现代数学基础丛书

离散鞅及其应用

史及民 编著

山西省归国留学人员科研基金资助项目

科学出版社

1999

内 容 简 介

本书介绍离散鞅的基本理论与应用，尤以停时定理、鞅收敛定理、鞅不等式等为重点．注重背景描述与应用举例，突出典型证法、严格推理，为本书的特点．

本书的读者对象为高等院校数理统计及工程、生物、金融经济等相关的应用专业的大学生、研究生、教师及有关的工作者．

图书在版编目（CIP）数据

离散鞅及其应用/史及民编著．-北京：科学出版社，1999
（现代数学基础丛书）
ISBN 7-03-007557-9

Ⅰ．离… Ⅱ．史… Ⅲ．鞅，离散型-研究 Ⅳ．O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 16906 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999 年 9 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1999 年 9 月第一次印刷 印张：7 3/4
印数：1—2 000 字数：197 000

定价：16.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

《现代数学基础丛书》编委会

序

鞅(martingale)一词的原义是"公平赌博". 设某人参加一种赌博,以 x_n 记第 n 局赌完后他手上拥有的赌本数. 若对任何 n 有 $E(x_n|x_{n-1})=x_{n-1}$,则表示他在第 n 局中的期望赢得为 0,他没有任何的先天优势或劣势,而赌博可以认为是公平的. 这一串随机变量就称为构成一个鞅. 以上所讲属于离散时间的情形. 对连续时间,鞅的定义容易作类似的推广.

鞅这个名称首先由法国概率学家莱威在 1939 年引进. 他在 30 年代已作了若干初步的工作. 但是将此发扬光大的要归功于美国的概率学家杜布. 他于 1953 年在其名著《随机过程》一书中,介绍了他自己对鞅论的系统研究成果. 自那以后,关于鞅论的研究工作突飞猛进,其在理论和应用上的重要性也日益凸显. 例如,在 50 年代,一个具有良好的独立变量概率理论基础的学者,可以从事绝大部分数理统计理论课题的研究;而如今,一个不具备较扎实的鞅论基础知识的人,要进行一项稍深刻一点的统计大样本理论问题的研究工作,也会感到困难.

自杜布的著作问世以来,鞅论已成为各种较有深度的概率论和随机过程著作的一个标准组成部分. 关于鞅的专著,包括中文专著,也出版了一些,例如严家安教授的《鞅与随机积分引论》. 可是这类专著内容一般偏于艰深. 对那些以鞅作为一个工具而非专研随机过程的学者,例如数理统计学家及科技应用工作者,显得难度过大. 另一些以鞅作为论题之一的著作,其中也有很好的,如 Slout 的"Almost Sure Convergence"一书的第二章. 但总的看,这类著作中关于鞅的论述,或则过于简略,或则偏于一些基本理论事实,对其多方面的应用无暇顾及. 这种情况给那些以鞅作为一个工具的读者带来了不便.

大约两年前，史及民教授与笔者谈到这个情况．他表示有意根据他多年从事教学工作的经验和积累的材料，写一本能填补上述空缺的著作．笔者当时很赞同他这一想法．不久前，笔者见到史教授著作的初稿，感到它很好地体现了当初的想法．这本书集中讨论离散鞅，篇幅适中，要而不繁．对鞅的基本理论及在应用上一些重要的内容，都有清楚的论述．例如停时和鞅的强大数律，中心极限定理等材料，对统计大样本理论和序贯分析理论等很重要，本书都有较仔细的介绍．另外，本书前两章对测度论和条件概率理论作了简要的讨论，使本书基本上成为自封的，这对自学者有很大的方便．

本书没有涉及连续鞅．笔者认为，对此书预想的读者对象来说，这一安排是恰当的．连续鞅理论较为艰深．在一定层次上其应用面较逊于离散鞅，且连续鞅的学习有赖于对离散鞅的掌握．以此，根据教学上时间安排的可能，应用者需要上的轻重缓急与学习上的循序渐进等多方面着想，让读者先集中精力扎实掌握离散鞅，是一个更好的做法．

史及民教授治学严谨，教学经验丰富．他这本费了不少时间与心力的著作终于得以出版，笔者也为之感到欣慰．相信它会成为数理统计学者，科技应用工作者和有关学科的教师与研究生书架上一本常备的著作．

