中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

複變函數引論

下 册

И. И. ПРИВАЛОВ 著

北京大學數學力學系
數學分析與函數論教研室譯

商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

複變函數引論

下册

И. И. 普里瓦洛夫著
北京大學數學力學系
數學分析與函數論教研室譯

商務印書館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的伊·伊·普里瓦洛夫(И. И. Привалов)著複變函數引論(Введение в теорию функций комплексного переменного)1948年第八版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲綜合大學與師範大學物理—數學系教科書。

本書中譯本分上下兩冊出版，下冊內容包括單值函數的孤立奇異點、殘數理論、畢卡定理、無窮乘積與它對解析函數的應用、解析開拓、橢圓函數理論初步、保角映射的一般原則、單葉函數的一般性質等。

本書由北京大學數學力學系數學分析與函數論教研室集體翻譯。

複變函數引論

下　冊

北京大學數學力學系
數學分析與函數論教研室譯

商務印書館出版
上海河南中路二一一號

中國圖書發行公司　總經售

商務印書館北京廠　印刷
(53211B)

1953年11月初版　版面字數171,000
印數1—3,500　定價¥15,000

下 册 目 錄

第六章 單值函數的孤立奇異點

第七章 殘數理論

第八章 畢卡定理

第九章 無窮乘積與它對解析函數的應用

第十章　解析開拓

第十一章　橢圓函數理論初步

第十二章 保角映射的一般原則

第十三章 單葉函數的一般性質

複變函數引論

第六章　單值函數的孤立奇異點

§1. 羅朗級數

1. 解析函數的羅朗展開式　假定 K 與 k 是以點 a 爲中心的兩個同心圓周，又 $f(z)$ 是以 K 與 k 爲邊界的圓環內的一個全純函數。設令 R 與 r 分別代表這兩個圓周的半徑（圖 86）。我們要按照 $(z-a)$ 的正冪與負冪造一個級數，使得在圓環內的每一點 z 上，也就是說在適合條件：$r<|z-a|=\rho<R$ 的點 z 上，這個級數都收斂於函數 $f(z)$。爲此目的，我們選取兩個半徑 r' 與 R'，使得 $r<r'<\rho<R'<R$，並且讓 c 與 C 分別代表以 a 爲中心 r' 與 R' 爲半徑的圓周（圖 86）。

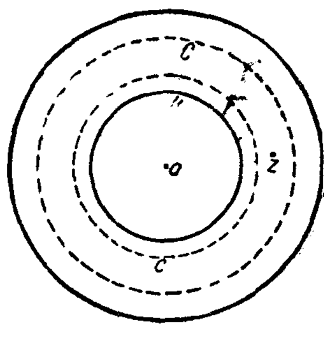

圖 86

根據假設的條件，函數 $f(z)$ 在 c 與 C 之間，包括 c 與 C 在內的圓環上是全純的。利用哥西公式（第四章，§3，第 2 段），我們得到：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \qquad (1)$$

其中積分路線 C 與 c 都是依正向進行的。

由於在公式(1)中的第一個積分中 ζ 代表圓周 C 上的一點，我們有：

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}. \tag{2}$$

這個級數在圓周 C 上是一致收斂的，因爲：

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=\frac{\rho}{R'}<1$$

(參看第五章，§ 2，第 2 段)。

在公式(1)的第二個積分中，ζ 代表圓周 c 上一點；於是我們有：

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{-1}{(z-a)\left(1-\frac{\zeta-a}{z-a}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}. \tag{3}$$

級數(3)在 c 上是一致收斂的，因爲

$$\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|=\frac{r'}{\rho}<1.$$

把展開式(2)與(3)代入公式(1)的積分中，由於對 ζ 的一致收斂性，我們可以逐項求積分，於是得到：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)(\zeta-a)^n}{(z-a)^{n+1}}d\zeta. \tag{4}$$

爲了簡單起見，令

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{5}$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{6}$$

