

高等学校教学用书

力学强度理论

LIXUE QIANGDU LILUN

M. M. 費洛宁柯-鮑罗第契著

奚紹中譯

人民教育出版社

52.55
624

高等学校教学用书



力学强度理论

LIXUE QIANGDU LILUN

M. M. 费洛宁柯-鲍罗第契著

奚紹中譯

人民教育出版社

本书是根据苏联莫斯科大学 1961 年出版的 M. M. 費洛宁柯-鮑罗第契 (Филопенко-Бородич) 著“力学强度理論” (Механические теории прочности) 一书譯出的。

本书对四种古典强度理論作了較詳細的論述, 着重对莫尔理論及莫尔理論的推广作了新的論述和探討, 并闡述了极限条件在 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 空間的反映及极限条件的进一步研究, 介紹了卡曼和伯喀尔的实验及結論。

本书可作为高等学校力学专业的教材, 亦可作为有关专业学校的参考书。

力学强度理論

M. M. 費洛宁柯-鮑罗第契著

奚紹中譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

统一书号 K15010·1115 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 2 $\frac{11}{16}$

字数 57,000 印数 0,001—2,800 定价 (7) 0.34

1963 年 8 月第 1 版 1963 年 8 月北京第 1 次印刷

目 录

§ 1. 历史概述。强度理論的实质	1
§ 2. 古典强度理論	7
§ 3. 胡勃-密西斯-甘克能量理論	15
§ 4. 莫尔强度理論。反映空間应力状态的莫尔几何方法	20
§ 5. 莫尔理論的基本原理	27
§ 6. 极限条件在 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 空間的反映	33
§ 7. 应力状态的綜合不变量	43
§ 8. 按所述原理建立之若干新的强度理論	52
§ 9. 以极限条件(98)为基础, 作为莫尔理論之推广的强度理論。八 面体应力之向量、莫尔主圓之諸参量及参量 α 之間的关系	60
§ 10. 极限条件(111)的进一步研究。莫尔理論的推广	67
§ 11. 极限条件(111)的最簡單情况; 由此得出的若干結論	69
§ 12. 卡曼和伯喀尔的实验。由实验得出的結論	77
文献	82

§ 1. 历史概述。强度理論的实质

人类从开始建造建筑物和设备时起就已意識到，必須对拟建的建筑物或设备之各个部分預計其尺寸和相互关系。在現代，这种預計过程是以計劃、設計和各种計算的方式实现的；其中，整体的以及各个部分(零件)的强度計算占有重要地位。目前还保存有几千年前建造的古代建筑物的残余(亦有整个建筑物)；这些古建筑证明，那些时代的建筑者在善于預計建筑物本身及其强度方面具有高度技巧。我們不知道古代建筑者对此拥有什么方法；看来，这些方法是一定行会內世代相傳的秘訣。其中大部分想必是由經驗和实践得出的各种法則和标准，而这些法則和标准沒有得到特別論证，仅由师徒相傳。

可是，人类历史上存在过生产工具和生产方法急剧进展的年代，需要创建新型的或者尺寸非常大的建筑和設備(房屋、船舶、机器)；在此情况下，由經驗及傳統所得出之法則和标准已变为不适用了，而要求建筑者寻求新的途徑，借以对拟建的建筑物或机器之部件进行預計和与之有关的計算。我們不知道古代建筑者是如何解决这个问题的；他們是否具有任何力学知識，对建筑材料的性质研究到何种程度，是否有計算的方法，那怕与現代的計算方法相差甚远，凡此种問題都是悬案。更深入地研究現存的古代建筑物及其部件，看来可以指出：某些存在着类似的知識和計算方法。

茲列举若干关于古埃及工程史的資料作为例证，这些資料引自西多罗夫教授于二十年代讲课用的讲义。

在一座古埃及神庙的殘壁上留有一幅說明将一块 $3 \times 3 \times 30$ 立方米整体方尖石碑从阿拉伯运到埃及的組織工作詳細图画；石碑系由专用駁船运送，駁船示意图如附图(A)所示。此船沒有肋骨，亦即是一个无加勁肋的壳体。载荷放置于駁船中部。由于駁

