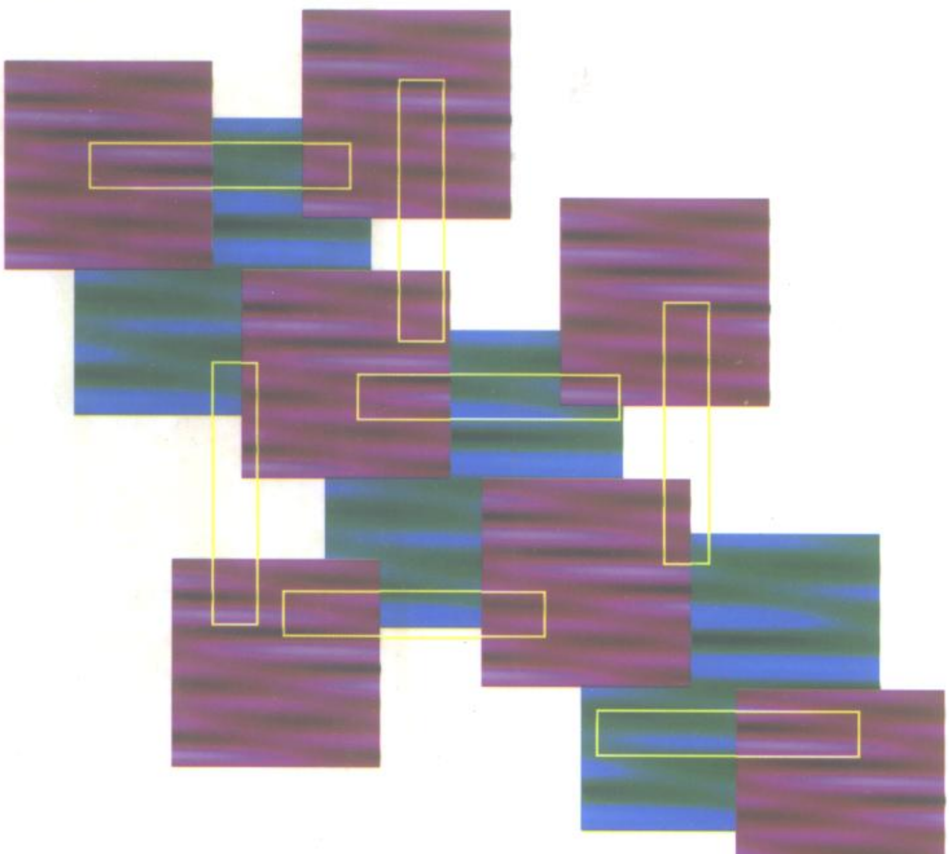
国家自然科学基金资助项目

现代电磁场理论的数学基础

矢量偏微分算子

宋文淼 著



科学出版社

现代电磁场理论的数学基础

矢量偏微分算子

宋文淼 著

科学出版社

1999

内 容 简 介

本书是一部全面系统地论述矢量偏微分算子理论的学术专著. 在分析偏微分算子、广义函数和矢量场理论的基础上，深入讨论矢量偏微分算子的性质和它的完备性，子空间的正交性和完备性，广义亥姆霍兹定理等，并从这些数学理论出发，讨论了电磁场的麦克斯韦方程组的求解方法，从而解决了经典电磁理论中一些长期没有解决的问题，如无旋场与旋量场的分离问题，电磁场本征问题的数值方法等. 主要内容包括：线性微分算子和线性函数问题，广义函数与广义傅里叶变换，矢量偏微分算子和矢量波函数空间，规则边界下标量场算子的本征问题和格林函数问题，矢量场算子的本征问题和格林函数问题.

本书理论叙述严谨，概念清楚，文字流畅. 可供从事电磁场理论研究、电磁波传播、信息工程研究，以及从事数学和物理研究的科技人员阅读，也可作为高等学校上述专业的大学生、研究生和教师的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

矢量偏微分算子/宋文淼著. -北京：科学出版社，1999. 4
ISBN 7-03-007115-8

Ⅰ. 矢… Ⅱ. 宋… Ⅲ. 矢量-偏微分算子 Ⅳ. O175. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 32965 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999 年 4 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
1999 年 4 月第一次印刷 印张：10 1/2
印数：1—2 000 字数：236 000