陈希孺

1998年6月12日

前　　言

作为概率论的一个分支，鞅论虽早在40年代形成，但获得真正的发展却是五六十年代以后的事情．今天，在经历了近二三十年以来的迅猛发展之后，鞅论在概率中的地位已日渐突出．鞅论方法成了随机过程与数理统计研究的有力工具；鞅论正向其他数学分支渗透并与结合形成新分支；鞅论已在形形色色的实际问题（像奖券收集、随机徘徊、传染病估价、U-统计量弱收敛、经验过程与对数似然过程的弱收敛、自回归定阶，以及一些经济数学问题等）中派上了用场．

有鉴于此，为坚实我们统计方向硕士生的概率基础，以利他们日后的深入研究，自1992年起我们在教学中穿插了鞅内容．这中间产生了后来的一份交流讲义．而这册书稿正是在那讲义基础上，根据反馈回来的专家意见，特别是陈希孺院士的系统修改建议，历经两年多的反复扩充、修改与教学实践后形成的．

本书共三章．第一章其实是为学（复）习测度论与概率论有关基础内容的读者勾勒了一个提纲，所列结果，除个别者外，均述而不证．第二章讨论条件概率与条件期望，为鞅论奠基．兼顾到本科生学习中多对此浓有兴趣，故尽可能地详作介绍．第三章为全书的核心，阐述离散鞅理论与应用，尤以停时定理、鞅收敛与鞅分解定理、鞅不等式、鞅差列的大数定律及鞅的中心极限定理为重点．鉴于鞅内容本身的特殊性，为适合初学，论述中注意了背景描述与实用举例及突出典型方法．论证中既追求严密推理，又注意详明各步的推理依据．三章内容（连同附录）基本构成封闭体系，可方便自学．围绕正文或全书的重点，于每章末配了一定数量的习题，教学中可依实际情况酌作增减．

尽管罄尽全力，但囿于水平，我对这册向大学高年级与硕士生介绍离散鞅基础知识的小书究竟能给读者多少真正的帮助，于心

茫然．至于内容上的挂一漏万，错舛与不妥，就更不待言了．凡此，殷切希望概率界前辈、专家及广大读者不吝赐教，以期改正．

值此我诚挚感谢陈希孺院士，没有他的惠教、支持与帮助，就不可能有此书稿．最后，我必须感谢我的妻子郃玉兰，是她的贤惠、理解与全力相助，给了我这些年全心力业务投入的机会．

本书是山西省归国留学人员研究基金项目，还得到有关方面的出版资助，谨此致谢．

史及民

1998年6月于临汾

目　录

第一章　测度与概率基础

本章概括介绍学习本书需要的测度与概率的基本概念与结果. 限于本书的目的与篇幅, 一切结论(除极个别者外)都述而不证. 读者可以此为纲, 参看书末文献, 对自己鲜有了解之点作深入探究.

§1.1　集合运算

对任一固定集合 Ω(空间)的子集 A、B 等有以下集合运算:

并 $A\cup B$, 交 $A\cap B$, 余 $A^c \triangleq \Omega - A$. 由此可得

差　$A-B \triangleq A\cap B^c$,

对称差　$A\Delta B = (A-B)\cap(B-A)$,

上极限　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \triangleq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \triangleq \{\omega$: 有无穷多个 n 使 $\omega\in A_n\}$

$$\triangleq \{\omega: \omega\in A_n, \text{i. o.}\}^{①};$$

下极限　$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \triangleq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k \triangleq \{\omega$: 除有限个外, 对其余 n 皆有 $\omega\in A_n\}$.

显然, $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$. 当 $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$ 时, 记作 $\lim A_n$, 称为 $\{A_n\}$ 的极限. 若对每个 n 皆有 $A_n \underset{(\supset)}{\subset} A_{n+1}$, 称集列 $\{A_n\}$ 为单调增(减)序列, 统称**单调序列**.

注　若视数 a_n 与区间 $(-\infty, a_n)$ 为同一, 则数列 $\{a_n\}$ 的上下极限 $\overline{\lim} a_n$ 与 $\underline{\lim} a_n$ 便是相应集列的上下极限.

---

① i. o. 为 infinitely often(无限经常地)之缩写. 记号"A_n i. o."(读作"A_n 无穷多次发生")的采用归功于钟开莱.

