液压元件优化

宋俊 王淑莲 等 编著

机械工业出版社

DYS7/25

本书在全面介绍液压元件优化设计基本理论和方法的基础上，分别讨论了液压泵（马达）、液压阀和液压缸的优化设计。寻优的主要内容包括提高效率、改善技术性能、控制噪声、实现功率匹配、提高可靠性和降低成本等。优化设计的理论和方法包括最优化方法和最优控制，同时介绍了结构模糊优化方法及应用实例。

本书可以作为高等学校研究生教材或教学参考书，也可供从事液压元件设计的工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

液压元件优化/宋俊，王淑莲等编著.—北京：机械工业出版社，1999.9

ISBN 7-111-07400-9

Ⅰ.液… Ⅱ.①宋…②王… Ⅲ.液压元件-最优设计 Ⅳ.TH137.5

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第32790号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

责任编辑：盛君豪 蒋有彩 版式设计：冉晓华 责任校对：唐海燕

封面设计：李雨桥 责任印制：路 琳

北京市密云县印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

1999年9月第1版第1次印刷

850mm×1168mm 1/32·12.5印张·331千字

0 001—3 000册

定价：25.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、68326677-2527

前　言

由于设计理论和计算技术的发展，工程优化设计倍受重视。我们继《液压系统优化》出版之后，又编写了这本《液压元件优化》。把液压元件作为研究对象，也就是把它看成液压系统的子系统。系统和元件优化设计的基本理论和方法是相同的。所不同的是元件侧重在结构设计，是参数优化问题，多用最优化方法；系统则侧重在动态性能设计，是函数优化问题，多用最优控制方法。同时液压元件种类很多，相关的寻优问题更具多样性，涉及的知识面更广，解决的方法更复杂。

为突出重点，有利实用，本书的讨论范围仅限于常用主要元件的典型优化设计问题。在介绍液压元件优化所需要的基本理论和方法之后，分别讨论了液压泵（马达）、液压阀和液压缸的优化设计。寻优内容包括提高效率、改善技术性能、控制噪声、实现功率匹配、提高可靠性和降低成本等。本书可作为高等学校研究生和本科生的教材或教学参考书，也可供从事液压元件设计的工程技术人员参考。

编写分工如下：第二章和第四章由王淑莲编写，第八章由王洁编写，第九章由陈先惠编写，其余各章由宋俊编写。全书的统稿、修改、定稿工作由宋俊负责。在此，感谢孙继昌和赵波抄写了大量手稿及绘制了部分图稿。

编著者

1999.1

目　录

第一章　概　　论

第一节　液压元件及其优化设计

一、液压系统与元件

液压元件是液压系统的组成部分，所以认识液压元件就必须从认识液压系统开始。

液压系统的组成可由图 1-1 所示的框图来说明。控制对象是工作台或其它负载装置。控制对象的行为是由液压缸、液压马达等执行元件控制的。执行元件在转换放大元件的控制下输出所要求的运动和动力。转换放大元件是控制和动力传递的核心，如节流阀与电磁换向阀、比例方向阀、电液伺服阀、伺服变量泵等。它接收控制器所给的信号，并进行功率放大，转换成液压信号(流量、压力)。控制器通常是由电气组件或计算机构成，它的作用是把系统的指令信号与系统的反馈信号进行比较和加工，从而向转换放大元件发出指令。反馈元件由检测器和变换元件组成，它检测系统输出信号，变换后作为控制器的输入信号。动力源的

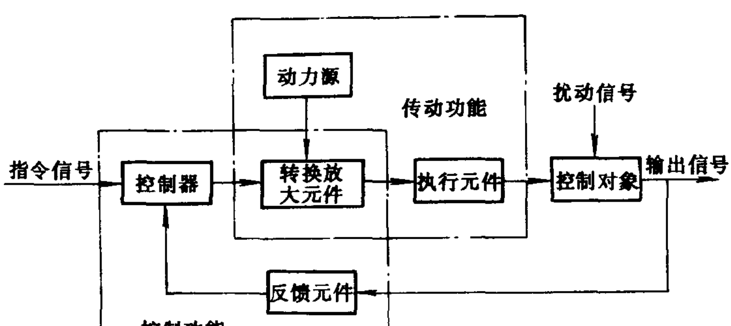

图 1-1　液压系统的组成

作用是把其它形式的能转换成液压能，如液压泵、气液转换器等。

由此可见，液压元件主要是以液压泵为主的动力元件，以液压阀为主的转换放大元件和以液压缸、液压马达为主的执行元件。此外还包括电气、电子元件和其它辅助元件。

液压元件的种类很多，每种液压元件的优化问题也很多，本书讨论的只能是常用的主要元件的典型优化问题。

二、液压元件优化的目标

1. 提高效率

从节能的角度出发，希望液压元件有比较高的效率。液压元件的效率包括机械效率和容积效率。合理的间隙设计是提高液压元件效率的重要手段之一。

2. 改善技术性能

技术性能包括稳态性能和动态性能。稳态性能如元件的精度、刚度等。动态性能如稳定性、快速性和抗干扰能力等。

3. 控制噪声

液压动力元件有时是整个机器的主要噪声源。噪声控制是液压元件高压化和高速化必须解决的问题，是治理环境污染的需要。

4. 实现功率匹配

对于多级液压元件，本身存在着功率匹配问题，就是要保证元件的输出功率足以满足其负载的需求。

5. 提高可靠性

通过改进设计，避免液压元件的早期失效，提高其可靠性和寿命。

6. 降低成本

控制液压元件的体积和重量可以节约原材料，减小生产成本。

三、寻优问题的基本类型

根据优化设计中所要确定的内容，液压元件的寻优问题可以

分为参数优化和函数优化两类。

1. 参数优化

优化设计中所寻求的是一个或一组参数。如：对轴向柱塞泵的缸体进行优化设计时，要确定缸体外径、缸体中心孔直径、缸孔长度、缸孔直径、柱塞数、吸排油口面积等。

2. 函数优化

优化设计中所寻求的是一个或一组函数。如：在讨论液压元件的动态优化问题时，要确定最优控制信号，它是时间 t 的函数。有时要寻求的是最优传递函数，它是由时间函数经积分变换后得到的复变函数。