船的剛度小,就应預計駁船的危險撓度(向上凹)和橫截面的變形。这無疑是被預見到的,因为駁船上方是用方木束組成的堅固折弦來加強的。現代用于運送木柴的駁船也采用類似的構造。目前已有方法可以足夠精確地估計船下的靜水壓力,計算駁船壳體和弦杆中的內力,亦即可以足夠精確地選擇截面。古代建築者是如何處理這些問題呢?我們無從得知;然而,由于這種駁船本身結構具有無可置疑的獨特性和船的尺寸龐大無比,顯然不可能是按照已有的型式來仿造的。因之,有可能在那時已存在某種有助于用來設計新型和新尺寸結構物的方法。上述駁船在海上曳引一組以較小的划行船只組成之船隊。圖(B)為同一時代的划行貨船之示意圖。

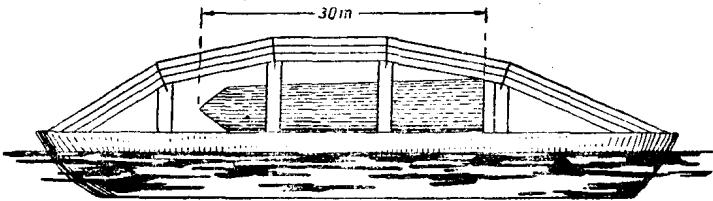


圖 (A)

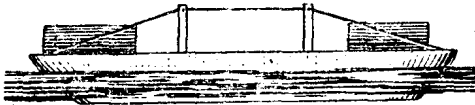


圖 (B)

與前述駁船的情況相反,這裡船的中部必須空着以留供划船者及指揮者之用,而貨物裝于船首及船尾。也就是說,應該預計到這船只的壳體有可能發生這樣的彎曲,其方向與圖(A)所示的相反,因此這種船只也會用弦杆加固。只是在圖(A)所示情況下弦杆受壓,因此做成方木的形式。在圖(B)所示情況下,弦杆受拉,而由支承于鉛垂短柱上的堅固纜繩(用婦女的頭髮編成?)組成。

以上兩個例子証實了古埃及工程技藝的高超水平,建築者的

設計(亦即預見)才能和一定的計算才能。

关于这方面,也还可以用西多罗夫教授在同一讲义中列举的其他事实加以說明。上世紀末,一位德国建筑师曾研究过大片区域内的古埃及神庙遗迹。他量测了选自不同处所的一系列下楣、梁和板,并試以現代的强度計算方法校核;从这个观点看来,所有这些构件的安全系数为3到4,亦即具有足够稳定的安全系数。同时,西多罗夫教授指出,現代工程师在处理像天然石料这类性质变化很大的材料时也未必采用上述不大的3到4的安全系数。

到文艺复兴时代,即十五世紀,才有关于企图研究材料强度和致力于理論力学工具問題的首批可靠資料;我們指的是著名科学家里奧納多·达·芬奇有关金屬絲、柱子及其他結構之强度試驗以及某些靜力学問題的記載。其次,应指出十六世紀时伽利略在梁的强度計算方面的卓越著作。这里我們不再一一說明这些著作,讀者可在铁木辛柯所著极其有趣的一书“材料力学史”^①[7]中查閱。結合我們的問題來說,在伽利略的著作中,最重要的是,他第一个試图获得作用于物体上的力与物体的强度之間的关系。誠然,在伽利略处理这問題时还没有为此目的所需的物理定律(例如彈性定律),而他用某些关于物体中內力分布的假設代替了它。因此,伽利略得到的关系在数量上是不精确的,但原則上是正确的。

彈性的物理定律是由勞勃脫·虎克在1660年建立的,即远迟于伽利略的工作(1638年)。但是,虎克定律也隔了很久才被应用到强度問題上去。这定律在庫倫于1773年发表的主要著作中方始得到最全面的利用,亦即在它出現之后經過了一百多年。在这里,作用于物体上的力和物体的强度之間的关系是用非常接近我們現在所用的形式表明的。但这时还没有关于应力这一极为重要的概念,因而阻碍了可使人們获得一般形式所需关系的理論繼續发展。关于

① 中譯本:“材料力学史”,上海科学技术出版社,1961。

应力及应变特征(相对伸长和相对剪切)的概念是柯西于十九世紀的头二十五年在創立彈性理論的过程中引入的。当时已經出現严整而完善的数学工具以研究彈性体在外力作用下發生的現象。