定价：20.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　　言

电磁场理论已经历了一个多世纪的发展历史，它对于科学和技术的进步，以至于人类生活方式的变化都起到了无法估量的作用.电磁场的应用领域是如此的广阔，在各个应用领域，科学家和工程师们发表了数以万计的著作和论文，形成了经典电磁场理论的浩繁、深厚而又显得零乱的学科特点.麦克斯韦方程组是电磁场理论的基础，但是直到今天，我们对于麦克斯韦方程组本身的研究却并不多，也不很深入.矢量偏微分算子理论就是对麦克斯韦方程组的数学理论进行研究的一种尝试，它是在并矢格林函数理论基础上发展起来的.1979 年戴振铎教授回国讲学，使我第一次接触到了并矢格林函数理论，这是一种研究麦克斯韦方程组直接求解方法的理论.由于麦克斯韦方程组是一个联立的矢量偏微分方程组，在此以前，人们并不能直接对它进行求解，而是要通过一些人为的“规范”，把矢量偏微分方程组变换为标量偏微分方程组后才能求解，但是这样的一些变换既没有严格的数学依据，也没有明确的物理内容.经戴振铎教授的推荐，1979～1981 年间，我到他所在的美国密执安大学电机工程系作访问学者，更得到了他在各方面的关心和指导.回国以后，特别是到了中国科学院电子学研究所高功率微波与电磁辐射开放研究实验室工作，并得到了国家自然科学基金委的资助，有了一个从事基础理论研究工作的安定环境.本书中的工作就是在这期间我和我的同事在这方面工作的总结.

麦克斯韦方程组是一个矢量偏微分方程组，戴振铎教授的工作已基本上解决了这一方程组的严格解析求解问题，但是由于在矢量波函数的本征函数展开以及并矢 δ 函数奇异性处理等问题上还缺乏严格的数学理论，使得有些问题的处理不够严密，也引起了一些争论.戴教授的这一研究工作是从四五十年代开始的，基本理论研究完成于 60 年代.当时在数学上，广义函数理论正处于形成和发展的过程中.80 年代以后，戴教授曾多次提到广义函数理论对于严格解决电磁场理论的作用.本书的内容主要是关于研究矢量偏微分算子和由这一算子所定义的矢量波函数空间，以及在这一矢量波函数空间中的广义函数和广义函数的傅里叶变换问题.由于数学工作者在标量的偏微分算子和广义函数方面提供了完善的理论，因此我们的工作主要是把标量函数空间中的这些理论推广到矢量波函数空间中去，并由此为麦克斯韦方程组的求解建立一个比较严密的数学理论.

正如本书的总结中所指出的，数学方法的改变也改变了经典电磁场理论中的一些重要的物理内容.我们的这一工作说明，麦克斯韦方程组本来就包含着深刻的物理内容，它与量子电动力学的概念是完全相通的，只是在麦克斯韦方程组中未考虑量子效应，但它却能反映出在由全反射边界组成的空间内光量子的群体特性，并能严格地反映出电磁波与带电粒子流之间宏观的相互作用规律.麦克斯韦方程组中这样的一些物理内容，在经典电磁场理论中由于数学方法的近似性而无法表达出来.我们相信这种现代数学方法的应用不仅对于物理学是有意义的，对于电磁场工程也是同样有实用价值的.

目　　录

第一章 线性微分算子和线性函数空间

线性微分算子和线性函数空间理论现在已经是一般理工科的研究生甚至本课生所熟悉的内容了，但是要真正掌握它并把它正确地应用到工程和物理问题中却并不容易.在学习这一章时除了要掌握基本概念外，我们特别强调下面两个问题：

1)本征函数系的完备性问题，这是本征函数展开的数学基础，而本征函数展开是本书中贯穿始终的最基本方法.由于电磁场算子是二阶的，所以对一些问题的讨论，特别是对于本征函数系完备性的证明仅限于二阶微分算子.我们这样做的目的，是为了在这一相对较窄的范围内把应该搞清楚的问题尽可能地搞清楚.特别要搞清楚的是本征函数的展开问题，或者说函数空间中的"基函数系"的完备性与经典数学中傅里叶展开的"基函数系"的完备性之间的差别.这是算子理论（或者说函数空间理论）与经典数学的主要差别之一.经典数学总是在整个欧氏空间（或在它的射影）中考虑问题，而函数空间理论却能够从其中提取出具有共同特性的函数组成"函数空间"，这一函数空间显然比"欧氏空间中所有的函数"组成的空间要小.这就是说，函数空间理论提供了一种比经典数学更为精细的分析方法，因而可以解决许多电磁场理论中经典分析方法所难以解决的问题.

