 殘數理論的應用274

1. 代數基本定理(274)。—2. 儒歇定理(275)。—3. 殘數理論在定
積分計算上的應用(277)。—4. $\operatorname{ctg} z$ 展開成簡單分式(282)。

第七章 習 題285

第八章 畢卡定理

§ 1. 布洛赫定理287

1. 關於全純函數的反函數的定理(287)。—2. 布洛赫定理的證明(288)。

§ 2. 朗道定理290

1. 朗道定理的證明(290)。—2. 畢卡的小定理(292)。

§ 3. 夏特基不等式293

1. 夏特基不等式的導出(293)。—2. 廣義夏特基不等式(295)。

§ 4. 畢卡的一般定理296

第八章 習 題297

第九章 無窮乘積與它對解析函數的應用

§ 1. 無窮乘積298

1. 收斂的與發散的無窮乘積(298)。—2. 無窮乘積收斂性的基本判別
法(300)。—3. 全純函數的無窮乘積表示法(304)。

§ 2. 無窮乘積在整函數理論上的應用306

1. 維爾斯脫拉斯公式(306)。—2. 整函數的無窮乘積表示法(310)。
—3. 把半純函數表作兩個整函數之比(312)。—4. 米他格-列夫勒問
題(312)。

§ 3. 解析函數唯一性定理的推廣313

1. 解析函數唯一性定理可能的推廣 (313)。—2. 雅可比與斯生公式 (314)。—3. 唯一性定理的證明 (317)。—4. 對有界函數來說唯一性定理再進一步推廣的不可能性 (319)。

第九章 習 題320

第十章 解析開拓

§ 1. 解析開拓的原理322

1. 解析開拓的概念 (322)。—2. 維爾斯脫拉斯意義下的完全解析函數的概念 (324)。—3. 按照解析開拓原理在複數域上擴充實變函數 (328)。

§ 2. 例329

1. 單值函數的例 (329)。—2. 多值函數的例 (329)。

第十章 習 題331

第十一章 橢圓函數理論初步

§ 1. 橢圓函數的一般性質333

1. 橢圓函數的定義 (333)。—2. 週期平行四邊形 (334)。—3. 基本定理 (335)。—4. 二級橢圓函數 (341)。

§ 2. 維爾斯脫拉斯函數344

1. 預備定理 (345)。—2. 函數 σ, ζ 與 $\wp$ (345)。

§ 3. 任意橢圓函數的簡單分析表示法354

1. 把橢圓函數表成一些簡單單元之和 (354)。—2. 把橢圓函數表成基本因子的乘積 (356)。

§ 4. 函數 σ_k 358

§ 5. 雅可比橢圓函數361

§ 6. 西他函數365

1. 整周期函數的展開式 (365)。—2. 函數 θ (366)。—3. 函數 θ_k (370)。
—4. 西他函數的性質 (373)。

§ 7. 用西他函數表示雅可比橢圓函數378

§ 8. 雅可比橢圓函數的加法公式	380
第十一章 習題	381

第十二章 保角映射的一般原則

§ 1. 確定保角映射的條件	385
1. 把單位圓變成它自己的映射(385)。—2. 確定保角映射的唯一性的條件(387)。	
§ 2. 保角映射理論的基本原則	389
1. 保存區域的原則(389)。—2. 雙方單值對應的原則(394)。—3. 黎曼-希瓦爾茲對稱原則(395)。—4. 對稱原則的推廣(402)。—5. 解析開拓的希瓦爾茲原則(403)。—6. 調和函數的對稱原則(404)。—7. 對稱原則的應用(407)。	
§ 3. 把單位圓變到一個內部區域的一般變換	408
1. 把單位圓變到一個內部區域的全純函數的解析表達式(408)。—2. 希瓦爾茲預備定理(411)。—3. 應用希瓦爾茲預備定理來估計滿足這個定理的條件的那些函數的導函數(413)。—4. 希瓦爾茲預備定理的一般形式(415)。—5. 變換的重點的存在性(416)。	
§ 4. 解析函數的唯一性	418
1. 由邊界值來確定解析函數的唯一性(418)。—2. 唯一性定理的推廣(419)。	
§ 5. 把二次曲線所包圍的區域變成上半平面的保角映射	420
1. 等軸雙曲線(420)。—2. 拋物線(422)。—3. 雙曲線與橢圓(426)。—4. 把橢圓內部變成半平面的映射(431)。	
§ 6. 單連通區域的保角映射	433
1. 黎曼定理提法的化簡(434)。—2. 輔助函數及其基本性質(436)。—3. 基本預備定理(437)。—4. 黎曼定理的證明(438)。	
§ 7. 在保角映射下邊界的對應關係	441
1. 問題的提法(443)。2. 關於邊界對應的定理的證明(444)。	
§ 8. 把矩形與任意多角形變成上半平面的映射	448