設計結構物或者机器的工程师很自然地力图利用这种工具以解决对他來說最为重要的强度問題。但是在这条途徑上遇到了巨大的原則性困难。在載荷作用下材料的破裂乃是一种极为复杂和非常多样的現象。它取决于材料的构造和物理状态,以及載荷的作用特征和状况,而物理状态又随載荷本身而变化。按此观点,材料的强度和破裂問題形成为物理学的一个專門領域,需要复杂而細致的实验并运用最完善的数学和力学工具。同时,物理学在其研究中不可能脫离現代关于物质构造的概念;它應該由此获得用以闡明破裂現象的資料,或者反过来,利用由破裂現象所得到的結論以充实关于物质构造的理論。談到这里,我們应当承认,彈性理論和塑性理論的工具只是抽象而間接地反映了我們对于物质构造的概念。在这些理論工具中不涉及近代物理賴以建立的分子、原子和粒子。这里有的是由于彈性理論的首創者們为利用丰富的数学分析工具所采用的統計方法从而取得公认之“連續变形介质”。彈性理論的悠久历史证明了这种假設的合理性,它成功地解决了无论对于物理学或者对于工程事业都很重要的一系列問題。可是,工程計算有着双重目的: a) 得出物体承受外力时內力的分布; b) 找出材料可能的强度破坏或者破裂情况,并指出避免材料破坏和破裂的方法。关于破裂的概念,正如零件裂成碎片的概念,是很慣見而易明白的。关于强度的概念,就这个術語的通常含义而言也是很普通的,它是指某种产品或物体制造“良好”,即能够在未来的某一时期內正常使用;这一时期的长短取决于制造产品的材料、产品的用途及工作条件;寿命或使用期限可以从几小时(工具)到几个世紀(紀念性結構)。使零件必須加以更換的强度破坏可以由

不同的原因而引起，也是与零件用途、材料性质和工作条件有关的，例如：

1 由于材料内应力过大导致的塑性残余变形使零件形状歪曲。

2 由于应力过大而在沒有任何显著残余变形时引起的所謂材料的“脆性”破裂。

3 应力并未超过允許值时零件的过大的彈性变形；这种情况在需要精确嚙合的零件中，以及按靜載荷作用設計的樓盖中是可能的；在动載荷作用下，其中的应力可能由于彈性振动而剧烈增大，并引起結構中的連接松动；此外，巨大的振动还可妨碍樓盖上机器和人的工作。就这个意义來說，樓盖应具有足够的剛度。

4 零件(如柱或板)由于陡然产生巨大变形而导致损坏的平衡稳定性的丧失。

5 交变載荷下在应力远低于靜載荷强度时引起零件破裂的所謂“材料疲劳”現象。

6 由于压力及摩擦在零件表面处引起的磨損使材料逐漸剝落(在車輪、鋼軌、齿嚙合等等中)。

7 由于零件工作所在介质的有害作用(腐蝕)所引起的上述現象。

8 为許多材料所固有并且屬於塑性变形(已在第 1 条中指出)的徐滑現象，在足够高的溫度下能繼續发展，破坏零件的正常工作并最终使之破裂。

設計零件时必须預見到凡此种种强度破坏的情况，并用相应的計算确定零件尺寸以保证其正常工作。所有这样的計算，就强度这一概念的最广泛和普遍的含义而言，應該都屬於强度計算的范畴。可是，伴随着强度破坏之物理現象的复杂性，使相应于以上列举之各种破坏情况的計算方法互有不同并且各有特点，因此强度

自身的概念在計算过程中就被逐漸区别和划分。首先,由于保证上述第1和第2条所述强度并归結为确定应力的計算本身不保证零件的稳定性,所以分出了稳定計算(第4条)。基于同样的原因,后来又分出了刚度計算(第3条)。因此,在工程实践以及材料力学課程中就区分为:按第1及第2两条所述意义的“强度”計算、稳定計算(第4条)和刚度計算(第3条)。这样,“强度”的一般概念就大大縮小而只具有比較片面而专门的内容。从邏輯观点来看,这种概念上的收縮未必能认为是正确的;事实上,那么任何零件都可以是强固的但同时又是不稳定的,亦即在一般意义上是不强固的。但是計算上的这种分类早已成为习惯而必須予以重視。对于所設計之零件的計算系从狹义的“强度”計算开始,而后利用按刚度、稳定、磨損、腐蝕、徐滑和疲劳的校核进行修正,如果根据零件的工作条件任何一种修正是必須的話。以后将要讲述的“力学强度理論”正是与如上所述比較狹义和专门的强度概念相联系而創立的。