2)在以往的电磁场理论中，总是先研究无限大域的问题.并以此作为基础来研究有界域的问题.但根据算子理论只有在自共轭边界条件下的有界域算子，其本征函数系才具有完备性，因而才能进行本征函数的展开并用本征函数展开法来求解逆算子问题.而在无限大域的情况下，辐射边界条件在经典数学的意义上并不是自共轭边界条件，因而它的本征函数系不能构成严格意义下的完备的线性函数空间.但在本章中，我们把在有界域下得到的结果推广到了无限大域中，而且得到了对于本征函数展开和逆算子的普遍的表达式.应该注意，在本章中的这些结果对于无限大域的情况是不够严格的，只有经过数学上的进一步说明并加上若干补充条件后，这些结果才有真正的意义.我们将在第二章的广义函数和广义函数空间问题中来讨论这些问题.当然，有界域问题和无限大域问题的处理往往是相辅相成的.在一维波动方程算子理论中，有界域的问题是基础，在这基础上经过各种附加的条件和特殊的处理就可将有关结果推广到无限大域中去.而从另一个角度，用另一种数学方法，无限大域问题的处理不但是方便的而且也是严格的；这时我们也可以借助无限大域中所得到的结果和方法来解决有界域中的问题.我们在第二章中所介绍的部分工作就属于这方面的内容.

1.1 线性变换和线性微分算子

1.1.1 *H* 空间的一些基本特性[1,2]

在讨论线性变换和线性微分算子以前必须先讨论一下函数空间的一般概念，我们所讨论的变换都是在 H 空间中进行的. H 空间中的每一个元素一般称为向量.

在空间 E 上，$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 两向量的内积 $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ 是一个标量，它满足如下条件：

1) $\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \geqslant 0$,而且$\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x}=0$;

2) $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y},\mathbf{x}\rangle^*$;

3) $\langle \lambda\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \lambda\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$;

4) $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y},\mathbf{z}\rangle$.

由上述内积的条件可以导出:

5) $\langle \mathbf{x},\lambda\mathbf{y}\rangle = \lambda^*\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$;

6) $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle$.

这里"$*$"表示复共轭.一般说来,若复(实)数域上的线性空间E上定义了满足上述条件的"内积",那么这一空间就叫做内积空间.一个内积空间,当它作为线性赋范空间是完备时,就称为希尔伯特(Hilbert)空间,简称H空间.在本书中所讨论的都限于H空间.对微分算子来说,通常讨论的是闭域$[a,b]$内平方可积的连续函数空间,一般以$L^2_{[a,b]}$记之.对于这样的空间如果我们定义内积为

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g^*(x)dx, \tag{1.1}$$

则这一空间就属于内积空间或H空间.显然,式(1.1)的定义满足关于内积的条件1)~4).

对于三维的欧氏空间,可以把内积定义为通常的点积

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i, \tag{1.2}$$

而对于n维的复矢量空间,则内积定义为

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*. \tag{1.3}$$

这些内积的定义显然都满足关于内积的条件.以后当我们讨论的问题从微分算子扩大到偏微分算子和矢量偏微分算子时,为了在H空间的范围内讨论算子的映射和逆映射问题,同样必须首先定义一个满足内积条件的内积运算.

对于内积空间,我们可以定义一个范数:

$$\| f \| = \sqrt{\langle f,f\rangle}. \tag{1.4}$$

范数一定是一个非负的实数,当且仅当$f=0$时,$\| f \| = 0$.

对于任意两个元素x和y,它们的内积的模一定小于这两元素范数的积:

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|. \tag{1.5}$$

证明 根据内积定义,对任意的α和β均有

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \langle \alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y\rangle \\
&= |\alpha|^2\langle x,x\rangle + \alpha\beta^*\langle x,y\rangle + \alpha^*\beta\langle y,x\rangle + |\beta|^2\langle y,y\rangle \\
&= \left(\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\alpha + \frac{\langle y,x\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}\cdot\beta\right)\cdot\left(\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\alpha + \frac{\langle y,x\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}\cdot\beta\right)^* \\
&\quad + \left(-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle} + \langle y,y\rangle\right)\cdot|\beta|^2.
\end{aligned}$$

既然α,β是任意的,令

$$\alpha = -\frac{\langle y,x\rangle}{\langle x,x\rangle}\beta,$$

则得

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle,$$

即

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

或

$$\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leqslant 1.$$

因而可以定义

$$\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos\theta. \tag{1.6}$$

这样，在 H 空间中我们就引入了两个向量间夹角的定义. 由角度的概念也就很自然地引入了正交的概念，如下：

如果两个向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的内积为零，就称为 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 正交.

