中国科技史话

杨文衡 杜石然 陈美东
金秋鹏 廖育群 编著

〔下册〕

中国科学技术出版社

中国科技史话

（下）

杨文衡 杜石然
陈美东 金秋鹏 廖育群 编著

中国科学技术出版社

内容提要

本书全面、系统地介绍了中国古代科学技术的成就，内容包括：数学、天文、物理、化学、农学、生物学、建筑技术、水利、地学、采矿和冶炼等。全书分上、下两册，上册由石器时代写到隋唐；下册由宋写到清末。

全书既注重学术性，又力图通俗易懂；既照顾历史发展的顺序，又做了必要的穿插调整，是一部普及中国科技史、进行爱国主义教育的好书。

中国科技史话

（下）

杨文衡 杜石然 廖育群 编著
陈美东 金秋鹏

责任编辑：金恩梅
封面设计：王 芾
技术设计：王予南

*

中国科学技术出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京燕山印刷厂印刷

*

开本850×1168毫米1/32 印张：9.875 字数：265千字
1990年6月第1版 1990年6月第1次印刷
印数：1—2420册 定价：6.90元
ISBN 7-5046-0159-1/Z·6

目　录

宋元数学四大家

中国古代数学，在两汉时期建立起以《九章算术》为代表的体系。经过魏晋到隋唐数百年的发展，这一体系更加完备，出现了刘徽、祖冲之父子、李淳风等一系列数学家，也出现了《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》等一系列数学著作。到了10至14世纪的宋元时期，中国古代数学又有了新的发展。正如同科学技术的许多学科和门类一样，中国古代数学，在宋元时期，也出现一个发展的高潮。

在北宋时期，由于雕版印刷已十分发达，元丰七年（公元1084年）由政府印刷发行了《九章算术》等汉唐期间的古算术。这是由当时的“秘书省”来负责进行的。这是印刷本数学书籍在中国的最早出现，也是世界上最早的印刷本数学书。这些书曾用来作为“国子监算学科”（相当于国立大学数学系）的教科书。

到了南宋时期，整个中国形成了南北对峙的局面，开始是与北方的辽、金，后来又和蒙古贵族对峙，战乱频繁。但正是在这种情况下，在13世纪下半叶和14世纪初叶的半个多世纪的时间内，中国古代数学却达到了发展的顶点，出现了秦九韶、李冶、杨辉、朱世杰四位杰出的数学家。这四位大家所写的数学著作，大多数都辗转流传至今，成了中国古代数学史，也成了整个中世纪世界数学史上的宝贵文化遗产。这些著名的数学著作是：

秦九韶的《数书九章》（公元1247年）；

李冶的《测圆海镜》（公元1248年）、《益古演段》（公元1259年）；

杨辉的《详解九章算法》（公元1261年，现存本已残）、《日用算法》（公元1262年，已残）、《杨辉算法》（公元1274—1275年）；

朱世杰的《算学启蒙》（公元1299年）、《四元玉鉴》（公元1303

年）。其中，秦九韶的著作中记述了高次方程的高值解法和一次同余式解法，李冶的著作中记述了“天元术”，杨辉的著作中记述了民用和商用数学的成果，朱世杰的著作则记述了“四元术”和高阶等差级数求和以及高次招差法。秦、李、杨、朱宋元四大家所取得的数学成果远远超出同时代的欧洲，比世界其他地区的同类结果早出四五百年，有的甚至早出七八百年以上。

下面，依次对秦、李、杨、朱四大家的生平及其数学成就加以介绍。

秦九韶与《数书九章》

秦九韶，经常自称是鲁郡（山东）人，其实他生长于四川。关于他的生平，根据流传下来的南宋史料来看，对他的评价可谓褒贬不一。关于褒，可以由推荐他屡次出任官职一事看出。他和贾似道（公元1213—1275年）、吴潜（公元1196—1262年）等人都有来往，与吴的关系更为密切。关于贬，可以由每次任职都有人弹劾看出，如刘克庄（公元1187—1269年）周密（公元1232—1308年）等人，言词都十分激烈，指摘他贪暴、好色，“暴如虎狼，毒如蛇蝎”。象他这样在科学上取得很大成就而人品方面又多有非议的人物，在西方数学史中也有类似的情况。16世纪意大利数学家卡丹诺（G • Cardano，公元1501—1576年）也是这样的一个人。对秦九韶说来，即便是极力贬斥他的人也承认他“性极机巧，星象、音律、算术以至营造等事无不精究”，“诗词、游戏、毬马弓剑，莫不能知”，是一个多才多艺、聪敏过人的人。