1. 矩形(448)。—2. 雅可比橢圓函數(452)。—3. 多角形(455)。
—4. 三角形(461)。—5. 把多角形的外部變成上半平面的映射(465)。

第十二章 習 題466

第十三章 單葉函數的一般性質

§ 1. 係數問題469

1. 內部面積定理(469)。—2. 外部面積定理(471)。—3. 在單葉函數展開式中含 z^n 項係數的模的上界(472)。—4. 柯北常數(473)。—5. 變形定理(474)。—6. 單葉函數的模的界限(475)。—7. 旋轉定理(477)。
—8. 單葉函數展開式中係數的模的一般界限(478)。—9. 在單葉函數展開式中實係數的模的一般界限(480)。

§ 2. 凸性界限與星性界限481

1. 凸性界限(481)。—2. 星性界限(482)。

§ 3. 構成把單位圓變成特殊區域的單葉保角映射的函數的性質483

1. 星形函數與凸函數(483)。—2. 凸函數與星形函數的展開式中係數的模的上界(484)。

§ 4. 把區域映射成圓的函數的極值問題487

1. 預備定理(487)。—2. 第一極值問題(489)。—3. 第二極值問題(491)。

複變函數引論

第六章 單值函數的孤立奇異點

§ 1. 羅朗級數

1. 解析函數的羅朗展開式 假定 K 與 k 是以點 a 為中心的兩個同心圓周，又 $f(z)$ 是以 K 與 k 為邊界的圓環內的一個全純函數。設令 R 與 r 分別代表這兩個圓周的半徑（圖 86）。我們要按照 $(z-a)$ 的正冪與負冪造一個級數，使得在圓環內的每一點 z 上，也就是說在適合條件： $r < |z-a| = \rho < R$ 的點 z 上，這個級數都收斂於函數 $f(z)$ 。為此目的，我們選取兩個半徑 r' 與 R' ，使得 $r < r' < \rho < R' < R$ ，並且讓 c 與 C 分別代表以 a 為中心 r' 與 R' 為半徑的圓周（圖 86）。

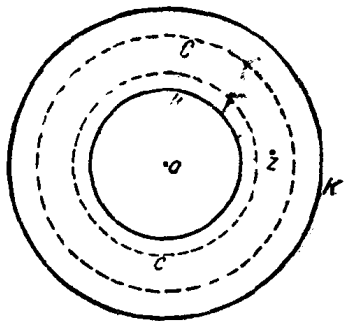


圖 86

根據假設的條件，函數 $f(z)$ 在 c 與 C 之間，包括 c 與 C 在內的圓環上是全純的。利用哥西公式（第四章，§ 3，第 2 段），我們得到：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (1)$$

其中積分路線 C 與 c 都是依正向進行的。

由於在公式(1)中的第一個積分中 ζ 代表圓周 C 上的一點，我們有：

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) \left(1 - \frac{z - a}{\zeta - a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}. \quad (2)$$

這個級數在圓周 C 上是一致收斂的，因為：

$$\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| = \frac{\rho}{R} < 1$$

(參看第五章，§2，第2段)。

在公式(1)的第二個積分中， ζ 代表圓周 c 上一點；於是我們有：

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(z - a) \left(1 - \frac{\zeta - a}{z - a}\right)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}}. \quad (3)$$

