现代数学基础丛书

微分动力系统原理

● 张筑生 著

科学出版社

现代数学基础丛书

微分动力系统原理

张筑生 著

科学出版社

1997

内 容 简 介

本书阐述微分动力系统的基本理论，侧重于结构稳定性问题. 本书所介绍的材料达到一定深度，叙述详尽细致，深入浅出.

本书可供大学数学系高年级学生、研究生、教师和有关的科学工作者参考.

现代数学基础丛书

微分动力系统原理

张筑生 著

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

新世纪印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987 年 2 月第一版 开本：850×1168 1/32

1997 年 8 月第二次印刷 印张：11 1/8

印数：8 551－11 570 字数：286,000

ISBN 7-03-006046-6/O·940

定价：23.00 元

序　　言

上世纪末到本世纪初，Poincaré 等人从经典力学和微分方程定性理论的研究中，提出动力系统的概念. 微分动力系统的现代研究，则始于本世纪 60 年代初 Peixoto 等人的工作. 在 Smale 和其他许多学者的倡导和推动下，这一学科的基本理论的研究取得了重大的进展. 自 70 年代以来，微分动力系统的研究，更广泛地向各个应用领域发展. 在经济数学、气象预报、数值计算、统计力学等领域里，微分动力系统理论的应用已经崭露头角. 在系统控制、天体力学、流体力学、振动理论、化学反应、生理过程、生态和人口问题等许多方面的研究中，微分动力系统也展示了广泛应用的前景. 这一学科之所以受到普遍重视，不仅因其丰富而深入的理论，而且特别是由于它的广泛而有成效的应用.

微分动力系统理论的基本教材，国外已有几种，例如 [1]，[2] 和 [3]. 从选材的角度来看，[1] 无疑是一本很好的书. 该书能抓住要点介绍微分动力系统理论的一些重要问题，安排紧凑，不枝不蔓. 遗憾的是，该书作者对细节太不注意，证明中错漏甚多，又随意使用较深的数学工具而不做必要的准备. 这一切给读者造成很大的困难，甚至使得一些初学者望而生畏. [2] 和 [3] 比 [1] 出版得晚，书中列举了不少浅易的例子，在可读性方面下了较多的工夫. 但这两本书在内容的深入程度上不如 [1]，对局部的或低维的情形介绍较多，对一般情形讨论较少. 另外，在结构方面，这两本书也由于穿插例子太多而显得有些松散.

作为“现代数学基础丛书”之一，作者希望本书能成为研究生和高年级大学生的一份既可读，又有一定深度的教材. 在编写过程中曾经参考 [1]—[3] 以及其他一些文献. 作者曾参加由廖山涛先生和丁同仁先生主持的几次微分动力系统讨论班，从中获益

甚多，在此谨向讨论班主持人及其他参加者表示衷心的感谢.

作者曾用本书初稿在北京大学和其他地方对研究生和高年级大学生试讲过几次，消除了原稿中一些叙述不妥之处. 但本书不足之处一定还很多. 作者诚恳地欢迎同志们提出批评和建议.

作者

一九八五年八月

于北京大学

符　号　表

$a\in A$	a 是集合 A 的元素
$A\subset B$	集合 A 是集合 B 的子集
$A\cup B$	集合 A 与集合 B 的并集
$A\cap B$	集合 A 与集合 B 的交集
$A\backslash B$	集合 A 与集合 B 的差集
$A\times B$	集合 A 与集合 B 的直积
$A/\sim$	集合 A 对等价关系 $\sim$ 的商集
$\emptyset$	空集
$\# S$	集合 S 的基数
$\mathrm{int}S$	集合 S（在给定拓扑空间中）的内点集
$\bar{S}$	集合 S（在给定拓扑空间中）的闭包
$\mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Z}_+$	非负整数集
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{R}$	实数集
$\mathbf{C}$	复数集
S^1	单位圆周
T^2	二维环面
$f:X\to Y$	f 是从 X 到 Y 的映射
$x\longmapsto f(x)$	x 点映到 $f(x)$ 点
id 或 I	恒同映射
$g\circ f$	映射 g 与映射 f 的复合
$f^0=id$	f 的 0 次迭代
$f^n=f\circ f^{n-1}$	f 的 n 次迭代