在解决这项任务时,工程师根据其自身工作的特点,應該安排足够简单的理論工具和最少的实验資料,以便解答与上述强度破坏或破裂的复杂現象有关的問題。力学工程师拥有的工具就是应力張量和变形張量:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

由此可以得出应力状态和变形状态的不变特征:

$$\left. \begin{array}{l} \text{主应力 } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \\ \text{主应变 } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3; \\ \text{最大剪应力} \end{array} \right\} \quad (1')$$

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

在大量实际运用材料时,最少的实验数据系由試件受拉伸、压缩以及扭轉(比較少)等最简单的实验获得的。

对于工程师来说,必须善于根据如式(1)所示典型化了的计算数据和試件的最简单实验(实则所设计的零件将在复杂得多的条件下工作)来判断强度或者破裂的可能性,亦即判断复杂的物理现象。

在寻求这个问题的解答时,工程思维转向于唯一正确的途径;就是将式(1)中的某一计算指标与实验中所观察到的材料破裂现象相联系的这种研究途径。具体的研究在于:

- 1) 引用一个关于所选定的计算指标对于破裂过程有主要影响的假设;
- 2) 根据所用假设,建立计算的理論工具(强度理論);
- 3) 根据不同情况下的实验檢驗所建立的理論,并由此作出有关所用假设是否适用或部分适用(亦即有限制的适用)的結論。

因为这类理論以力学指标(1)作为根据,所以称作力学强度理論。建立此类理論的方法本身表明,它們不可能概括材料破裂现象之所有前述在物理方面的复杂性。这方面的研究属于运用其他方法的另一科学領域;相应的理論可称为物理强度和破裂理論。在本課程中,属于所研究之现象的物理学方面的问题,只在論证和檢驗某一强度理論之适用性所需的程度上探討。

§ 2. 古典强度理論

力学强度理論出現和批判的过程,可以明显地从最早的三个被称为古典理論的最简单理論加以考察。

伽利略根据自己的学說体系作出結論:杆件的弯曲破裂是以纵向纖維断裂的形式发生的。把这种现象与式(1)所示力学特征相对照便得如下的結論:破裂开始于最大正应力 $\sigma_{\max}$ 达到該材料

的某一特征值 σ_0 之时。在此基础上引入了一个假設——在任何其他应力状态下，一点处的破裂起始于最大主应力 $\sigma_{\max}$ 到达同一极限值 σ_0 时。若試件的简单拉伸和压缩实验表明，材料在此两种情况下的抗力 σ_0 及 $-\sigma_0$ 相同，則在任何复杂应力状态下一点处的材料不发生破裂之条件归結为三个不等式：

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_0, \\ -\sigma_0 < \sigma_2 < \sigma_0, \\ -\sigma_0 < \sigma_3 < \sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

这些条件构成了通常称为第一强度理論的古典强度理論。按这种途径建立的理論，后来受到了以其他应力状态形式之实验的檢驗。就简单实验而言，这种应力状态形式之一便是圆試件的扭转。从受扭圆試件中以纵截面和横截面取出的小单元体系受純剪切，在它的面上只作用有剪应力。

$$\tau_{\max} = \pm \frac{16M_K}{\pi d^3},$$

式中： M_K ——扭矩， $\frac{\pi d^3}{16}$ ——圆截面的抗扭截面模量。

如果規定将主应力按如下方式表示：

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad (3)$$

則如所周知，将有

$$\sigma_1 = \frac{16M_K}{\pi d^3}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\frac{16M_K}{\pi d^3}. \quad (4)$$