級數(3)在 c 上是一致收斂的，因為

$$\left| \frac{\zeta - a}{z - a} \right| = \frac{\rho'}{\rho} < 1.$$

把展開式(2)與(3)代入公式(1)的積分中，由於對 ζ 的一致收斂性，我們可以逐項求積分，於是得到：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)(z - a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)(\zeta - a)^n}{(z - a)^{n+1}} d\zeta. \quad (4)$$

爲了簡單起見，令

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1} d\zeta}{\zeta} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

於是等式(4)就可以改寫成：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-a)^{-n}. \quad (4')$$

c_n 與 b_n 的表達式(5)與(6)可以統合成一個公式：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (n=0, 1, 2, \dots, -1, -2, \dots), \quad (7)$$

其中積分閉路 γ 是給定的圓環內以點 a 為中心的任意一個圓周。

事實上，因為公式(5)與(6)內的被積函數在給定的圓環內到處都是全純的，所以，我們可以在這個圓環內任取一個以點 a 為中心的圓周 γ 來作積分路線而不會改變 c_n 與 b_n 的值；而且在另一方面，我們還有：

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{-n+1}} = c_{-n} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

由此還特別可以看出，由公式(7)所確定的係數 c_n 並不依賴於點 z ，因為我們可以把 γ 了解為給定的圓環內以點 a 為中心的任何一個圓周。

根據所引進的符號，我們可以把展開式(4')寫成：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}, \quad (4'')$$

或

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n. \quad (4''')$$

這樣一來，我們已經得到了函數 $f(z)$ 的表達式即級數(4'')，這個表達式對於給定的圓環內的每一點 z 都成立。又級數(4'')是由兩部分

組成的：第一部分， $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 是一個按照 $z-a$ 的升幂排列的級數（關於 $z-a$ 的幂級數）；第二部分， $\sum_{n=-1}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 是一個按照 $z-a$ 負的降幂排列的級數（關於 $\frac{1}{z-a}$ 的幂級數）。這兩個級數在給定的圓環內的每一點 z 上都收斂。級數(4'')稱為函數 $f(z)$ 的羅朗級數。

2. 羅朗級數的正則部分與主要部分 現在我們分別來考慮構成羅朗級數(4'')的兩個級數。第一個級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 是一個通常的幂級數，因之，它在圓周 K 內所有的點 z 上都收斂，並且代表在圓周 K 內到處全純的一個函數 $f_1(z)$ 。羅朗展開式(4'')中的這第一個級數稱為羅朗級數的正則部分。第二個級數 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 同樣可以看作是一個通常的幂級數，只要取：

$$c_{-n} = b_n, \quad \frac{1}{z-a} = z'. \quad (8)$$

在這個新的符號下，級數變成了下面的形式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z'^n. \quad (9)$$

顯然，當 $\frac{1}{R} < |z'| < \frac{1}{r}$ 時，級數(9)是收斂的，因為當 $r < |z-a| < R$ 時原來的級數是收斂的。

因此，級數(9)，作為 z' 的幂級數，對於適合 $|z'| < \frac{1}{r}$ 的所有的點 z' 都收斂，並且代表 z' 的一個函數，這個函數在 $|z'| < \frac{1}{r}$ 時是全純的。

利用關係(8)回到原來的變數 z ，我們看出，對於適合不等式： $|z-a| > r$ 的所有的點，也就是說，對於圓周 k 外的所有的點，級數 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 都收斂，並且代表一個在 k 外全純的函數 $f_2(z)$ 。展開式(4'')中的這個第二個級數稱為羅朗級數的主要部分。因此，函數可

以表成和的形式：

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z)$$

其中 $f_1(z)$ 在圓周 K 內是全純的，而 $f_2(z)$ 在圓周 k 外是全純的。在以圓周 K 與 k 為邊界的圓環內，函數 $f_1(z)$ 與 $f_2(z)$ 都是全純的。