§1.2 示性函数

设 Ω 为参考空间 . A 的示性函数 $I_A(\omega)$满足

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & 当\ \omega\in A;\\ 0, & 当\ \omega\in A^c.\end{cases}$$

显然

$$I_{A^c}=1-I_A,$$
$$I_A\leqslant I_B\Leftrightarrow A\subset B,$$
$$I_{A\cap B}=I_A\cdot I_B, I_{A\cup B}\leqslant I_A+I_B, I_{\overset{\infty}{\cup}A_n}\leqslant\sum_1^\infty I_{A_n},$$
$$I_{\underset{\lambda\in\Lambda}{\cap}A_\lambda}=\inf_{\lambda\in\Lambda}I_{A_\lambda},\ I_{\underset{\lambda\in\Lambda}{\cup}A_\lambda}=\sup_{\lambda\in\Lambda}I_{A_\lambda},$$
$$I_{\underline{\lim}A_n}=\underline{\lim}I_{A_n},\ I_{\overline{\lim}A_n}=\overline{\lim}I_{A_n}.$$

§1.3 σ-域 单调类 π-类 λ-类

设 $\mathscr{A}$ 为空间 Ω 的一非空子集类. 若 $\mathscr{A}$ 关于余、并运算封闭,就称 $\mathscr{A}$ 为一个**代数(或域)**;若 $\mathscr{A}$ 还对可列并封闭,就称 $\mathscr{A}$ 为一个 **σ-代数(或 σ-域)**. 今后将依习惯与方便,使用术语代数或域,不再一一说明.

若 $\mathscr{A}$ 中单调序列$\{A_n\}$的极限 $\lim A_n$ 仍属于 $\mathscr{A}$,就称 $\mathscr{A}$ 为**单调类**. 显然,σ-代数是单调类,而单调代数也是 σ-代数.

对 Ω 的非空子集类 $\mathscr{E}$,若有一 σ-代数 $\mathscr{E}'$ 满足:(i)$\mathscr{E}\subset\mathscr{E}'$;(ii)若 $\mathscr{E}''(\supset\mathscr{E})$为任一 σ-代数,则 $\mathscr{E}'\subset\mathscr{E}''$. 就称 $\mathscr{E}'$ 为**含 $\mathscr{E}$ 的最小 σ-代数**(或**由 $\mathscr{E}$ 生成的 σ-代数**),记作 $\mathscr{E}'\triangleq\sigma(\mathscr{E})$. (由 $\mathscr{E}$ 生成的代数 $\mathscr{A}(\mathscr{E})$与由 $\mathscr{E}$ 生成的单调类 $m(\mathscr{E})$的**定义类此**.)

若 Ω 的子集的非空类 $\mathscr{A}$ 为关于交封闭,即称 $\mathscr{A}$ 为一个 **π-类**.

若 $\mathscr{A}$ 满足:(i)$\Omega\in\mathscr{A}$(含空间);(ii)当 A、$B\in\mathscr{A}$ 且 $AB=\varnothing$

时就有 $A\cup B\triangleq A+B\in\mathscr{A}$(对和封闭);(iii)当 A、$B\in\mathscr{A}$ 且 $B\subset A$ 时就有 $A-B\in\mathscr{A}$(对真差封闭);(iv)若单增列 $\{A_n\}\subset\mathscr{A}$,则 $\lim A_n\in\mathscr{A}$(对单增列封闭);就称 $\mathscr{A}$ 为一个 **λ-类**.

与单调类、π-类、λ-类等有关的结果是:

定理 1.3.1 若 $\mathscr{A}$ 为代数,则 $m(\mathscr{A})=\sigma(\mathscr{A})$.

注 由此易得下面的定理.

定理 1.3.1′ 若 $\mathscr{A}$ 为代数,$\mathscr{M}$ 为单调类,且 $\mathscr{A}\subset\mathscr{M}$,则 $\sigma(\mathscr{A})\subset\mathscr{M}$.

时常要证 $\sigma(\mathscr{A})\subset\mathscr{M}$. 而据此只须证 $\mathscr{A}$ 是代数,$\mathscr{M}$ 是单调类及 $\mathscr{A}\subset\mathscr{M}$. 这方法叫**单调类法**.

定理 1.3.2 若 $\mathscr{A}$ 兼为 π-类与 λ-类,则 $\mathscr{A}$ 是一个 σ-代数.