第一强度理論断定，材料的破裂开始于扭矩达到以下极限值时：

$$M_K = \frac{\pi d^3}{16} \sigma_0. \quad (5)$$

但是，以破裂前能出現較大塑性变形的金属制成之試件所作的大量实验表明，当扭矩較之按相当于第一强度理論的公式(5)算出之

值約小一半时就出現相当大的殘余变形。就是說，在此情况中第一理論过高地估計了材料的强度。

另一方面，目前也已有为数頗多的各向等值压縮实验

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$$

表明，所有材料在应力超过由簡單压縮实验測得之流动极限甚至强度极限許多倍时亦不呈現任何破裂征象。看来，在这方面的第一批实验是由魏布尔于本世紀初实现的，他以鉛球置于装满油的圓筒中使之承受很高的流体靜压。

由此可見，在三向等值压縮的情况下，第一理論又远远地低估了材料在比較大的載荷下进入塑性状态时的材料的强度（与扭轉的情况相反）。就是說，第一理論对于这种材料是不适宜的，因此将正应力 σ 起主要作用的假設作为强度准则未能得到验证。

同时，这样的結論不能全面地移用于无多大显著变形而呈脆性破裂的材料；这些材料簡單拉伸时的强度极限远低于簡單压縮时的强度极限。不論試件受簡單拉伸或者扭轉时，这种材料的破裂都发生在最大拉伸正应力作用面上。在受扭的情况下断口呈螺旋面；在毗邻試件表面处，該面与試件軸綫傾斜約 45° 。这个斜面大致与最大拉应力作用着的主平面重合。所有这些均可通过正方形截面白堊条（在板上写字用的）的扭轉这一簡單实验来闡明（图 1）。

第一强度理論的上述一些缺点促使研究人員注意到特征(1)中的其它特征，并研究它們对于材料强度和破裂的影响。

馬里奧特于十七世紀为另一个也是古典的强度理論奠定了基础。生文南則于十

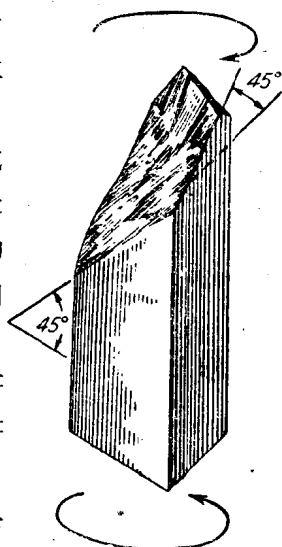


图 1

九世紀中叶将这一理論最后定型。在此理論中，以相对伸长 $\varepsilon_{\max}$ 作为判別强度的准則；这理論称为第二古典强度理論。如果由簡單拉伸和压縮实验得到了相对伸长的极限值 ε_0 和 $-\varepsilon_0$ ，則强度条件^①写作：

$$\left. \begin{aligned} -\varepsilon_0 &\leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0, \\ -\varepsilon_0 &\leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0, \\ -\varepsilon_0 &\leq \varepsilon_3 \leq \varepsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这种形式对于通常以应力表示結果的实际計算是不方便的。强度条件 (6) 对于在非常小的变形下破裂并且几乎到破裂时仍然为彈性的脆性材料可以由应力来表达。这时，利用虎克定律，便有

在应力状态的一般情况下：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)], \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在簡單拉伸与压縮的情况下：

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}; \quad -\varepsilon_0 = -\frac{\sigma_0}{E}.$$

强度条件 (6) 于是写作

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_0 &\leq \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

在实际工程計算中最常遇到的是平面应力状态；假如在此情

^① 这里所指的强度条件未考虑安全儲备(以下同)，又在此意义上式中不应有等号。——譯注

況下我們設 $\sigma_2 = 0$, 則条件(8)成为

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_0 &\leq \sigma_1 - \nu\sigma_3 \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_3 - \nu\sigma_1 \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq -\nu(\sigma_1 + \sigma_3) \leq \sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

如果从計算得出的是两个相互垂直的非主平面上之应力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} , 則利用平面問題中的主应力公式

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \end{aligned}$$

我們把上述条件写作

$$\begin{aligned} -\sigma_0 &\leq (1-\nu)\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm (1+\nu)\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leq \sigma_0, \\ -\frac{\sigma_0}{\nu} &\leq \sigma_x + \sigma_y \leq \frac{\sigma_0}{\nu}. \end{aligned}$$