如果有 n 个向量相互之间都正交，就组成了一个正交系.

标准正交系 在 H 空间中，设 e_i 是这样一组序列，它满足

$$\langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\cdots, \tag{1.7}$$

这里，δ_{ij}为克内道尔 δ 函数：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.8}$$

这时 e_i 为标准正交系. 标准正交系就是归一化的正交系.

H 空间上，任意函数 f 在正交系 e_i 上的射影为

$$f|_{e_i} = \langle f,e_i\rangle, \tag{1.9}$$

它通常叫作函数 f 在 e_i 上的傅里叶系数.

例 $L^2_{[0,2\pi]}$中的三角函数系就是一个正交系. 取

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikt}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots. \tag{1.10}$$

这里的系数 $1/\sqrt{2\pi}$是为了归一化的目的，称之为归一化系数. 它的正交性证明如下：

$$\langle e_k,e_l\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t}dt = \delta_{k,l}.$$

任意函数 $x(t)$在这一正交系上的射影

$$\langle x,e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} x(t)e^{-ikt}dt \tag{1.11}$$

就是傅里叶系数. 而当一般项为$\langle x,e_k\rangle e_k$ 的级数收敛于函数 x 时，就称这一正交系是完备的. 称一个完备的标准正交系为正交基.

正交系的完备性问题是一个十分重要的问题. 对于一个无限大维的正交系，它的完备性通常用下面的形式来表示：

$$\lim_{N\to\infty} \| f - \sum_{n=1}^{N}\langle f,e_n\rangle e_n \| = 0. \tag{1.12}$$

通常把 $\|\cdots\|$ 内的量称为余量. 级数的收敛性通常用当 $n\to\infty$时，余量的范数为零来证明. 也就是说，对于一个完备的正交系，所在空间内的任意函数都可以展开为一收敛级数：

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n. \tag{1.13}$$

1.1.2 映射(或变换)

泛函分析中映射的概念和经典数学分析中的函数概念十分相似,它们都是分析的基础.在物理问题中,与映射相对应的概念通常采用“变换”这个名词.为此,我们先看一下经典分析中函数的概念是有益的:设 X 是数轴上的某一集合,如果对于每一个数 $x \in X$,让一个确定的数 $y=f(x)$ 与之对应,我们就说在集 X 上定义了一个函数 f.这个 X 叫做函数的定义域,把 Y——这一函数 y 取值的总体叫做函数的值域.当然,X 也可以是平面上的以至 n 维欧氏空间上的集合.

如果 X 不限于欧氏空间中的数集,而是 H 空间中的任意一个集,这时我们就得到关于映射(或变换)的概念.我们特别感兴趣的是连续线性函数空间的情况,所以我们的讨论只限于这类空间,或者说我们的讨论限于线性向量空间即 H 空间.如果 E 是一个线性向量空间,对于每一个 $f \in E$,让一个确定的元素 $g=Lf$ 与之对应.这样就定义了一个映射,或叫做进行了一次空间变换.这里所有 f 的总体称为 g 的原像,而所有 g 的总体称为 f 在映射 L 下的像.这样我们就有:

$$g = Lf, \tag{1.14}$$

L 就称为算子.如果 L 满足

$$L(\lambda f) = \lambda Lf \tag{1.15}$$

和

$$L(f + g) = Lf + Lg, \tag{1.16}$$

则称算子 L 是线性的.

