线性系统理论、例题和习题

〔日〕 有本卓 高桥进一 滨田望 著

科学出版社

线性系统理论、例题和习题

〔日〕有本卓　高桥进一　滨田望 著

卢伯英 译

科学出版社

1982

内 容 简 介

本书是一本关于线性系统理论的例题和习题汇编。它针对线性系统理论中的重要课题，选编了数百道例题和习题。在每一课题中，首先扼要介绍基本理论，然后提供一些示范性例题，最后给出若干习题供读者练习。所有习题都给出了答案，困难的习题还给出了主要解题步骤或提示。

本书适用于线性系统理论研究和学习的大学师生，对于自学线性系统理论的人员也特别适宜。

有本卓　高橋進一　浜田望

線形システム理論例題演習

コロナ社，1979

线性系统理论、例题和习题

〔日〕有本卓　高桥进一　浜田望 著

卢伯英 译

责任编辑　李淑兰

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

1982年9月第一版　开本：787×1092 1/32

1982年9月第一次印刷　印张：9 7/8

印数：0001—15,500　字数：225,000

统一书号：15031·423

本社书号：2691·15—8

定价：1.55元

序　　言

线性系统理论是一门基础工程学科．它是以作为研究对象的系统的线性性质这一特征为线索，用线性动态系统的数学模型表示系统的全部特征，并且通过分析其数学模型的构造，达到对系统的行为进行预测、检验或控制及调节的目的．线性系统理论包含电路理论和控制理论，它不仅使这些理论日益现代化，而且还对用高维的线性动态系统来描述自然环境系统、大规模工业过程、生物系统模型、经济模型等进行尝试，在许多领域里，正在查明线性系统理论思考方法的有效性．

目前，“线性系统理论”已经成为工程中的一门最基础的公共理论．本书将能使读者更深入地理解这种理论的思考方法，并且把它归纳整理成一本习题集，以便使读者掌握那些有用的本领．

本书的读者对象，虽然设想为与大学的电气相关的学科（电气、电子、控制、信息、通信、计测、系统等学科）的学生，但是对于学习与控制和系统工程有关学科（机械、化学工程、管理工程等学科）的学生和技术人员来说，作为一本使之具有实际工作能力的习题集也是适宜的．

本书中所采用的方法论，是以有限维向量与矩阵的初等运算为基础的．这种初等线性代数的方法，在今日的计算机时代，已经成为工程师的必修数学．如果能精读本书，并且努力亲自求解书中习题，自然就会熟悉这门数学．掌握了采用向量和矩阵的系统描述方法，而体现出更高技术水平的现代技术人员，将能够具备解决实际问题的能力．

此外，附带说明一下，本书的整个内容是根据下列著作的主要内容归纳整理的。

有本卓：「線形システム理論」， 產業図書(1974)

高橋進一、有本卓：「回路網とシステム理論」，コロナ社(1974)

作者学疏才浅，虽然经过反复研讨，恐怕还会存在构思和计算上的错误，请读者批评指正，以期将来使本书趋于完善。

最后应当指出，本书的出版是与コロナ社各位的热心帮助分不开的，在这里谨表谢意。

著 者

1977年10月

目 录

第一章 向量、矩阵、行列式…………………………………… 1
1.1 向量和向量空间 …………………………………… 1
1.2 线性映象和矩阵 …………………………………… 6
1.3 行列式与联立线性方程组 ………………………… 10
例题（14） 习题（24） 习题解答（27）
第二章 特征值问题，矩阵函数和二次型……………… 30
2.1 矩阵的特征值，特征向量 ………………………… 30
2.2 凯莱-哈密顿定理和矩阵函数 ……………………… 34
2.3 二次型 ……………………………………………… 36
例题（40） 习题（54） 习题解答（56）
第三章 状态方程的求法………………………………… 58
3.1 系统的表示方法 …………………………………… 58
3.2 系统函数的状态微分方程 ………………………… 59
例题（72） 习题（91） 习题解答（94）
第四章 状态微分方程的解……………………………… 100
4.1 状态微分方程的时域解 …………………………… 100
4.2 状态微分方程的 s 域解 ………………………… 103
4.3 转移矩阵的计算法 ………………………………… 104
例题（106） 习题（125） 习题解答（128）
第五章 传递函数………………………………………… 133
5.1 状态方程式的传递函数表示 ……………………… 133
5.2 可控性 ……………………………………………… 134
5.3 可观测性 …………………………………………… 136
5.4 伴随系统 …………………………………………… 138
例题（138） 习题（155） 习题解答（159）
第六章 系统的标准构造和最小实现…………………… 165