$f|S$　映射 f 在集合 S 上的限制

$C^0(M,N)$　M 到 N 的连续映射的集合

$\mathrm{Homeo}(M)$　M 的自同胚映射的集合

$C^r(M,N)$　M 到 N 的 C^r 映射的集合

$\mathrm{Diff}^r(M)$　M 到 M 的 C^r 微分同胚的集合

$\mathrm{Orb}_f(x)$　f 过 x 点的轨道

$\mathrm{Orb}_f^+(x)$　f 从 x 点出发的正半轨

$\mathrm{Orb}_f^-(x)$　f 从 x 点出发的负半轨

$\mathrm{Fix}(f)$　f 的不动点集

$\mathrm{Per}(f)$　f 的周期点集

$\mathrm{EPer}(f)$　f 的终于周期点集

$\mathrm{PP}(f)$　f 的周期点的周期的集合

$\omega_f(x)$　$\mathrm{Orb}_f(x)$ 的 ω 极限点集

$\alpha_f(x)$　$\mathrm{Orb}_f(x)$ 的 α 极限点集

$L_f(x)=\omega_f(x)\cup\alpha_f(x)$　$\mathrm{Orb}_f(x)$ 的极限点集

$L(f)$　f 的极限集

$\Omega(f)$　f 的非游荡点集

$R(f)$　f 的链回归点集

$W_V^s(x,f)$, $W_\varepsilon^s(x,f)$

　或 $W_{loc}^s(x,f)$　f 对 x 点的局部稳定集

$W_V^u(x,f)$, $W_\varepsilon^s(x,f)$

　或 $W_{loc}^u(x,f)$　f 对 x 点的局部不稳定集

$W^s(x,f)$　f 对 x 点的稳定集

$W^u(x,f)$　f 对 x 点的不稳定集

$W^s(\Lambda,f)$　f 对不变集 Λ 的稳定集

$W^u(\Lambda,f)$　f 对不变集 Λ 的不稳定集

$\forall$　对一切

$\exists$　存在

$\exists!$　存在唯一的

$\cdot\ni\cdot$　使得

$\Longrightarrow$　蕴含

$\Longleftrightarrow$　必须而且只须

$\square$　表示证明完成；

或者表示证明简单不再写出

目　　录

第一章　动力系统概说

§1　动力系统概念的发展

动力系统的概念，起源于常微分方程定性理论的研究．考虑定义于 $\mathbf{R}^m$ 上的微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=\Phi(x) \tag{1.1}$$

和初始条件

$$x(0)=x_0, \tag{1.2}$$

这里 $\Phi\in C^r(\mathbf{R}^m,\ \mathbf{R}^m)$，$x_0\in\mathbf{R}^m$．我们知道方程组(1.1)满足初始条件(1.2)的解 $\varphi(t,x_0)$ 总是局部存在的．如果 Φ 满足一定的条件[1)]，那么解 $\varphi(t,x_0)$ 可以对一切 $t\in\mathbf{R}$ 和 $x_0\in\mathbf{R}^m$ 有定义．把 x_0 写作 x，解 $\varphi(t,x)$ 应满足以下关系：

(i) $\varphi(0,x)=x$，$\forall x\in\mathbf{R}^m$；

(ii) $\varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x))$，

$$\forall s,t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}^m.$$

满足上列条件(i)和(ii)的映射 φ：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ 称为 $\mathbf{R}^m$ 中的动力系统或者流．对于给定的 $x\in\mathbf{R}^m$，我们把点集

$$\mathrm{Orb}_\varphi(x)=\{\varphi(t,x)\mid t\in\mathbf{R}\}\subset\mathbf{R}^m$$

称为流 φ 经过点 x 的轨道．从上世纪末开始，Poincaré 等人就对

---

1) 例如满足这样的条件

$$|\Phi(x)|\leqslant\Psi(|x|)\quad\left(|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2}\right),$$

这里 Ψ：$[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 连续，当 $r>0$ 时 $\Psi(r)>0$ 并且对某 $\alpha>0$ 有

$$\int_\alpha^{+\infty}\frac{dr}{\Psi(r)}=+\infty.$$

（参看[4]，第I章，定理2.5.）

这样的系统的轨道结构展开了研究.