於是等式(4)就可以改寫成：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n(z-a)^{-n}. \tag{4'}$$

c_n 與 b_n 的表達式(5)與(6)可以統一成一個公式：

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\quad(n=0,1,2,\cdots,-1,-2,\cdots), \tag{7}$$

其中積分閉路 γ 是給定的圓環內以點 a 爲中心的任意一個圓周。

事實上，因爲公式(5)與(6)內的被積函數在給定的圓環內到處都是全純的，所以，我們可以在這個圓環內任取一個以點 a 爲中心的圓周 γ 來作積分路線而不會改變 c_n 與 b_n 的值；而且在另一方面，我們還有：

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{-n+1}}=c_{-n}\ (n=1,2,3,\cdots).$$

由此還特別可以看出，由公式(7)所確定的係數 c_n 並不依賴於點 z，因爲我們可以把 γ 了解爲給定的圓環內以點 a 爲中心的任何一個圓周。

根據所引進的符號，我們可以把展開式(4′)寫成：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n}, \tag{4''}$$

或

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n. \tag{4'''}$$

這樣一來，我們已經得到了函數 $f(z)$ 的表達式即級數(4″)，這個表達式對於給定的圓環內的每一點 z 都成立。又級數(4″)是由兩部分

組成的：第一部分，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 是一個按照 $z-a$ 的升冪排列的級數（關於 $z-a$ 的冪級數）；第二部分，$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n$ 是一個按照 $z-a$ 負的降冪排列的級數（關於 $\frac{1}{z-a}$ 的冪級數）。這兩個級數在給定的圓環內的每一點 z 上都收斂。級數(4″)稱為函數 $f(z)$ 的羅朗級數。

2. 羅朗級數的正則部分與主要部分 現在我們分別來考慮構成羅朗級數(4″)的兩個級數。第一個級數 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 是一個通常的冪級數，因之，它在圓周K內所有的點 z 上都收斂，並且代表在圓周K內到處全純的一個函數 $f_1(z)$。羅朗展開式（4″）中的這第一個級數稱為羅朗級數的正則部分。第二個級數 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 同樣可以看作是一個通常的冪級數，只要取：

$$c_{-n}=b_n,\quad \frac{1}{z-a}=z'. \tag{8}$$

在這個新的符號下，級數變成了下面的形式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z'^n. \tag{9}$$

顯然，當 $\frac{1}{R}<|z'|<\frac{1}{r}$ 時，級數(9)是收斂的，因為當 $r<|z-a|<R$ 時原來的級數是收斂的。

因此，級數(9)，作為 z' 的冪級數，對於適合 $|z'|<\frac{1}{r}$ 的所有的點 z' 都收斂，並且代表 z' 的一個函數，這個函數在 $|z'|<\frac{1}{r}$ 時是全純的。

利用關係（8）回到原來的變數 z，我們看出，對於適合不等式：$|z-a|>r$ 的所有的點，也就是說，對於圓周 k 外的所有的點，級數 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 都收斂，並且代表一個在 k 外全純的函數 $f_2(z)$。展開式(4″)中的這個第二個級數稱為羅朗級數的主要部分。因此，函數可

以表成和的形式：

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)$$

其中$f_1(z)$在圓周K內是全純的，而$f_2(z)$在圓周k外是全純的。在以圓周K與k爲邊界的圓環內，函數$f_1(z)$與$f_2(z)$都是全純的。

3. **羅朗展開式的唯一性**　與戴勞展開式一樣，對於（在一個給定的圓環內）給定的函數$f(z)$，我們所求得的羅朗展開式$(4'')$是唯一的。

實際上，如果假定在某一圓環內的所有的點z上同時有兩個展開式：

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n'(z-a)^n. \tag{10}$$

以$(z-a)^{-k-1}$乘(10)的兩個展開式，並且沿着在圓環內以a爲中心的任意一個圓周積分。因爲兩個級數在這個圓周上都一致收斂，所以我們得到：

$$2\pi i\, c_k=2\pi i c_k' \text{ 或即 } c_k=c_k' \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