6.1 系统的标准构造 …………………………………………… 165
6.2 传递函数矩阵的最小实现 ………………………………… 168
例题（175） 习题（186） 习题解答（188）
第七章 系统的稳定性……………………………………… 192
7.1 稳定性的定义 …………………………………………… 192
7.2 线性系统的稳定性和稳定判据 ………………………… 193
7.3 李雅普诺夫稳定判据 …………………………………… 198
7.4 非线性系统的稳定性 …………………………………… 200
7.5 离散时间系统的稳定性 ………………………………… 202
例题（206） 习题（220） 习题解答（222）
第八章 有理正实函数系统理论的充分必要条件……… 226
8.1 正实函数与频谱因子分解 ……………………………… 226
8.2 有理正实函数系统理论的充分必要条件 ……………… 228
8.3 有理正实矩阵系统理论的充分必要条件 ……………… 230
例题（231） 习题（238） 习题解答（239）
第九章 系统的最佳性……………………………………… 242
9.1 线性调节器问题 ………………………………………… 242
9.2 欧拉方程式与频谱分解 ………………………………… 246
9.3 系统的最佳性和无源性 ………………………………… 248
例题（251） 习题（263） 习题解答（265）
第十章 卡尔曼滤波器……………………………………… 267
10.1 统计估计理论…………………………………………… 267
10.2 离散时间卡尔曼滤波器………………………………… 271
10.3 连续时间卡尔曼滤波器………………………………… 274
10.4 频谱因子分解…………………………………………… 278
例题（282） 习题（295） 习题解答（296）
第十一章 观测器…………………………………………… 298
11.1 状态估计方法…………………………………………… 298
11.2 最小维数观测器………………………………………… 302
例题（305） 习题（307） 习题解答（308）

第一章　向量、矩阵、行列式

1.1　向量和向量空间

1.1.1　向量

图 1.1 是三维空间向量的几何表示. 为了用代数方法表示这个向量,取互相正交的 e^1 轴, e^2 轴, e^3 轴,如图 1.1 所示. 根据这个坐标系决定的三个数 x_1, x_2, x_3, 可以表示为

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]$$

或

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

这两种表示方法,称为向量 $\mathbf{x}$ 的坐标表示,前一种叫做行向量 (row vector), 后一种叫做列向量 (column vector). 在本书中,以列向量作为坐标表示.

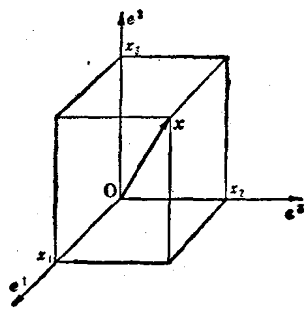

图 1.1　三维向量

三维空间的向量概念,一般可以推广到 n 维空间,由 n 个

实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成的向量

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\tag{1.1}$$

称为 n 维向量.

1.1.2　向量的运算

对于一个向量 $\mathbf{x}$ 与数量 λ，规定 $\mathbf{x}$ 的 λ 倍为（图 1.2）

$$\lambda\mathbf{x}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\\\vdots\\\lambda x_n\end{bmatrix}\tag{1.2}$$

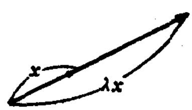

图 1.2　向量的数量倍

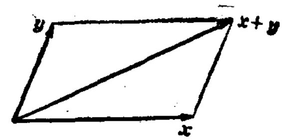

图 1.3　向量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 之和

维数相同的两个向量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的和，规定为(图 1.3)

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{bmatrix}\tag{1.3}$$

针对在这里被定义的数乘与求和的运算，下列 $A_1)-A_8)$ 的关系成立.

$A_1)$ 对于两个向量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$，由(1.3)式给出的和 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$，

是唯一确定的.

A_2) 满足交换律: $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ (1.4)

A_3) 满足结合律: $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (1.5)

A_4) 所有分量均为零的向量,称为零向量,如果用 $\mathbf{0}$ 表示零向量,则

$$\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x} \tag{1.6}$$

A_5) 使 $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$ 的向量 $-\mathbf{x}$, 是唯一确定的. 称向量 $-\mathbf{x}$ 为向量 $\mathbf{x}$ 的逆向量，它是由数量 -1 与向量 $\mathbf{x}$ 的积给出的.