受到上述研究的启发，人们考虑更一般的连续映射 $\varphi: \mathbf{R}\times X\to X$，这里 X 是一个拓扑空间. 如果 φ 满足条件:

(i) $\varphi(0,x)=x$, $\forall x\in X$;

(ii) $\varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x))$,

$$\forall s,t\in\mathbf{R},\ x\in X,$$

则称 φ 为 X 上的一个拓扑动力系统. 本世纪初期，Birkhoff 等人开展了拓扑动力系统一般理论的研究.

虽然拓扑动力系统研究的对象很普遍，但由于没有在相空间引入微分结构，缺少强有力的分析工具，难以进一步深入. 到了本世纪六十年代，从 Peixoto 的工作[5]开始，人们展开了对微分流形上的微分动力系统的研究，获得了一系列深刻的结果. Smale, Sinai, Anosov, Moser 和我国的廖山涛教授等，对微分动力系统的研究作出了卓越的贡献(参看[6]，[7]等).

§2 流与离散的动力系统

设 X 是拓扑空间 (C^r 微分流形)，$\varphi: \mathbf{R}\times X\to X$ 是连续映射 (C^r 映射)，如果 φ 满足:

(i) $\varphi(0,x)=x$, $\forall x\in X$;

(ii) $\varphi(s+t,x)=\varphi(s,\varphi(t,x))$,

$$\forall s,t\in\mathbf{R},\ x\in X,$$

则称 φ 为 X 上的 C^0 **流** (C^r **流**)或 C^0 **动力系统** (C^r **动力系统**).

微分流形课程告诉我们: 紧致 $C^r(r\geqslant 1)$ 微分流形上的任何 C^r 向量场生成 M 上的一个 C^r 流(参看[8]，第 5 章，定理 5.36).

设 X 是拓扑空间 (C^r 流形)，φ 是 X 上的 C^0 流 (C^r 流)，对于任意取定的 $t\in\mathbf{R}$，由 $\varphi^t(x)=\varphi(t,x)$ 定义了一个连续映射 (C^r 映射) $\varphi^t: X\to X$. 这映射满足:

(i) $\varphi^0=id$;

(ii) $\varphi^{s+t}=\varphi^s\circ\varphi^t$, $\forall s,t\in\mathbf{R}$.

由此我们看到，对任意取定的 t，φ^t 具有逆映射 φ^{-t}，因而 φ^t 是一个同胚（C^r 微分同胚），或者说是一个拓扑变换（C^r 变换）。因此，流是一个单参数变换群，参数取值的范围是实数加群（R，+）。

如果对流 φ 进行离散采样，即考察它每隔一定的时间 τ 的状况，我们得到一个双边序列：

$$\cdots,\varphi^{-2\tau},\varphi^{-\tau},\varphi^0=id,\varphi^\tau,\varphi^{2\tau},\cdots$$

这序列由同胚 $f=\varphi^\tau$ 所生成：

$$\varphi^{k\tau}=\varphi^\tau\circ\varphi^\tau\circ\cdots\circ\varphi^\tau=f\circ f\circ\cdots\circ f=f^k,$$

$$\varphi^{-k\tau}=\varphi^{-\tau}\circ\varphi^{-\tau}\circ\cdots\circ\varphi^{-\tau}=f^{-1}\circ f^{-1}\circ\cdots\circ f^{-1}=f^{-k}.$$