3. 羅朗展開式的唯一性 與戴勞展開式一樣，對於（在一個給定的圓環內）給定的函數 $f(z)$ ，我們所求得的羅朗展開式（4''）是唯一的。

實際上，如果假定在某一圓環內的所有的點 z 上同時有兩個展開式：

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} c'_n(z-a)^n. \quad (10)$$

以 $(z-a)^{-k-1}$ 乘 (10) 的兩個展開式，並且沿着在圓環內以 a 為中心的任意一個圓周積分。因為兩個級數在這個圓周上都一致收斂，所以我們得到：

$$2\pi i c_k = 2\pi i c'_k \text{ 或即 } c_k = c'_k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

根據第 1 段與第 2 段所講的，可見羅朗級數（4'''）的準確的收斂區域是以點 a 為中心的一個圓環，在這個圓環內 $f(z)$ 是全純的，並且在圓周 K 或 k 上 $f(z)$ 都至少有一個奇異點。特別說來，如果在 K 內函數 $f(z)$ 沒有奇異點，則它的羅朗展開式就變成了戴勞展開式。

例：不難得到以下的展開式：

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \text{當 } 1 < |z| < 2,$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1}-1}{z^n}, \quad \text{當 } 2 < |z| < +\infty.$$

在這裏，對於同一個函數我們有了兩個不同的羅朗展開式；但是，這與展開式的唯一性定理却一點也沒有矛盾，因為這兩個展開式是對不同的圓環做成的。

§ 2. 單值函數的奇異點的分類

1. 孤立奇異點的三種類型 單值函數 $f(z)$ 在圓周 K 內以圓心 a 爲它的唯一的奇異點的情形是特別值得注意的。在這種情形，羅朗展開式

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad (11)$$

除點 $z=a$ 外，在圓周 K 內每一點 z 上都收斂，並且代表一個在 K 內，除圓心外，到處都是全純的函數 $f(z)$ 。在這種情況下，點 a 稱爲函數 $f(z)$ 的孤立奇異點，而 $f(z)$ 在該點的鄰域內 ($z=a$ 除外) 到處都可以用展開式 (11) 來代表。我們就根據單值函數 $f(z)$ 在孤立奇異點的鄰域內的展開式來把孤立奇異點加以分類。有三種可能性：

1. 羅朗展開式 (11) 含有無窮多項 $z-a$ 的負幕。在這種情形，點 a 稱爲函數 $f(z)$ 的一個本性奇異點。
2. 展開式 (11) 只含有有限個 $z-a$ 的負幕。在這種情形，點 a 稱爲函數 $f(z)$ 的一個極點。
3. 展開式 (11) 根本不包含 $z-a$ 的負幕。在這種情形，點 a 稱爲函數 $f(z)$ 的一個可去奇異點。

把單值函數的孤立奇異點分成以上三種類型後，我們現在來闡明在每一種類型的奇異點的鄰域內函數的性質（所謂孤立奇異點 a 的鄰域，我們指的是適合條件： $0 < |z-a| < R$ 所有的點 z ，其中 R 選得這樣小，使得函數 $f(z)$ 在所有這些點 z 上都是全純的）。

2. 可去奇異點 我們先考慮第三種類型的奇異點。在這種情形，展開式 (11) 是一個通常的幕級數，因之，在點 a 的鄰域內，包括點 a 在內，到處都收斂；它的和代表一個在點 a 的鄰域內，包括點 a 在內，到處都

全純的函數。當 $z \neq a$ 時，給定的函數 $f(z)$ 與級數的和相等，因此，如果我們令

$$f(a) = c_0,$$

給定的函數 $f(z)$ 在點 a 就變成全純的了。因此，第三種類型的奇異點可以去掉，只要我們用適當的方法在該點確定函數的值。由此可見，如果點 a 是一個可去奇異點，則我們有： $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$ ；特別說來，有這樣兩個正數 M 與 η 存在，使得

$$|f(z)| < M \quad \text{只要} \quad 0 < |z-a| < \eta. \quad (12)$$

不等式(12)可以簡短地用文字敘述如下：在可去奇異點的充分小的鄰域內，函數是有界的。在下面我們就要看到，反過來，如果函數在孤立奇異點的鄰域內是有界的，這個奇異點就一定是可去奇異點。

3. 極點 現在我們來分析第二種類型的奇異點，即所謂極點。在這種情形，展開式(11)含有有限多項 $z-a$ 的負幕。設 m 為羅朗展開式(11)中 $\left(\frac{1}{z-a}\right)$ 的最高次幕，於是我們有：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m}, \quad (11')$$