定理 1.3.3 若 $\mathscr{D}$ 为 π-类,$\mathscr{A}$ 为 λ-类,而 $\mathscr{D}\subset\mathscr{A}$,则 $\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{A}$.

证 设 $\mathscr{G}$ 为包含 $\mathscr{D}$ 的最小 λ-类. 若可证 $\mathscr{G}$ 为 π-类,则(据定理 1.3.2)$\mathscr{G}$ 为 σ-代数,从而有 $\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{G}$;又对包含 $\mathscr{D}$ 的任一 λ-类 $\mathscr{G}'$ 有 $\mathscr{G}'\supset\mathscr{G}$,特别有 $\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{G}\subset\mathscr{A}$.

往证 $\mathscr{G}$ 为 π-类. 令 $\mathscr{G}_1=\{A:A\subset\Omega,AD\in\mathscr{G}$ 对一切 $D\in\mathscr{D}\}$. 显然 $\mathscr{G}_1$ 是 λ-类,且 $\mathscr{D}\subset\mathscr{G}_1$,因此 $\mathscr{G}\subset\mathscr{G}_1$:即只要 $A\in\mathscr{G}$,则对一切 $D\in\mathscr{D}$ 就皆有 $AD\in\mathscr{G}$. 于是,若令 $\mathscr{G}_2=\{B:B\in\Omega,AB\in\mathscr{G}$ 对一切 $A\in\mathscr{G}\}$,则 $\mathscr{G}_2$ 是一含 $\mathscr{D}$ 的 λ-类. 所以 $\mathscr{G}\subset\mathscr{G}_2$. 即对于 $\forall\ B\in\mathscr{G}$,对一切 $A\in\mathscr{G}$ 都有 $AB\in\mathscr{G}$. 换言之,$\mathscr{G}$ 为 π-类. 证毕.

注 欲证 $\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{A}$ 时,可据此证明:$\mathscr{D}$ 是 π-类,$\mathscr{A}$ 是 λ-类及 $\mathscr{D}\subset\mathscr{A}$. 这方法叫 **λ-类法**.

§1.4 λ系与单调系

定义 1.4.1(λ 系) 设 $\mathscr{H}$ 是一非负函数系,满足:(i)$I_\Omega\in\mathscr{H}$;(ii)当 $X_n\in\mathscr{H}\,(n\geqslant1)$,$X_n\uparrow X$ 时就有 $X\in\mathscr{H}$;(iii)当 $X_i\in\mathscr{H}$,c_i 是有限实数($i=1,2$)且 $c_1X_1+c_2X_2\geqslant0$ 时就有 $c_1X_1+c_2X_2\in\mathscr{H}$;则称 $\mathscr{H}$ 为一个 **λ-系**.

注 显然 λ-系所反映的正是 λ-类所具有的性质．

定义 1.4.2(单调系) 非空的非负函数系 $\mathscr{M}$，若满足：(i)由 $X_i \in \mathscr{M}$，$c_i \geqslant 0$ 有限($i=1,2$)可得 $c_1X_1+c_2X_2 \in \mathscr{M}$；(ii)由 $X_n \in \mathscr{M}$ ($n \geqslant 1$)及 $X_n \uparrow X$ 可得 $X \in \mathscr{M}$；就称 $\mathscr{M}$ 为一个**单调系**．

示性函数建立了集类与函数系间的联系．更深刻的联系则体现在下述定理中．

定理 1.4.1 设 $\mathscr{H}$ 是定义在 Ω 上的一族非负函数，其包含(Ω 的一子集类)$\mathscr{D}$ 的全体示性函数，只要下列两款之一成立，$\mathscr{H}$ 就包含全体非负的 $\sigma(\mathscr{D})$-可测函数：

(1)$\mathscr{D}$ 是 π-类，$\mathscr{H}$ 是 λ-系；

(2)$\mathscr{D}$ 是 σ-域，$\mathscr{H}$ 是单调系．

证 置 $\mathscr{G}=\{A: I_A \in \mathscr{H}\}$.