南宋淳祐七年（公元1247年），秦九韶把自己的学术成果献给朝廷，“有奏稿及《数学大略》”。《数学大略》也就是流传至今的《数书九章》。

在《数书九章》的序言中，秦九韶在叙述自己数学研究的经过时说：“早岁侍亲中都（南宋京城，今杭州市）因得访习于太史，又尝从隐君子受数学”，说明青年时代随从其父在杭州向太史（有

人考证即宋代历法家 杨忠辅)和一位"隐君子"学 习数学历法等知识。后来他随父亲回到四川，他在四川也作过级别很低的官吏。当时南宋王朝与蒙古军队正在进行频繁的战争，秦九韶经历了蒙古军队进攻四川的战乱。在兵荒马乱之中，秦九韶难能可贵的写成了著名的数学著作——《数书九章》。在此书的序言中他写道："际时狄患，历岁遥塞， 不自竟全于矢石间， 尝险罹忧，荏苒十禩(十年)，心槁气落，信知夫物莫不有数也。乃肆意其间，旁诹方能，探索杳渺，粗若有得焉。"他写的正是在战乱之间进行研究和写作的情形。在这里他十分相信"物莫不有数"，很能代表他对数学的看法。"物莫不有数"，在他看来有两方面的意思：一方面他认为数学可以"经世务，类万物"，"人事之变无不该"，即与人世间许多实际的计算问题有关；另方面他又认为数学可以"通神明，顺性命"、"鬼神之情莫能隐"。 那么这两 个方面哪一方更重要些呢？秦九韶显然认为后者重要，是"大者"，而解决实际生活中遇到的各种数学问题是其次的，是"小者"。但是在他经过长时期探索"粗若有得"之后，他发现"所 谓通神明 顺性命固肤未于见，若其小者窃尝设为问答，以拟于用"。他所著《数书九章》所载述的，都是与实际问题密切联系的"小者"。

《数书九章》全书共收有81个数学问题，分作九大类，每类各九题。其内容分别为：

1. 大衍类：叙述"大衍求一术"——联立一 次 同余式解法。
2. 天时类：历法、降雨量、降雪量的计算。
3. 田域类：面积计算。
4. 测望类：勾股、重差等测量数学问题。
5. 赋役类：均输、税收。
6. 钱谷类：粮谷转运、粮仓容积。
7. 营建类：建筑工程问题。
8. 军旅类：军营布置、供应等军事数学问题。
9. 市易类：贸易中利息计算等问题。

从《数书九章》所取得的数学成就来讲，首先应该列出的乃是

高次方程的数值解法。秦九韶是在前人已取得成果的基础上，取得这一重要成就的。

1					
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

图 1　数表示意图

如本书前文已述，中国古代的一般二次方程、三次方程的解法都是在开平方、开立方算法的基础上发展而来的。而开平方、开立方的过程中要利用(1，2，1)、(1，3，3，1)之类的二项展开式的系数，推广到高次开方就要用到如图 1 所示的数表。在西方通常把它称为巴斯加三角，巴斯加是法国17世纪数学家。而在中国，据现有的史料来看，早在11世纪就已经出现了这类数表，名叫“开方作法本源”(图2)。首先得到此表的是北宋时期的历法数学家贾宪。贾宪不仅得出这一数表，而且提出了一种造表的方法——“增乘方求廉法”(即用又乘又加的方法来求出表中各数——开方式中各项的系数)。这种算法和西法英国 19 世纪数学家霍纳(G·Horner，公元1789—1837年)求解高次方程时的算法，在原理上有很多相似之处，也可以说是基本上是一致的。