其中 $c_{-m} \neq 0$ 。如果 $m=1$ ，則極點 a 稱為簡單的，如果 $m>1$ ，則稱為多重的；數 m 稱為極點的級。以 $(z-a)^m$ ， $z \neq a$ 展開式(11')的兩邊，我們得到：

$$\begin{aligned} (z-a)^m f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n+m} + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_{-2}(z-a)^{m-2} + \\ &\quad + \cdots + c_{-m}. \end{aligned} \quad (13)$$

等式(13)的右邊是一個通常的幕級數，其常數項 c_{-m} 異於零。

因此，點 a 是函數 $(z-a)^m f(z)$ 的可去奇異點，並且我們有：

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) = c_{-m} \neq 0. \quad (14)$$

特別說來，從等式(14)有：

$$\lim_{z \rightarrow a} |z-a|^m |f(z)| = |c_{-m}|. \quad (15)$$

設 q 為小於 $|c_{-m}|$ 的任意一個正數，則根據(15)我們可以找到一個充分小的正數 η ，使得

$$|z-a|^m |f(z)| > q \quad \text{只要} \quad 0 < |z-a| < \eta,$$

$$\text{或即} \quad |f(z)| > \frac{q}{|z-a|^m} \quad \text{只要} \quad 0 < |z-a| < \eta. \quad (16)$$

不等式(16)表明，當點 z 趨向點 a 時， $|f(z)|$ 趨向無窮大，這可以用下面的符號來表示：

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \quad (15')$$

更簡短地說，函數在極點變成無窮。

4. 零點與極點間的聯系 設函數 $f(z)$ 在點 a 有一個 m 級零點。如所周知(第五章, § 2, 第 7 段)，在點 a 的某一鄰域內函數 $f(z)$ 可以表成幕級數：

$$f(z) = c_m(z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots, \quad (17)$$

其中 $c_m \neq 0$ ，或

$$f(z) = (z-a)^m \varphi(z),$$

這裏函數 $\varphi(z)$ 在點 a 全純，並且不等於零。由(17)， $f(z)$ 的倒數 $\frac{1}{f(z)}$ 可以表作下列形式：

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{\psi(z)}{(z-a)^m}, \quad (18)$$

其中函數 $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ 在點 a 全純，並且不等於零。由於我們有：

$$\psi(z) = \psi(a) + \psi'(a)(z-a) + \dots,$$

從(18)我們可以得到,當點 z 在點 a 的鄰域內,並且 $z \neq a$ 時

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{\psi(a)}{(z-a)^m} + \frac{\psi'(a)}{(z-a)^{m-1}} + \dots,$$

由此可見,點 a 是函數 $\frac{1}{f(z)}$ 的一個 m 級極點。

反過來,假定點 a 是 $f(z)$ 的一個 m 級極點,在點 a 的鄰域內($z \neq a$)我們就有:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \quad (19)$$

其中函數 $\varphi(z)$ 當 z 趨向 a 時趨向一個異於零的極限(第3段),因此,我們可以把 $\varphi(z)$ 看作在點 a 全純並且不等於零的一個函數[只需令 $\varphi(a)$ 等於它在點 a 的極限值(第2段)]。利用等式(19)作下列表達式

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m \frac{1}{\varphi(z)} = (z-a)^m \psi(z), \quad (20)$$

經過上面同樣的演算,我們得到

$$\frac{1}{f(z)} = \psi(a)(z-a)^m + \psi'(a)(z-a)^{m+1} + \dots,$$

其中 $\psi(a) \neq 0$, 由此可見,點 a 是函數 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 級零點,只要我們令 $\frac{1}{f(a)} = 0$ 。

因此,總結上面所討論的,我們得出下面的結論:如果點 a 是函數 $f(z)$ 的一個 m 級零點(或 m 級極點),則點 a 就是函數 $\frac{1}{f(z)}$ 的一個 m 級極點(或一個 m 級零點只要我們令 $\frac{1}{f(a)} = 0$)。