A_6) 满足分配律: $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$ (1.7)

A_7) $\lambda(\mu\mathbf{x})=(\lambda\mu)\mathbf{x}$ (1.8)

A_8) $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (1.9)

一般对于 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \cdots$ 等的集合 V, 是由它们的和定义的,满足 A_1) ~ A_5) 的集合 V, 称为构成了加法群. 另外,当 $\mathbf{x}$ 是集合 V 的元素时，可以表示为 $V\ni\mathbf{x}$ (或 $\mathbf{x}\in V$).

1.1.3 向量空间

定义 (向量空间) 向量空间 V 包含了称之为向量的 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ 等的集合 V, 及数量的集合 K, 并且定义了 V 的元素之间的和,以及 V 与 K 之间的数量乘积,根据这些定义，它满足下列 B_1) ~ B_5) 的关系.

B_1) V 构成加法群.

B_2) 当给定 $V\ni\mathbf{x}$ 和 $K\ni\lambda$ 时，$\mathbf{x}$ 的数量乘积 $\lambda\mathbf{x}\in V$ 便唯一确定.

B_3) 对于 $V\ni\mathbf{x}, \mathbf{y}$, 和 $K\ni\lambda$, $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$.

B_4) 对于 $V\ni\mathbf{x}$, $K\ni\lambda$, μ, $(\lambda\mu)\mathbf{x}=\lambda(\mu\mathbf{x})$.

B_5) $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (这里 1 是 K 的单元).

这里所谓的数量集合 K，是指实数的全体的集合 R 和复

数的全体的集合 C 那样一些普通四则运算能够定义的数的整体，通常人们称这种集合在代数上构成为体．所以，为了表明上面定义的向量空间是在怎样的数量集合上定义的，通常称前面所定义的向量空间为体 K 上的向量空间．

(1.1) 式表示的 n 维向量 $\mathbf{x}$ 的集合，是实数体 R 上的向量空间，称之为 n 维实向量空间，以 R^n 表示之．另外，由 n 个复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 所构成的向量，表示为

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

它的集合是复数体 C 上的向量空间，称之为 n 维复向量空间，以 C^n 表示．显然，在 C^n 中包含了 R^n．

1.1.4 线性无关，维数，基底

定义(线性无关) V 的非零向量 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \cdots, \mathbf{x}^k$ 满足下列条件时，称为线性无关(或简称为无关)．这个条件是，如果

$$\lambda_i \in K, \ \lambda_1\mathbf{x}^1 + \lambda_2\mathbf{x}^2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{x}^k = 0 \tag{1.11}$$

必有

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

定义(线性相关) 如果 $V \ni \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \cdots, \mathbf{x}^k$，且 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \cdots, \mathbf{x}^k$ 不是线性无关的，则称 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \cdots, \mathbf{x}^k$ 为线性相关．

定义(维数) 对于向量空间 V，如果能够取得任意多个线性无关的向量时，则称 V 是无限维向量空间．V 的维数不是无限多时，它的线性无关的向量个数是有限的，其最大线性无关向量的数目，称为维数．这时称 V 为有限维向量空间．

当 V 的维数为 n 时，V 中的任意向量 $\mathbf{x}$，是 n 个线性无关

的向量 $\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2,\cdots,\mathbf{x}^n$ 的线性组合,即可以表示为

$$\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{x}^1+\lambda_2\mathbf{x}^2+\cdots+\lambda_n\mathbf{x}^n \tag{1.12}$$

这时我们称 V 是由向量 $\{\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2,\cdots,\mathbf{x}^n\}$ 构成的,并且称 $\{\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2,\cdots,\mathbf{x}^n\}$ 为 V 的构成元.

定义(基底) V 的线性无关的构成元 $\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2,\cdots,\mathbf{x}^n$, 称为 V 的基底. 对于 n 维实向量空间 R^n, 可以取下列 n 个向量作为它的基底:

$$\mathbf{e}^1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}^2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\cdots,$$

$$\mathbf{e}^n=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix} \tag{1.13}$$

并且称为 R^n 的自然基底.