(1)由假设知 $\mathscr{D} \subset \mathscr{G}$. 又由 λ-系定义之(i)、(ii)、(iii)知 $\mathscr{G}$ 是 λ-类．因此由定理 1.3.3 知 $\sigma(\mathscr{D}) \subset \mathscr{G}$. 若 X 是非负的 $\sigma(\mathscr{D})$-可测函数，则如同 $J_{4^n,n} \triangleq \{X \geqslant 2^n\} \in \mathscr{G}$ 一样，也有 $J_{k,n} \triangleq \left\{\dfrac{k}{2^n} \leqslant X < \dfrac{k+1}{2^n}\right\} \in \mathscr{G}$，$0 \leqslant k \leqslant 4^n-1$. 因此，若 $X_n = \sum\limits_{k=1}^{4^n} \dfrac{k}{2^n} I_{J_{k,n}}$，则由(iii)知 $X_n \in \mathscr{H}$. 显然 $X_n \uparrow X$，由(ii)得 $X \in \mathscr{H}$.

(2)此时 $\mathscr{H}$ 为单调系，而 $\mathscr{D}$ 为 σ-域，$\mathscr{G} \supset \mathscr{D} = \sigma(\mathscr{D})$. 其余仿(1)的证法即可．证毕.

注 基于该定理的证法(常称为 **λ-系法，单调系法**)在积分研究中颇为有用．

§1.5 可测空间与测度空间

定义 1.5.1 若 Ω 的某些子集构成的类 $\mathscr{F}$ 为 σ-域，就称(Ω, $\mathscr{F}$)为一个**可测空间**．

定义 1.5.2 设(Ω, $\mathscr{F}$)为可测空间．定义在 $\mathscr{F}$ 上的非负实函数 P 满足：$P(\varnothing)=0$ 及完全可加性 $P\left(\sum\limits_1^\infty A_i\right) = \sum\limits_1^\infty P(A_i)$(此

处及以下均以 ΣA 表互斥诸 A 之并). 就称 P 为$(\Omega,\mathscr{F})$上的一个**测度**,而称$(\Omega,\mathscr{F},P)$为**测度空间**. 当 $P(\Omega)=1$ 时,称 P 为**概率**,称$(\Omega,\mathscr{F},P)$为**概率空间**.

定义 1.5.3 当 $\mathscr{F}$ 上的以实数及 $\pm\infty$ 之一为值的函数 P 满足 $P(\varnothing)=0$ 及完全可加性时,就称 P 为$(\Omega,\mathscr{F})$上的一个**广义测度**. 若对 $\forall\ A\in\mathscr{F}$,有集列 $\{A_n\}\subset\mathscr{F}$ 满足 $P(A_n)<\infty$ 及 $A\subset\bigcup\limits_1^{\infty}A_n$,就称 P 是 $\mathscr{F}$ 上的 **σ-有限测度**. 若对 $\forall\ A\in\mathscr{F}$,由 $P(A)=0$ 及 $B=A$,可推知 $B\in\mathscr{F}$(从而 $P(B)=0$),就称测度 P 是**完备的**.

定理 1.5.1 σ-域 $\mathscr{F}$ 上的非负、有限函数满足完全可加性的充要条件是其具有:

(i) 可加性:对任意的 n 有 $P\left(\sum\limits_1^n A_i\right)=\sum\limits_1^n P(A_i)$;

(ii)连续性:对 $\{A_n\}\subset\mathscr{F}$,当 $A_n\downarrow\varnothing$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(A_n)=0$.

§1.6 可测变换 导出分布

定义 1.6.1 设$(\Omega,\mathscr{F})$与$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$为二可测空间. 若映射 $\xi:\Omega\to\Omega_1$ 满足 $\sigma(\xi)\triangleq\xi^{-1}\mathscr{F}_1\triangleq\{\xi^{-1}F_1:F_1\in\mathscr{F}_1\}\subset\mathscr{F}$ $(\xi^{-1}F_1\triangleq\{\omega:\omega\in\Omega$ 且 $\xi(\omega)\in F_1\})$,即称 ξ 为由$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$的**可测变换**.

注 1 由 $\mathscr{F}_1$ 为 σ-域,易证 $\sigma(\xi)$亦为 σ-域,称为**由 ξ 生成的 σ-域**. 由$(R,\mathscr{B})$[$\mathscr{B}\triangleq\sigma(\{(-\infty,x],x\in R\})$]到其自身的可测变换叫做 Borel(**可测**)**函数**.

注 2 可以证明:连续函数、单调函数皆是 Borel 函数. 又 ξ 可测$\Leftrightarrow\xi^{\pm}\triangleq\max(\pm\xi,0)$皆可测.