例 1 图 1.1 所示的为由分布电流源 $J(x)$ 所激励的均匀传输线,这一传输线可以是无限长的或者是有限的,每端接有匹配阻抗.这种一维的传输系统通常看作是电磁问题的最简单模型:电压代替了电场,而电流代替了磁场.我们可以得到电压和电流的方程组如下:

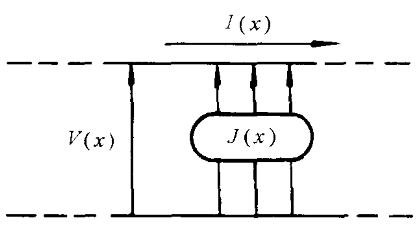


图 1.1 分布电流源激励的均匀传输线

$$\frac{dV(x)}{dx} = i\omega L_0 I(x) \tag{1.17}$$

和

$$\frac{dI(x)}{dx} = i\omega C_0 V(x) + J(x), \tag{1.18}$$

式中 L_0 和 C_0 分别表示传输线的分布电感和分布电容. 消去 $I(x)$后得

$$\frac{d^2}{dx^2}V(x)+k^2V(x)=i\omega L_0J(x), \tag{1.19}$$

式中 $k=\omega\sqrt{C_0L_0}$表示传输线的传播常数. 我们把式(1.19)写成算子方程的形式:

$$LV(x)=K(x), \tag{1.20}$$

这里

$$L=\frac{d^2}{dx^2}+k^2, \tag{1.21}$$

$$K(x)=i\omega L_0J(x). \tag{1.22}$$

这样就得到了一个映射的例子. 从物理上说,通过算子 L,从电压空间$\{V\}$变换到激励电流空间$\{K\}$.

例 2 在两个无限大平板间分布着层状的电荷,如图 1.2 所示,求空间的电位分布(在固体微波器件中常遇到这类问题).

从泊松方程和边界条件:

$$\frac{d^2}{dz^2}\psi(z)=-\rho(z)/\varepsilon_0, \tag{1.23}$$

$$\psi(0)=0, \qquad \psi(l)=\psi_0. \tag{1.24}$$

用算子 L 可以写成算子方程的形式:

$$L\psi(z)=-\rho(z)/\varepsilon_0. \tag{1.25}$$

这一算子方程不但表示了式(1.23)的微分方程,同时也包含了式(1.24)的边界条件.

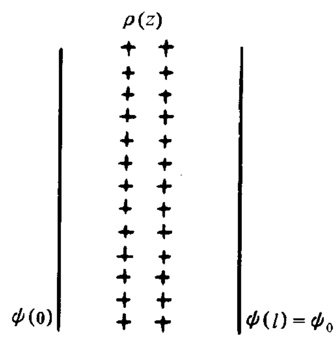


图 1.2 无限大平行平板中层状电荷产生的电位分布

例 3 对于例 2 我们容易算出

$$\psi(z)=-\int_0^z\left[\int_0^z\rho(z)dz+C_1\right]dz+C_2, \tag{1.26}$$

式中的 C_1 和 C_2 可由边界条件来确定:从 $\psi(0)=0$,得 $C_2=0$,根据 $\psi(l)=\psi_0$,并由方程

$$-\int_0^l\left[\int_0^l\rho(z)dz+C_1\right]dz=\psi_0$$

可算出 C_1. 同样可以用算子 A 写成算子方程的形式:

$$A\rho(z)=\psi(z).$$

显然这里 A 表示了 L 的逆变换,所以算子 A 称为算子 L 的逆算子. 通常用 L^{-1}表示,即上面的算子方程通常表示为

$$L^{-1}\rho(z) = \psi(z). \tag{1.27}$$

从上面例子可以看出，在电磁场问题中，一般说来源空间是已知的，而场空间是待求的，因而最关心的问题是逆变换问题.

1.1.3 线性微分算子[3,4]

从上面的三个例子看出，算子有各种不同的形式：例 1 和例 2 中的算子都由微分表达式组成，称之为微分算子；在例 2 中除了微分表达式外还有边界条件；例 3 中的算子由积分表达式所组成，称为积分算子. 在电磁场理论中主要涉及这两类算子，积分算子常作为微分算子的逆算子而出现.

我们所研究的是线性微分算子，线性微分算子由线性微分表达式和齐次边界条件两部分所组成.

(1) 线性微分表达式

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y \tag{1.28}$$

被称为线性微分表达式. 这里 $y^{(n)}$ 表示 y 的 n 阶导数. 函数 $p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 为系数，假定 $1/p_0(x), p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 在给定域 $[a,b]$ 上连续. 把在 $[a,b]$ 上具有直到 n 阶为止的连续导数的函数 $y(x)$ 的集合用 $L_{[a,b]}^{(n)}$ 记之.