我们称 φ^τ 为流 φ 的时刻 τ 映射。特别地，称 φ^1 为流 φ 的时刻 1 映射。

一般地，任意一个同胚（C^r 微分同胚）f，虽然不一定是某个流的时刻 τ 映射，也能生成一个双边序列

$$\cdots,f^{-2},f^{-1},f^0,f^1,f^2,\cdots,$$

这里

$$f^0=id,f^k=f\circ f^{k-1},f^{-k}=(f^{-1})^k.$$

显然上面的双边序列满足：

(i) $f^0=id$；

(ii) $f^{k+l}=f^k\circ f^l$，$\forall k,l\in Z$。

与流的情形相类比，人们称这种由同胚（C^r 微分同胚）生成的双边序列为**离散的动力系统**。离散的动力系统也是一个单参数变换群，其参数取值范围是整数加群（Z，+）。

我们来讨论流与离散的动力系统之间的关系。上面已经谈到，流经过离散采样产生一个离散的动力系统。流的时刻 τ 映射总是一个同胚。反过来，任意一个同胚却不一定能够嵌入流作为时刻 τ 映射。但是，采取另一种被称为“扭扩”（suspension）的方式，可以把任意的同胚与适当的流联系起来。

设 M 是一个 C^r 流形（其维数 $\dim M=m$），而 f：$M\to M$ 是一个 C^r 微分同胚。在 $R\times M$ 上我们定义一个十分简单的流：

$$\psi^t(r,x)=(t+r,x).$$

考虑 $\mathbf{R}\times M$ 上的等价关系"$\sim$":

$$(r,x)\sim(s,y)\Longleftrightarrow r-s\in\mathbf{Z},\ y=f^{r-s}(x).$$

按这等价关系可以做 $\mathbf{R}\times M$ 的商空间

$$\widetilde{M}=\mathbf{R}\times M/\sim.$$

由流形论中的讨论可知，$\widetilde{M}$ 具有 C^r 流形结构，它是一个 $m+1$ 维的 C^r 流形（参看[9]，第 III 章，定理 8.3）. 容易验证以下事实：如果 $(r,x)\sim(s,y)$，那么

$$\psi^t(r,x)=(t+r,x)\sim(t+s,y)=\psi^t(s,y).$$

因而 ψ^t 诱导出 $\widetilde{M}$ 上的一个 C^r 流 $\tilde{\varphi}^t$. 若把 M 与 $\widetilde{M}_0=\{0\}\times M/\sim$ 等同起来，则 f 可以视为 $\widetilde{M}_0$ 上的 C^r 微分同胚. 可以看出：流 $\tilde{\varphi}^t$ 从 $\widetilde{M}_0$ 上任意一点 x 出发的轨道都还要返回 $\widetilde{M}_0$，而第一次返回 $\widetilde{M}_0$ 的点恰为 $f(x)$. 我们说 $\widetilde{M}_0$ 是流 $\tilde{\varphi}^t$ 的一个截面，而 f 恰好为流 $\tilde{\varphi}^t$ 关于截面 $\widetilde{M}_0$ 的第一返回映射（Poincaré 映射）.

上面的讨论说明，流与离散动力系统是密切相关的. 人们对流的研究成果，往往能应用于微分同胚的情形. 反之，一般说来，研究微分同胚所获得的信息，也能启发我们对流作相应的讨论. 由于 Smale 等人的大力提倡，自六十年代以来，对离散动力系统的研究迅速发展起来. 鉴于对微分同胚的动力性态的研究往往显得简洁、富于几何直观并且易于着手，本书主要着重于离散情形的讨论.

§3 轨道与不变集

设 X 是一个拓扑空间（C^r 流形），$f:X\to X$ 是一个同胚（C^r 微分同胚）. 我们把集合

$$\mathrm{Orb}_f(x)=\{f^k(x)\mid k\in\mathbf{Z}\},$$
$$\mathrm{Orb}_f^+(x)=\{f^k(x)\mid k\in\mathbf{Z}_+\}$$

和

$$\mathrm{Orb}_f^-(x)=\{f^{-k}(x)\mid k\in\mathbf{Z}_+\}$$