定义 1.6.2 设 ξ 是由概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$的可测变换(亦称 ξ 为**随机元**). 由下式

$$(P\xi^{-1})(F_1)\triangleq P(\xi^{-1}F_1),\ F_1\in\mathscr{F}_1$$

在 $\mathscr{F}_1$ 上定义出的测度 $P\xi^{-1}$(称为 ξ 的导出测度),叫做 **ξ 的分布**.

由概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(R,\mathscr{B})$的随机元ξ称为该概率空间上的**随机变量**(r. v.)[①]. 称

$$F(x)\triangleq(P\xi^{-1})(-\infty,x)\triangleq P[\xi<x],\ x\in R$$

为ξ的**分布函数**(d. f.). 记作$\xi\sim F(x)$.

注 1 可以证明:Ω上的实值函数ξ可测$\Leftrightarrow$对每个有限的x有$\{\xi<x\}\in\mathscr{F}$.

注 2 R上任一非降、左连续函数F,满足

$$F(x)\to\begin{cases}0, & \\ 1, & \end{cases}\text{当 } x\to\begin{cases}-\infty, \\ +\infty\end{cases}\text{时,称为一个分布函数}.$$

注 3 依测度论,随机变量是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(R,\mathscr{B})$的可测函数. 在概率论中,可测函数则是由$(\Omega,\mathscr{F},P)$到$(R^-,\mathscr{B}^-)$ $[R^-\triangleq R\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\},\mathscr{B}^-\triangleq\sigma(\{[-\infty,x]:x\in R^-\})]$的随机元.(换言之,随机变量是可测函数;反之未必.)又,X为 r. v.,则$P(|X|=\infty)=0$.

§1.7 测度的扩张与完备化

定理 1.7.1(测度的扩张) 设P是代数$\mathscr{A}$上的σ-有限测度. 则在$\sigma(\mathscr{A})$上有唯一的σ-有限测度$\overline{P}$,其满足:对$\forall\ A\in\mathscr{A}$有$\overline{P}(A)=P(A)$. 称$\overline{P}$是P的**扩张**.

定理 1.7.2(测度的完备化) 设P是σ-代数$\mathscr{F}$上的测度. 则一切形如$A\Delta N$的集合构成含$\mathscr{F}$的σ-代数$\widetilde{\mathscr{F}}$(此处N是$\mathscr{F}$中一零测集的子集,$A\in\mathscr{F}$). 定义$\overline{P}(A\Delta N)=P(A)$. 则称$\overline{P}$是$\widetilde{\mathscr{F}}$上的**完备化测度**,而$\widetilde{\mathscr{F}}$是$\mathscr{F}$关于$P$的**完备化$\sigma$-代数**.

注 对R上的一个分布函数F,令$P[(-\infty,x)]\triangleq F(x)$, $\boldsymbol{R}_0\triangleq\left\{A:A=\sum_{i=1}^{m}(a_i,b_i],m\text{ 为任一自然数}\right\}$(其中$a_i,b_i$可取无穷值. 但若$b_i=\infty$时,则$(a_i,b_i]$应改为$(a_i,b_i)$). 可以证明$\boldsymbol{R}_0$为$R$上

---

① r. v. 系 random variable(随机变量)之缩写.

的一个代数．令

$$P_F(a,b]\triangleq F(b)-F(a);$$

$$P_F(A)\triangleq\sum_{i=1}^{m}P_F(a_i,b_i],\text{ 当 } A\in\boldsymbol{R}_0\text{ 时}.$$

依扩张定理可把 P_F 的定义域由代数 $\boldsymbol{R}_0$ 扩张到 $\sigma(\boldsymbol{R}_0)\triangleq\mathscr{B}$ 上，而得 $\overline{P}_F$，其仍为一个 σ-有限测度，并且当 $A\in\boldsymbol{R}_0$ 时有 $\overline{P}_F(A)=P_F(A)$.