对于任何函数 $y \in L_{[a,b]}^{(n)}$，微分表达式 $l(y)$ 显然是在区间 $[a,b]$ 上的连续函数.

(2) 齐次边界条件

用

$$y_a, y_a', \cdots, y_a^{(n-1)} \text{ 和 } y_b, y_b', \cdots, y_b^{(n-1)}$$

分别表示函数 y 及它们的 1 阶至 $n-1$ 阶导数在边界点 a 和 b 的值. 用 $U(y)$ 表示关于上述边界值的线性组合，即

$$U(y) = a_0 y_a + a_1 y_a' + \cdots + a_{n-1} y_a^{(n-1)} + b_0 y_b + \cdots + b_{n-1} y_b^{(n-1)}.$$

如果能够给出某些线性组合 $U_\nu(y)$，$\nu = 1, 2, \cdots, m$，使

$$U_\nu(y) = 0, \tag{1.29}$$

这就称为齐次边界条件.

从式(1.28)的微分表达式可得到一微分方程

$$l(y) = g. \tag{1.30}$$

满足微分方程(1.30)和边界条件(1.29)的函数，记以

$$Ly = g, \tag{1.31}$$

算子 L 称为由微分表达式 $L(y)$ 及边界条件(1.29)所产生的线性微分算子，这样一来，同一微分表达式由于边界条件不同，可以产生不同的算子. 特别是当 $g=0$ 时，即确定适合下面条件：

$$l(y) = 0, \tag{1.32}$$

$$U_\nu(y) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \cdots, m \tag{1.33}$$

的函数 y 的问题，称为齐次边值问题. 它可以表示为

$$Ly = 0, \tag{1.34}$$

而式(1.31)就称为非齐次边值问题.

1.1.4 齐次边值问题的平凡解和非平凡解

任何齐次边值问题至少有一个解，就是 $y\equiv 0$，这个解称为平凡解. 然而它还可以具有"非平凡解"，即 $y\not\equiv 0$.

下面研究齐次边值问题具有非平凡解的条件. 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是微分方程 $l(y)=0$ 的线性无关解，从线性微分方程的一般理论，方程 $l(y)=0$ 的任何一个包含边界条件的解应为

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n.$$

将其代入边界条件(1.32)，得到用来确定 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的线性齐次方程组：

$$\begin{cases} c_1u_1(y_1) + c_2u_1(y_2) + \cdots + c_nu_1(y_n) = 0, \\ c_1u_2(y_1) + c_2u_2(y_2) + \cdots + c_nu_2(y_n) = 0, \\ \qquad \vdots \\ c_1u_m(y_1) + c_2u_m(y_2) + \cdots + c_nu_m(y_n) = 0. \end{cases} \tag{1.35}$$

从这里可以看出，齐次问题有非平凡解的条件即为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 有非平凡解的条件，它可以概括为：

1) $m=n$，即边界条件数等于微分表达式的阶数时，有非平凡解的条件为 u 的行列式等于零.

2) $m<n$ 时，齐次边值问题有非平凡解.

3) $m>n$ 时，这时要看 u 矩阵的秩 r，如果 $r<n$，则仍有非平凡解，否则没有非平凡解.

下面着重讨论一下二阶微分表达式的情况. 对 $n=2$，边界条件也可以简化为函数及其一阶导数的边值：y_a, y_b 和 y'_a, y'_b. 从电磁问题的物理性质决定齐次边界条件中不会出现 a 点的值和 b 点的值之间的组合，因而只能出现三种类型的齐次边界条件：

第一类边界条件——狄利克雷(Dirichlet)条件，

$$y_a=0 \qquad (\text{或 } y_b=0);$$

第二类边界条件——诺伊曼(Neumann)条件，

$$y'_a=0 \qquad (\text{或 } y'_b=0);$$

第三类边界条件——混合边界条件，

$$y_a+a_1y'_a=0 \qquad (\text{或 } y_b+b_1y'_b=0),$$

这里 a_1 和 b_1 一般可为任意常数. 在如图 1.1 所示的一维传输线的情况下，第一类边界相当于短路边界，第二类边界相当于开路边界，第三类边界相当于阻抗边界. 对于 a_1 或 b_1 为实数的情况是电抗边界. 当 a_1 或 b_1 为纯虚数时一般为电阻边界，这类边界通常不作为齐次边界来考虑，但当这一电阻和传输线的特性阻抗相匹配时，波就没有反射，这种边界通常称为辐射边界.