图 2　明《永乐大典》卷16344所载贾宪开方作法本源

《数书九章》中收有二次方程20题，三次方程 1 题，四次方程4题，十次方程1题。如用现代符号记写，其中三次以上方程有：

$4.608x^3-30000000000\times30\times800=0$　(见“推知余数”题)

$-x^4+763200x^2-40642560000=0$　(“尖田求积”题)

$-x^4+15245x^2-6262506.25=0$　(“环田三积”题)

$-x^4+1534464x^2-526727577600=0$　(“望敌圆营”题)

$x^{10}+15x^{8}+72x^{6}-864x^{4}-11664x^{2}-34992=0$（“遥度圆城”题）

和古代开方术一样，高次方程的记法也是按次数高低、由下而上地列出各项系数的。现以阿拉伯数码来代替算筹，并将算筹的竖式改为横写，则秦九韵高次方程的数值解法与现代通常的霍纳算式几乎完全相同。下面举“尖田求积”题为例，给出解法算式如下，第一行即相当于列出方程：

−1	+	+7632 0	+0	−4064256000	800（第一位答数）
	−800	−640000	+98560000	+79048000000	
−1	−800	+123200	+98560000	+38205440000	
	−800	−1280000	−925440000		
−1	−1600	−1156800	−826880000	+38205440000	…（“一变”）
	−800	−1920000			
−1	−2400	−3076800	−826880000	+38205440000	…（“二变”）
	−800				
−1	−3200	−3076800	−826880000	+38205440000	40（第二位答数）
	−40	−129600	−128256000	−38205440000	（“三变”）
−1	−3240	−3206400	−955136000	0	

人们很容易从中看出这种改为横式的秦九韶算法，和通常现代所用的霍纳算式基本上是一致的。其中“一变”“二变”“三变”的过程即是得到第1位商数8（实为800）之后，进行$x=800+y$的变换，得到第2位商数4（实为40）进行$y=40+z$变换等过程。

秦九韶《数书九章》中的另外一项重大成就是“大衍求一术”——一次同余式解法。

中国数学对一次同余式解法的探求，源远流长。在本书上册中，我们曾谈到过中国古代著名的数学问题——孙子问题（原载《孙子算经》）。孙子问题的原文是：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”下面为叙述上的方便，让我们引用现代的一些数学符号。假如一个数N，以

m_i数之余$r_i(i=1,2,3\cdots\cdots)$时，我们就说：以m_i为法，N和r_i同余，也可以写成

$$N\equiv r_i(mod\ \ m_i)$$

这就是一个一次同余式。求解一次同余式就是已知m_i和r_i，求出N来。上述孙子问题，也就是求解三个同余式的共同解答，推广来说求解联立一次同余式问题，也就是求出满足如下的一串同余式的共同解N：

$$\begin{cases} N\equiv r_1(mod\ \ m_1) \\ N\equiv r_2(mod\ \ m_2) \\ N\equiv r_3(mod\ \ m_3) \\ \cdots\cdots\qquad\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\qquad\cdots\cdots \end{cases}$$

更确切些说，是需要求出满足上述联立一次同余式的最小正整数解。这就是“大衍求一术”问题。

假如那些m_i是两两互素的，如果人们能够求出一串数值a_1，a_2、a_3、……，使这些a_i满足：

$$a_i\frac{M}{m_i}\equiv 1\ \ (mod\ \ m_i)$$

其中$M=m_1$、m_2、$m_3\cdots\cdots$（即M等于各m_i的乘积），则：

$$N=\left[r_1a_1\frac{M}{m_1}+r_2a_2\frac{N}{m_2}+r_3a_3\frac{M}{m_3}+\cdots\cdots\right]-QM$$

Q为一正整数，适当选择Q即可得出满足要求的N。

如何求出a_i是全部问题的关键。秦九韶首先由$\frac{M}{m_i}$中连续减去m_i，使最后达到得数$G<m_i$；之后列出如下的四个数：

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & G \\ 0 & m_i \end{matrix}}$$