根據第1段與第2段所講的，可見羅朗級數$(4''')$的準確的收斂區域是以點a爲中心的一個圓環，在這個圓環內$f(z)$是全純的，並且在圓周K或k上$f(z)$都至少有一個奇異點。特別說來，如果在K內函數$f(z)$沒有奇異點，則它的羅朗展開式就變成了戴勞展開式。

例：不難得到以下的展開式：

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \quad 當 1<|z|<2,$$

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}, \quad 當 2<|z|<+\infty.$$

在這裏，對於同一個函數我們有了兩個不同的羅朗展開式；但是，這與展開式的唯一性定理却一點也沒有矛盾，因爲這兩個展開式是對不同的圓環做成的。

§2. 單值函數的奇異點的分類

1. 孤立奇異點的三種類型 單值函數 $f(z)$ 在圓周 K 內以圓心 a 爲它的唯一的奇異點的情形是特別值得注意的。在這種情形，羅朗展開式

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \tag{11}$$

除點 $z=a$ 外，在圓周 K 內每一點 z 上都收斂，並且代表一個在 K 內，除圓心外，到處都是全純的函數 $f(z)$。在這種情況下，點 a 稱爲函數 $f(z)$ 的孤立奇異點，而 $f(z)$ 在該點的鄰域內（$z=a$ 除外）到處都可以用展開式 (11) 來代表。我們就根據單值函數 $f(z)$ 在孤立奇異點的鄰域內的展開式來把孤立奇異點加以分類。有三種可能性：

1. 羅朗展開式(11)含有無窮多項 $z-a$ 的負冪。在這種情形，點 a 稱爲函數 $f(z)$ 的一個本性奇異點。

2. 展開式(11)只含有有限個 $z-a$ 的負冪。在這種情形，點 a 稱爲函數 $f(z)$ 的一個極點。

3. 展開式(11)根本不包含 $z-a$ 的負冪。在這種情形，點 a 稱爲函數 $f(z)$ 的一個可去奇異點。

把單值函數的孤立奇異點分成以上三種類型後，我們現在來闡明在每一種類型的奇異點的鄰域內函數的性質（所謂孤立奇異點 a 的鄰域，我們指的是適合條件：$0<|z-a|<R$ 所有的點 z，其中 R 選得這樣小，使得函數 $f(z)$ 在所有這些點 z 上都是全純的）。

2. 可去奇異點 我們先考慮第三種類型的奇異點。在這種情形，展開式(11)是一個通常的冪級數，因之，在點 a 的鄰域內，包括點 a 在內，到處都收斂；它的和代表一個在點 a 的鄰域內，包括點 a 在內，到處都

全純的函數。當 $z\neq a$ 時，給定的函數 $f(z)$ 與級數的和相等，因此，如果我們令

$$f(a)=c_0,$$

給定的函數 $f(z)$ 在點 a 就變成全純的了。因此，第三種類型的奇異點可以去掉，只要我們用適當的方法在該點確定函數的值。由此可見，如果點 a 是一個可去奇異點，則我們有：$\lim\limits_{z\to a}f(z)=c_0$；特別說來，有這樣兩個正數 M 與 η 存在，使得

$$|f(z)|<M \quad \text{只要} \quad 0<|z-a|<\eta. \tag{12}$$

不等式(12)可以簡短地用文字敍述如下：在可去奇異點的充分小的鄰域內，函數是有界的。在下面我們就要看到，反過來，如果函數在孤立奇異點的鄰域內是有界的，這個奇異點就一定是可去奇異點。

3. **極點** 現在我們來分析第二種類型的奇異點，即所謂極點。在這種情形，展開式(11)含有有限多項 $z-a$ 的負冪。設 m 為羅朗展開式(11)中 $\left(\frac{1}{z-a}\right)$ 的最高次冪，於是我們有：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}, \tag{11'}$$