显然，对于一维的电磁问题来说，如果有两个齐次边界条件，其齐次问题有非平凡解的条件是 u 的行列式等于零. 如果少于两个齐次边界条件，则一定有非平凡解. 这一问题与本征值分布问题及逆算子的存在问题直接有关，以后还要进一步讨论.

1.1.5 共轭线性微分算子和线性自共轭算子

共轭算子的定义 如果

$$\langle Ly,z\rangle = \langle y,L^a z\rangle, \tag{1.36}$$

我们就称 L^a 为 L 的共轭算子. 根据内积的定义可以证明算子 L 也是 L^a 的共轭算子,即

$$[L^a]^a = L. \tag{1.37}$$

证明

$$\begin{aligned}\langle Ly,z\rangle &= \langle y,L^a z\rangle \\ &= \langle L^a z,y\rangle^* = \langle z,[L^a]^a y\rangle^* = \langle [L^a]^a y,z\rangle.\end{aligned}$$

当

$$L^a = L \tag{1.38}$$

时,称 L 为自共轭算子.

对线性微分算子来说,自共轭的条件包括自共轭微分表达式和自共轭边界条件两方面. 对二阶微分表达式的情况:

$$l(y) = p_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y,$$

它的内积可以表示为

$$\langle Ly,z\rangle = \int_a^b [p_0 z^* y'' + p_1 z^* y' + p_2 z^* y]dx.$$

先求第一项的积分,应用两次分部积分:

$$\begin{aligned}\int_a^b p_0 z^* y''\,dx &= [p_0 z^* y']_a^b - \int_a^b y'(p_0 z^*)'dx \\ &= [p_0 z^* y' - (p_0 z^*)'y]_a^b + \int_a^b (p_0 z^*)''\,ydx.\end{aligned}$$

用同样方法写出第二、第三项,并把所有三项加起来. 得

$$\begin{aligned}\langle Ly,z\rangle &= [p_0 z^* y' - (p_0 z^*)'y + p_1 z^* y]_a^b \\ &\quad + \int_a^b [(p_0 z^*)'' - (p_1 z^*)' + p_2 z^*]\cdot ydx.\end{aligned}$$

为了确定 L 是自共轭算子的条件,我们再写出 $\langle y,L^a z\rangle$,并使它和 $\langle Ly,z\rangle$ 相等,

$$\langle y,L^a z\rangle = \int_a^b l^a(z)^*\,ydx.$$

由此可以得到自共轭微分算子的条件:

1) 它的微分表达式为自共轭微分表达式

$$l^a(z) = (p_0^* z)'' - (p_1^* z)' + p_2^* z; \tag{1.39}$$

2) 边界条件为自共轭边界条件

$$[p_0 z^* y' - (p_0 z^*)'y + p_1 z^* y]_a^b = 0. \tag{1.40}$$

最后,我们给出实系数下二阶微分表达式的自共轭边界条件:

$$\begin{aligned}l^a(y) &= (p_0 y)'' - (p_1 y)' + p_2 y = p_0 y + 2p_0' y' + p_0 y'' - p_1 y' + p_2 y \\ &= P_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = l(y),\end{aligned}$$

所以有 $(p_0''-p_1')y+(2p_0'-2p_1)y'=0$,即

$$p_0'(x) = p_1(x). \tag{1.41}$$

因此，自共轭实系数二阶微分表达式的形式为

$$l(y) = (py')' - qy. \tag{1.42}$$

由自共轭微分表达式组成的二阶常微分方程

$$l(y) + \lambda wy = 0 \tag{1.43}$$

称为斯特姆-刘维尔(Sturm-Liouville)方程，很多物理和工程中所遇到的问题都能表示成该类方程的形式. 其中 λ 是常数，通常称为本征值，$w \geqslant 0$ 是 x 的连续函数，通常叫作加权函数.

下面讨论自共轭边界条件，把式(1.41)代入式(1.40)，得

$$[p_0 z^* y' - p_0 z^{*\prime} y]_a^b = 0$$

或

$$[z^* y' - z^{*\prime} y]_a^b = 0. \tag{1.44}$$

由此看出对于前面给出的三类边界条件都是自共轭边界条件. 特别要说明的是对于混合边界条件，只有当系数 a_1(或 b_1)为实数时才是自共轭边界条件.