其次以右上的G除m_i，将商Q_1乘左上角之数再加入左下角之数中得k_1，再将m_i改为以G除m_i的余数k_1。又次以右下的R_1除右上的G，将商Q_2乘左下的k_1加入左上数中得k_2，将右上改为余数R_2。

如此反复以右行上下二数辗转相除，再将商数乘左行上下数再加入下上数之中，一直算到右上角的数最后得数为1时停止。此时左上角得出的k_i就是要求出的α_i❶。或许是因为这一算法最后的目标在于算得右上角的数目必需是1，所以秦九韶才把它称为“大衍求一术”的吧。

假如出现那些m_i不两两互素的情况时，秦九韶也有相应的算法来解决。

在中国古代，这类问题是与历法计算中求算“上元积年”有关的。秦九韶把它又扩展到其它的应用方面，这便是《数书九章》“大衍类”的9个问题。

一次同余式的理论，在西方，直到18世纪末19世纪初才由欧拉(Euler，公元1707—1783年)和高斯(Gauss，公元1777—1855年)得出完备的理论。为尊崇秦九韶的杰出成果，西方的科学史家把“大衍求一术”称为“中国剩余定理”。

李冶与《测圆海镜》及《益古演段》

在宋元数学四大家中，李冶所写的《测圆海镜》仅比秦九韶的《数书九章》晚出一年，其中系统地讲述了“天元术”——中国古代特有的筹算代数学。

李冶(公元1192—1279年)，原名李治，号敬斋，真定栾城人(现属河北石家庄地区)。早年曾在河南钧州(今河南禹县)作过金朝的州官。1232年钧州被蒙古军攻破，他逃回河北，先后在山西的桐川、太原、平定，以后又在河北的元氏等地隐居，最后在元氏县的封龙山下定居，讲学授徒，学生甚多。李冶是当时北方著名的学者，入元之后，元世祖忽必烈曾多次召见他，并拟授予官职，他都推辞不受，回山隐居讲学。李冶与张德辉、元裕交往最多，人们称他们三人为“龙山三老”，张、元二人也是当时的著

❶ 关于这一算法正确性的证明，请参见钱宝琮主编的《中国数学史》，科学出版社，1964，206—209页。

名学者。

李冶隐居于乱世，生活清苦。《元史·李冶传》说他常忍饥寒之苦，仍著书讲学，潜心研究。数学是李冶精心钻研并取得重大成就的学科。他认为"术数虽居六艺之末，而施之人事，则最为切务"❶。这是他对数学广泛应用性的认识。关于数学的性质，李冶也有所议论。他说："数本难穷，吾欲以力强穷之，彼其数不唯不能得其凡，而吾之力且惫矣。然则数果不可以穷耶？既已名之数矣，则又何为不可穷也！故谓数为难穷斯可，谓数为不可穷斯不可。何则，彼其冥冥之中，固有昭昭者存。夫昭昭者，其自然之数也，非自然之数，其自然之理也。数一出于自然，我欲以力强穷之，使隶首复生，亦未如之何也已。苟能推自然之理，以明自然之数，则虽远而乾端坤倪，幽而神情鬼状，未有不合者矣。"这段话的意思是说：认为"数难穷"是可以的，认为"数不可穷"则是不对的。因为"数"是客观存在的反映。按李冶所说，就是在复杂的事物中间，自有"昭昭者"存，这就是客观存在的"自然之数，自然之理"。如能按客观规律去推理明数，数学便会无所不通；但如果不是这样而是"欲以力强穷"，那么就是善长数学的隶首复生转世，也会毫无办法。

李冶还曾经对中国古代传统思想中鄙视数学，以为数学是"九九贱技"的思想进行了批判。他慨叹说：那些"明道先生以上蔡谢君记诵为玩物丧志。文史尚矣，犹之为不足贵，况九九贱技能乎？"但他却认为是可以"由技进乎道"的，并精心研究数学，从不间断，虽被人耻笑也在所不计，即"宁复为人悯笑计哉"（以上引文均见"《测圆海镜》序"）。