把 $\mathscr{B}$ 关于 $\overline{P}_F$ 的完备化 σ-代数记作 $\widetilde{\mathscr{B}}_F$. 记定义在 $\widetilde{\mathscr{B}}_F$ 上的完备化测度为 $\tilde{\overline{P}}_F$，称为**由 F 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度**．$\widetilde{\mathscr{B}}_F$ 中的集称为**关于 F 的可测集**．

特别，取 $F(x)\triangleq m(x)=x,x\in(-\infty,\infty)$ 时，得 $\tilde{\overline{P}}_F=\tilde{\overline{P}}_m$. 称为 Lebesgue **测度**；而 $\widetilde{\mathscr{B}}_F=\widetilde{\mathscr{B}}_m$ 中的集叫 Lebesgue **可测集**．称 $(R,\widetilde{\mathscr{B}}_m,\tilde{\overline{P}}_m)$ 为 R 上的 Lebesgue **测度空间**．

§1.8 概率空间中的积分及收敛定理

定义 1.8.1 设 X 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的实值可测函数．它在 Ω 上关于 P 的积分 $\int_\Omega X\mathrm{d}P$（简记作 EX，称为 X 的**期望或均值**）的定义是：

对于 $X\geqslant 0$，有

$$EX=\begin{cases}\infty, \text{若 } P\{X=\infty\}>0;\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=0}^{n2^n-1}\dfrac{k}{2^n}\cdot P\left\{\dfrac{k}{2^n}<X\leqslant\dfrac{k+1}{2^n}\right\}+n\cdot P\{X>n\}\right],\\ \qquad \text{若 } P\{X=\infty\}=0.\end{cases}$$

对于一般的 X（注意 $X^{\pm}\triangleq\max(\pm X,0)\triangleq\pm X\vee 0\geqslant 0$）当 $EX^+\wedge EX^-\triangleq\min(EX^+,EX^-)<\infty$ 时，令

$$EX=EX^+-EX^-.$$

此时 $EX\in[-\infty,\infty]$，称 X 的**积分存在**；而当 $|EX|<\infty$ 时称 X

可积．当 $\min(EX^+,EX^-)=\infty$ 时，X 的积分不存在．

对于 $A\in\mathscr{F}$，称 $E(XI_A)$ 为 X 在 A 上关于 P 的积分，即 $EXI_A=\int_A X\mathrm{d}P$.

引理 1.8.1 可测函数 X 可积 $\Leftrightarrow$ 对每个 $\varepsilon>0$，有一个 $\delta>0$ 使由 $A\in\mathscr{F}$ 与 $P(A)<\delta$ 可推得 $\int_A |X|\mathrm{d}P<\varepsilon$ 及 $E|X|\leqslant\frac{1}{\delta}$.

定理 1.8.1 设 ξ 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 的可测变换，g 是 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 到 $(R,\mathscr{B})$ 上的可测函数，则下式在其一端有意义时成立：

$$Eg(\xi)=\int_{\Omega_1} g\mathrm{d}P\xi^{-1}.$$

定理 1.8.2(Jensen 不等式) 设 ξ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量，$E\xi$ 有意义；又 g 是 R 上的连续凸函数，$Eg(\xi)$ 有意义．则

$$Eg(\xi)\geqslant g(E\xi), \tag{1.8.1}$$

其中 $g(\pm\infty)\triangleq\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)$．

定理 1.8.3(Hölder 不等式) 设 ξ,η 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的可测函数，p,q 满足 $1<p,q<\infty$ 及 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则

$$E|\xi\eta|\leqslant(E^{\frac{1}{p}}|\xi|^p)\cdot(E^{\frac{1}{q}}|\eta|^q). \tag{1.8.2}$$

当 $\max(E|\xi|^p,E|\eta|^q)<\infty$ 时，式中等号仅当 $\xi=0$ a.s. 或 $\eta=0$ a.s. 或有 $c>0$ 使 $|\xi|^p=c|\eta|^q$ a.s. 时成立．

特别，由定理可得

推论 1.8.1(矩不等式) 当 $s<t$ 是正实数时，对 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上任一随机变量 ξ 有

$$E^{\frac{1}{s}}|\xi|^s\leqslant E^{\frac{1}{t}}|\xi|^t. \tag{1.8.3}$$

若 $E|\xi|^t<\infty$ 时，则式中等号当且仅当 $\xi=\text{const}$ a.s. 时成立．

定理 1.8.4(Minkowski 不等式) 设 ξ,η 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的两个随机变量，则

(i) 当 $p\geqslant1$ 时有

$$E^{\frac{1}{p}}|\xi+\eta|^p\leqslant E^{\frac{1}{p}}|\xi|^p+E^{\frac{1}{p}}|\eta|^p. \tag{1.8.4}$$