1.1.5 向量的内积

对于 n 维复向量空间 C^n 中的两个向量*) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, 其内积的量值规定为

$$\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i y_i\ (\bar{x}_i \text{ 是 } x_i \text{ 的共轭复数}) \tag{1.14}$$

内积满足以下三个性质:

1) $\overline{\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}=\langle\mathbf{y},\mathbf{x}\rangle$ (1.15)

2) $\langle\alpha_1\mathbf{x}^1+\alpha_2\mathbf{x}^2,\mathbf{y}\rangle=\bar{\alpha}_1\langle\mathbf{x}^1,\mathbf{y}\rangle+\bar{\alpha}_2\langle\mathbf{x}^2,\mathbf{y}\rangle$ (1.16)

3) 当 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 时, $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\neq 0$ (1.17)

---

*) 原文误为"三个向量". ——译者注

另外，当 $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=0$ 时，称 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 正交.

1.2 线性映象和矩阵

1.2.1 线性映象

考虑体 K 上的两个有限维向量空间 V_1 和 V_2，如果对应于 V_1 的元 $\mathbf{x}$，能够确定一个相应的 V_2 的元 $\mathbf{y}$，则说给出了从 V_1 到 V_2 的映象. 这可以表示为 $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$，或表示为 $f:V_1\to V_2$. 定义 f 的 V_1 的部分集合 D，叫做 f 的定义域. 此外，与 D 的元相对应的 V_2 的元的集合，叫做 f 的值域，并以 $f(D)$ 表示.

定义（线性映象） 对于 V_1 的任意元 $\mathbf{x}^1$，$\mathbf{x}^2$，和 K 的元 λ，当下列等式

$$f(\mathbf{x}^1+\mathbf{x}^2)=f(\mathbf{x}^1)+f(\mathbf{x}^2),\ f(\lambda\mathbf{x})=\lambda f(\mathbf{x}) \tag{1.18}$$

成立时，称 f 为线性映象.

定义（映象的组合） 设 $f:V_1\to V_2$，$g:V_2\to V_3$ 时，则从 V_1 到 V_3 的映象 $g\cdot f$ 规定为

$$(g\cdot f)(\mathbf{x})=g(f(\mathbf{x})) \tag{1.19}$$

1.2.2 坐标，矩阵

由于在向量空间中引入了基底，抽象的向量空间的线性映象能够用矩阵加以表示.

设 V 是 K 上的 n 维向量空间，当取基底为 $\mathbf{a}^1,\mathbf{a}^2,\cdots,\mathbf{a}^n$ 时，V 的任意元 $\mathbf{x}$ 可以由下式

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}^1+x_2\mathbf{a}^2+\cdots+x_n\mathbf{a}^n,\ x_i\in K \tag{1.20}$$

唯一地表示出来. 因此，可以使 K 的 n 个元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，与 V 的元 $\mathbf{x}$ 相对应，其映象可以表示为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ 或者 } \varphi: V \to K^n \tag{1.21}$$

$\varphi(\mathbf{x})$ 称为关于基底 $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \cdots, \mathbf{a}^n$ 的 $\mathbf{x}$ 的坐标.

由此可见，根据映象 φ，V 与 K^n 将一一对应，于是可以把 V 与 K^n 看作相同的东西.

其次，设 V_1 为 n 维向量空间，V_2 为 m 维向量空间，考虑线性映象 f: $V_1 \to V_2$. 取 $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \cdots, \mathbf{a}^n$ 作为 V_1 的基底，$\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \cdots, \mathbf{b}^m$ 作为 V_2 的基底，并且设 $\varphi: V_1 \to K^n$，$\psi: V_2 \to K^m$，则根据图 1.4 映象 $\mathbf{F}$: $K^n \to K^m$ 将变成 $\mathbf{F} = \psi \cdot f \cdot \varphi^{-1}$.

现在，K^n 的任意元 $\boldsymbol{\xi}$，根据自然基底可以表示为

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbf{e}^k \tag{1.22}$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & V_2 \arrow[d, "\psi"] \\ K^n \arrow[r, "F"'] \arrow[u, shift right, "\varphi^{-1}"'] & K^m \end{tikzcd}$$

图 1.4 用线性映象 f 的矩阵 $\mathbf{F}$ 表示变换

设根据 $\mathbf{F}$，映射出的 K^m 的元

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{m} \eta_k \mathbf{e}^k$$

这时，根据 $\varphi(\mathbf{a}^k) = \mathbf{e}^k$，即根据 $\varphi^{-1}(\mathbf{e}^k) = \mathbf{a}^k$，可以得到

$$\eta = \mathbf{F}(\xi) = \mathbf{F}\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbf{e}^k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbf{F}(\mathbf{e}^k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \psi(f(\varphi^{-1}(\mathbf{e}^k))) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \psi(f(\mathbf{a}^k)) \quad (1.23)$$