这些强度条件中的前面两个称为生文南公式; 在十九世紀以及在二十世紀的头十年內于工程計算特别是机械制造計算中此公式应用得非常普遍。

但是, 那知第二理論未为实验所验证。魏布尔为了檢驗各种强度理論曾經做过一些重要的实验; 上面曾經指出了他以鉛球在三向等值高压下所作的实验。在現代, 有着超高压实验的結果, 在此类实验中球的尺寸显著地縮小, 亦即球內各处产生巨大的縮短变形, 但并未引起任何破裂征象, 这違反了第二理論。魏布尔在其他一系列实验中, 使石料和水泥制的立方体承受单向压缩以及两个相互垂直方向的压缩。按强度条件(9)来看, 二向压缩时試件的强度應該比簡單压缩时为大。但是系統的实验却表明, 两种情况下强度是相同的; 就是說, 第二理論在这里也沒有得到证实。这一理論按其本身的观念看来, 是与固体的分子构造这个概

念相联系的，——固体之保持其形状并具有强度，系因表现为引力和斥力的分子相互作用。当分子相互分离至某一极限时，它們之間的引力急剧减弱而物体发生破裂。力学特征(1')中的相对伸长 s 总是大致符合于分子的相互分离的，而前者不是作为第二理論的强度准則的；因此就实质而論，第二理論正如同第一理論一样，預計的是分裂破坏，亦即脆性破裂。

上述两个强度理論运用了特征(1')中的前二行。第三古典强度理論則以最大剪应力作为强度的准則，亦即引入式(1')的第三行特征有主要影响的假設。此理論的奠基人公认是十八世紀最卓越的物理学家及工程师庫倫。铁木辛柯[7]說：“十八世紀时的科学家們对于彈性体力学的成就，沒有人能比得上庫倫”。根据这一假設，强度条件被写作：

$$-\tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_0,$$

$$-\tau_0 \leq \tau_2 \leq \tau_0,$$

$$-\tau_0 \leq \tau_3 \leq \tau_0.$$

此处， τ_0 及 $-\tau_0$ 系拉伸和压縮实验时最大剪应力的极值。考虑到

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}, \quad -\tau_0 = -\frac{\sigma_0}{2},$$

我們得到强度条件的最終形式：

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_0 &\leq \sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_2 - \sigma_3 \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_3 - \sigma_1 \leq \sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

在平面应力状态下($\sigma_3=0$)，有

$$\left. \begin{aligned} -\sigma_0 &\leq \sigma_1 \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq -\sigma_3 \leq \sigma_0, \\ -\sigma_0 &\leq \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

我們可以立刻看出,上式中前两个条件与式(2)所示第一理論的相应条件吻合;假如主应力 σ_1 及 σ_3 同号,则此时式(10)^①中的第三个条件得到滿足而因之可弃去。反之,若 σ_1 及 σ_3 异号,則只須保留第三个条件,而前二个条件亦將滿足。在

$$\sigma_1 = -\sigma_3 \quad (12)$$

那种更为特殊的情况下(例如发生在扭轉时)按照第三理論的强度条件为

$$-\frac{\sigma_0}{2} \leq \sigma_1 \leq \frac{\sigma_0}{2} \quad (13)$$

無論物体产生彈性变形或塑性变形,剪应力都与剪切有着密切联系;因此可以說,第三理論是基于这样的假設,即破裂系因材料的一部分相对于另一部分产生剪切和滑移所致。

为了評述第三理論,下面仍轉回到上面曾經提及的那些实验資料中去。

在圓球受液体靜压的各向等值压縮实验中,球內不存在剪应力;强度条件(10)于是恒能滿足,而因此按照第三理論破裂乃是不可能的;实验证实了这一点。

在圓試件扭轉实验中,产生平面应力状态,如式(4)所示,强度条件(13)相应地为

$$|\sigma_1| = \frac{16M_k}{\pi d^3} \leq \frac{\sigma_0}{2}$$

由此得扭矩的极限值为

$$M_k = \frac{\pi d^3}{32} \sigma_0$$

它比根据第一理論求得的式(5)所示之值小一半,而按照实验也得这样的結果。

^① 应指式(11)。——譯注