其中 $c_{-m}\neq 0$。如果 $m=1$，則極點 a 稱為簡單的，如果 $m>1$，則稱為多重的；數 m 稱為極點的級。以 $(z-a)^m$, $z\neq a$ 展開式(11')的兩邊，我們得到：

$$(z-a)^m f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^{n+m}+c_{-1}(z-a)^{m-1}+c_{-2}(z-a)^{m-2}+$$
$$+\cdots+c_{-m}. \tag{13}$$

等式(13)的右邊是一個通常的冪級數，其常數項 c_{-m} 異於零。

因此，點 a 是函數 $(z-a)^m f(z)$ 的可去奇異點，並且我們有：

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)=c_{-m}\neq 0. \tag{14}$$

特別說來，從等式(14)有:

$$\lim_{z\to a}|z-a|^m|f(z)|=|c_{-m}|. \tag{15}$$

設 q 爲小於 $|c_{-m}|$ 的任意一個正數，則根據(15)我們可以找到一個充分小的正數 η，使得

$$|z-a|^m|f(z)|>q \quad \text{只要}\quad 0<|z-a|<\eta,$$

或卽

$$|f(z)|>\frac{q}{|z-a|^m} \quad \text{只要}\quad 0<|z-a|<\eta. \tag{16}$$

不等式(16)表明，當點 z 趨向點 a 時，$|f(z)|$ 趨向無窮大，這可以用下面的符號來表示:

$$\lim_{z\to a}f(z)=\infty \tag{15'}$$

更簡短地說，函數在極點變成無窮。

4. 零點與極點間的聯系 設函數 $f(z)$ 在點 a 有一個 m 級零點。如所周知(第五章，§ 2, 第 7 段)，在點 a 的某一鄰域內函數 $f(z)$ 可以表成冪級數:

$$f(z)=c_m(z-a)^m+c_{m+1}(z-a)^{m+1}+\cdots, \tag{17}$$

其中 $c_m\neq 0$，或

$$f(z)=(z-a)^m\varphi(z),$$

這裏函數 $\varphi(z)$ 在點 a 全純，並且不等於零。由(17)，$f(z)$ 的倒數 $\dfrac{1}{f(z)}$ 可以表作下列形式:

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-a)^m}\,\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{\psi(z)}{(z-a)^m}, \tag{18}$$

其中函數 $\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$ 在點 a 全純，並且不等於零。由於我們有:

$$\psi(z)=\psi(a)+\psi'(a)(z-a)+\cdots,$$

從(18)我們可以得到，當點 z 在點 a 的鄰域內，並且 $z\neq a$ 時

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{\psi(a)}{(z-a)^m}+\frac{\psi'(a)}{(z-a)^{m-1}}+\cdots,$$

由此可見，點 a 是函數 $\frac{1}{f(z)}$ 的一個 m 級極點。

反過來，假定點 a 是 $f(z)$ 的一個 m 級極點，在點 a 的鄰域內 $(z\neq a)$ 我們就有：

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \tag{19}$$

其中函數 $\varphi(z)$ 當 z 趨向 a 時趨向一個異於零的極限（第 3 段），因此，我們可以把 $\varphi(z)$ 看作在點 a 全純並且不等於零的一個函數［只需令 $\varphi(a)$ 等於它在點 a 的極限值(第 2 段)］。利用等式 (19) 作下列表達式

$$\frac{1}{f(z)}=(z-a)^m\frac{1}{\varphi(z)}=(z-a)^m\psi(z), \tag{20}$$

經過上面同樣的演算，我們得到

$$\frac{1}{f(z)}=\psi(a)(z-a)^m+\psi'(a)(z-a)^{m+1}+\cdots,$$

其中 $\psi(a)\neq 0$，由此可見，點 a 是函數 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 級零點，只要我們令 $\frac{1}{f(a)}=0$。

因此，總結上面所討論的，我們得出下面的結論：如果點 a 是函數 $f(z)$ 的一個 m 級零點(或 m 級極點)，則點 a 就是函數 $\frac{1}{f(z)}$ 的一個 m 級極點（或一個 m 級零點只要我們令 $\frac{1}{f(a)}=0$）。