自共轭算子有许多便于分析的特性，所以判断一个算子是否是自共轭算子是很重要的，在以后的章节中我们主要讨论二阶的自共轭微分方程——斯特姆-刘维尔方程——的特性和求解问题.

1.2 微分算子的本征值和本征函数

1.2.1 本征值和本征函数的定义

如果在算子 L 的定义域 D 上存在一函数 $y \neq 0$，使得

$$Ly = \lambda y, \tag{1.45}$$

则 λ 就叫做算子 L 的本征值，这个函数 y 就称为算子 L 相对于本征值 λ 的本征函数.

对于线性微分算子 L 来说，它的本征值就是使齐次边值问题

$$l(y) = \lambda y, \tag{1.46}$$

$$U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, m, \tag{1.47}$$

具有非平凡解的参量 λ 的值. 这些非平凡解就是相应的本征函数.

对应于同一个本征值 λ 可以有不同的本征函数，而这些本征函数的线性组合仍是对应于 λ 的本征函数，即若对应于 λ 有两个本征函数 y_1 和 y_2，因而有 $Ly_1 = \lambda y_1$ 和 $Ly_2 = \lambda y_2$；显然对任意常数 c_1 和 c_2 均有 $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \lambda(c_1 y_1 + c_2 y_2)$. 对应于一个本征值有一个以上的本征函数，在电磁场问题中称为简并. 对应于一个 λ 的边值问题(1.46)和(1.47)的线性无关解的个数，称为本征值的重数. 显然，本征值的重数小于阶数 n.

本征值的分布情况是物理上很感兴趣的问题，孤立的(离散的)本征值在半导体中相应于分离的能级，而连续分布的本征值 λ 在半导体中相应于连续的能带. 在电磁问题中孤立的本征值相应于分离的谐振频率，而连续分布的本征值则相应于连续的通带. 本征值的分布情况取决于边界条件：

(1) 当 $m < n$ 时，任何 λ 值都是本征值；

(2) 当 $m = n$ 时，从式(1.34)得到一个隐含 λ 的系数行列式，记以 $\Delta(\lambda)$，

$$
\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix}
$$

被称为算子 L 的特征行列式. 本征值的分布取决于特征行列式的情况：

如果 $\Delta(\lambda)\equiv 0$,则所有的 λ 都是本征值；

如果 $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$,则函数 $\Delta(\lambda)$ 的零点即为算子 L 的本征值,这时,

$$
\Delta(\lambda) = 0 \tag{1.48}
$$

就称为本征方程,通过解本征方程来求系统的本征值是电磁场理论中最基本的问题之一.

1.2.2 一维波动方程的本征值和本征函数

我们以 1.1 节中的一维波动方程为例来看一看本征值、本征函数和本征值分布的情况,以及它们的物理意义,现在考虑的是齐次问题,即

$$
\frac{d^2V(x)}{dx^2} + k^2V(x) = 0, \tag{1.49}
$$

这里 $l(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}V(x)$, $\lambda=-k^2$. 微分表达式的阶等于 2.

(1)无约束的情况

这时 $m=0$,所以任何一个 λ 都是本征值. 对于每一个 λ 都有两重简并,这两个本征函数的任意组合仍是 λ 的本征函数. 式(1.49)的通解为

$$
V(x) = c_1e^{ikx} + c_2e^{-ikx}. \tag{1.50}
$$

在物理上,对无边界约束的均匀传输线可以传播任何频率的波. 对于每一频率都可以传播两个线性不相关的波:直波和返波;也可以传播这两个模式的任意线性组合.

(2) 两端都是第一类边界条件

$$
V(0) = V(a) = 0. \tag{1.51}
$$

为简化起见,这里把域定在[0,a]. 把式(1.50)中的两个特解代入式(1.51)的边界条件,得到特征行列式

$$
\Delta(k) = \begin{vmatrix} e^{-ik\cdot 0} & e^{ik\cdot 0} \\ e^{-ika} & e^{ika} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-ika} & e^{ika} \end{vmatrix}.
$$

这一特征行列式不恒等于零,所以可以得到它的本征方程

$$
\Delta(k) = 0
$$

或

$$
e^{ika} - e^{-ika} = 0,
$$

即

$$
\sin ka = 0,
$$

所以

$$
k = \frac{n\pi}{a}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{1.52}
$$

相应的本征函数为