因为根据基底 $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \cdots, \mathbf{b}^m$，$\psi(f(\mathbf{a}^k))$ 是 $f(\mathbf{a}^k)$ 的坐标，若设 $\psi(f(\mathbf{a}^k))$ 可以表示为

$$\psi(f(\mathbf{a}^k)) = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

则根据(1.23)式，得

$$\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{F}\xi = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k}\xi_k \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k}\xi_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk}\xi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

因此，线性映象 $\mathbf{F}$ 可以用矩阵来表示，矩阵 $\mathbf{F}$ 也可以写成

$$\mathbf{F} = [\alpha_{ij}].$$

1.2.3 坐标变换

设 $V_1 = V_2 = V$，使 V 的元 $\mathbf{x}$ 与其本身相对应的映象，称为恒等映象，它可以用被称为单位矩阵 $\mathbf{I}$ 的矩阵来表示

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

V 的元的坐标，因 V 的基底选取方法不同而不同．现在，我们选取 $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \cdots, \mathbf{a}^n$，作为 V 的基底，设构成坐标为 $\boldsymbol{\xi}$；选取 $\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \cdots, \mathbf{b}^n$ 作为 V 的基底时，设构成坐标为 $\boldsymbol{\eta}$，并设 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{\eta}$ 的关系为 $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{F}\boldsymbol{\xi}$，各基底之间的关系表示为

$$\mathbf{a}^j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\mathbf{b}^k (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.27}$$

由这里的 α_{jk}，可以构成（1.25）式中的矩阵形式，而根据该矩阵形式，即可得到矩阵 $\mathbf{F}$.

1.2.4 矩阵的秩和矩阵的运算

$m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$，是 $K^n \to K^m$ 的线性映象，$\mathbf{A}$ 的值域写成 $\mathbf{A}(K^n)$.

定义（矩阵的秩） $\mathbf{A}(K^n)$ 作为向量空间的维数，称为 $\mathbf{A}$ 的秩.

矩阵的和：设 $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ 和 $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ 为两个 $m \times n$ 矩阵，它们的和规定为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] \tag{1.28}$$

矩阵的数量积：设 λ 为数量，则 $\mathbf{A}$ 的 λ 倍规定为

$$\lambda\mathbf{A} = [\lambda a_{ij}] \tag{1.29}$$

矩阵的积：设 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{B}=[b_{ij}]$ 为 $p\times m$ 矩阵，则两个矩阵的积 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{C}=[c_{ij}]$ 是一个 $p\times n$ 矩阵，其中 c_{ij} 规定为

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj} \tag{1.30}$$

一般来说 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\neq\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

逆矩阵：对于 $n\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$，如果存在一个 $n\times n$ 矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$，使得

$$\mathbf{A}\cdot\tilde{\mathbf{A}}=\tilde{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{I} \tag{1.31}$$

则称 $\tilde{\mathbf{A}}$ 为 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵，并且用 $\mathbf{A}^{-1}$ 表示. 另外，称具有逆矩阵的矩阵为正则矩阵.

矩阵的转置：将 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ 的行与列依次对换后，构成的 $n\times m$ 矩阵，称为 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵，并写成 $\mathbf{A}'$，即 $\mathbf{A}'=[a_{ji}]$. 一般说 $(\mathbf{AB})'=\mathbf{B}'\cdot\mathbf{A}'$.

1.3 行列式与联立线性方程组

1.31 行列式

对于 $n\times n$ 方阵 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$，其行列式 $\det\mathbf{A}$（或表示为 $|\mathbf{A}|$），可根据归纳法定义为下列数值：

1) $n=1$ 时 $\det\mathbf{A}=\det[a_{11}]=a_{11}$.

2) 当直到 $n=r-1$ 时的行列式已经确定时*)，设把 $\mathbf{A}$ 的第一行 $[a_{11},a_{12},\cdots,a_{1r}]$ 和第 i 列去掉后的 $(r-1)\times(r-1)$ 矩阵为 $\mathbf{A}_i^*$. 这时 $\det\mathbf{A}$ 可由下式确定：

$$\det\mathbf{A}=|\mathbf{A}|=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{1+i}a_{1i}\det\mathbf{A}_i^* \tag{1.32}$$

*) 原文为"当直到 $n=r-1$ 时的 $\det\mathbf{A}$ 已经确定时"，这样写容易混淆，故作了修改. ——译者注