下面依次介绍李冶的两部数学著作。

《测圆海镜》共12卷，170个问题。所有的问题都采用了已知直角三角形的各个线段，求解其内切圆和傍切圆的直径的形式。

---

❶ 李冶《益古演段》自序。

这是一部和传统的以《九章算术》为范式的算经不同而颇具特色的算书，其写作形式也很有特点。此书首先在第一卷中给出了全书通用的一幅几何图形(见图3)。其次再给出这幅图形中各个线段的名称。例如：由天至地的线段称为“通弦”；

天、乾联线称为“通股”；

乾、地联线称为“通勾”

等等。再次，还给出了各线段的长度，例如：

通弦长：680

通勾长：320

通股长：600

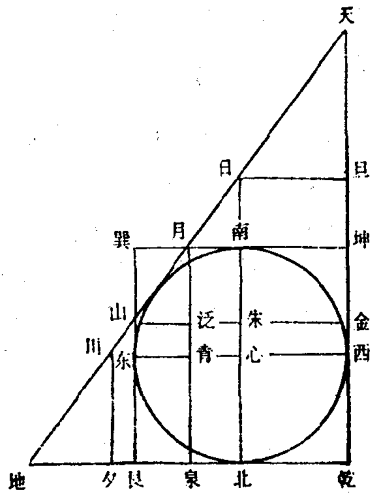


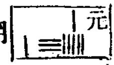
图 3 《测圆海镜》图式

等。最后，还给出“识别杂记”共692条。这些“识别杂记”，每条都相当于一条几何定理，讲的都是各种线段之间的关系。也可以说，《测圆海镜》是具有中国传统数学特色的一部几何学著作。

《测圆海镜》还叙述了宋元数学中的另一项重要成就——天元术。

在秦九韶的书中，如上节所述，有着对高次方程数值解法的详细叙述，但对这些方程是如何列出来的却没有科学系统的叙述。天元术——就是一种科学而系统的列方程的方法。在现代中学教科书中，列方程的步骤是：首先设欲求的未知数为 x，然后根据题意再对 x 和题给的已知常数进行加、减、乘、除、乘方、开方等运算，最后即可列出方程，解方程即可得出答案。

只要稍加解释，不难看出天元术和上述中学的代数课本中列方程的方法基本上是相同的。“天元”实际上就是问题中的未知数。“设 x 为某某未知数”，在李冶书中即是“立天元一为某某”。

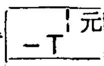
用天元术来记写多项式或方程，常常用在常数项旁记一“太”字，或是在一次项旁记一个“元”字，例如 $x+135$ 要用或来表示。下面举《测圆海镜》第7卷第2题为例（李冶在此题下共列出了5种解法，下面举第2种解法为例），说明一下天元术列方程的具体步骤。左边为《测圆海镜》原文：

〔问题〕（今有圆城一所，不知周径）或问丙出南门直行一百三十五步而立，甲出东门直行一十六步见之，（问城径几何）

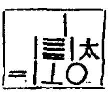
〔解法〕草曰：立天元一为半城径，副置之，上加南行步得为股。

设 x 为圆城半径，则

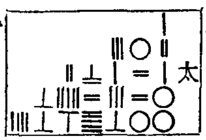
股 $=x+135$

下位加东行步得为勾。

勾 $=x+16$

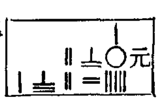
勾股相乘为直积一段，以天元除之得为弦

勾 $\times$ 股 $\div x = x+151+2160x^{-1}=$ 弦

以自（乘）之得为弦幂，寄左。

而弦 $^2=x^2+302x+27121+652320x^{-1}+4665600x^{-2}$

设此为左式。

乃以勾自之得，又以股自之得，二位并之得

又勾 $^2=(x+16)^2=x^2+32x+256$

股 $^2=(x+135)^2=x^2+270x+18225$