当函数的形式已经确定，只需寻求其中的某些系数时，函数优化问题也就蜕化为参数优化问题。

第二节　优化数学模型

一、优化设计问题的要素

设计变量、**目标函数**和**约束条件**是组成优化设计问题的3个要素。

1. 设计变量

在优化设计中，需要进行选择并最终必须确定的各项独立参数或函数，称为设计变量。这些参数或函数一旦确定，所设计的对象也就被确定。

设计变量的数目称为设计问题的维数。一个寻优问题的全部设计变量，可以用一个向量来表示。

如果设计变量是一组参数，并用 $\boldsymbol{\alpha}$ 表示，当设计问题是 r 维时，则

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{bmatrix}=[\alpha_1\quad \alpha_2\cdots\alpha_r]^{\mathrm{T}} \tag{1-1}$$

式中　T——转置符，即把列向量写成行向量的转置向量。

今后如无特殊说明，所有向量均规定为列向量，并用黑体字符代表向量和矩阵。

如果设计变量是时间函数，并用 $\boldsymbol{u}(t)$ 表示，当设计问题是 m 维时

$$\boldsymbol{u}(t)=[u_1(t)\ u_2(t)\ \cdots u_m(t)]^{\mathrm{T}} \tag{1-2}$$

设计向量的每个分量代表一个独立的设计变量。以这些独立变量为坐标轴，可以组成一个欧式向量空间，称为**设计空间**，用 E^x 表示，上角标 x 代表设计空间的维数。设计变量为参数时，$\boldsymbol{\alpha}$ 代表设计空间中的一个定点（后文简称为点 $\boldsymbol{\alpha}$），表示为 $\boldsymbol{\alpha}\in E^r$（$\boldsymbol{\alpha}$ 属于E^r）。设计变量为时间函数时，$\boldsymbol{u}(t)$ 代表设计空间中一个随时间变化的点，表示为 $\boldsymbol{u}(t)\in E^m$。

2. 目标函数

为了衡量设计对象的性能，应根据实际的需要和可能，提出相应的衡量标准，这些标准就是性能指标。在设计中，把确定的性能指标称为目标函数，常记为 J。它是设计变量的标量函数。

当设计变量为参数时

$$J=f(\boldsymbol{\alpha})=f(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r) \tag{1-3}$$

当设计变量为时间函数时，目标函数是从泛函的角度提出来的，又称**目标泛函**，一般表示为

$$J=\Phi[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]\mathrm{d}t \tag{1-4}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t)\quad x_2(t)\ \cdots x_n(t)]^{\mathrm{T}}$$

式中　$\boldsymbol{x}(t)$ ——研究对象数学模型中的状态向量（n 维）；

t_0 ——起始时间（s）；

t_f ——终止时间（s）。

式（1-4）等号右边第一项称为终端指标函数，表明对象的稳态性能；第二项称为动态指标函数，表明对象的动态性能。这一类目标泛函称为综合型或波尔扎（Bolza）型。

当不计终端指标时

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\mathrm{d}t \tag{1-5}$$

这时目标泛函称为积分型或拉格朗日（Lagrange）型。

当不计动态指标函数时

$$J = \Phi\ [\boldsymbol{x}\ (t_f),\ t_f] \tag{1-6}$$

这时目标泛函称为终端型或麦耶耳（Mayer）型。

特别当终端函数和被积函数为二次函数时，称寻优问题为二次型问题，此时目标泛函为

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}(t_f)$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{e}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{1-7}$$

式中　$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{Q}$ (t)、$\boldsymbol{R}$ (t) ——加权矩阵；

$\boldsymbol{e}$ (t) ——误差向量。

如果对象的状态方程是线性的，则二次型寻优问题为线性二次型问题，简称 LQ 问题。

一个目标函数达到最优，常常是希望它取最大值或最小值。当某一目标函数 J 取最大值时，其倒数（$1/J$）或相反的数$(-J)$即为对应的最小值。为统一起见，今后不妨一律取目标函数的最小值，并记为 $\min J$。

目标函数可以由单项性能指标组成，也可以是几项性能指标的综合。

3. 约束条件

在很多实际问题中，设计变量的取值范围是有一定限制的，或必须满足一定的条件。这些限制和条件称为约束条件，简称约束。约束条件可以用数学等式或不等式来表达。

等式约束可以这样表达：当设计变量为参数时，表示为

$$d_v\ (\boldsymbol{\alpha})\ =0 \quad v=1,\ 2,\ \cdots,\ p \quad (p<r)$$

其向量形式

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0} \tag{1-8}$$

式中　$\boldsymbol{d}$——p 维向量函数。

当设计变量为时间函数时，等式约束条件一般是系统的状态方程，其形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t] \tag{1-9}$$

式中　$\boldsymbol{f}$——n 维向量函数。

不等式约束可以这样表达：当设计变量为参数时，表示为

$$h_u(\boldsymbol{\alpha})\leqslant 0 \quad u=1,\ 2,\ \cdots,\ q$$

其向量形式

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\alpha})\leqslant\mathbf{0} \tag{1-10}$$

式中　$\boldsymbol{h}$——q 维向量函数。

当设计变量为时间函数时，不等式约束可表示为

$$\boldsymbol{h}[\boldsymbol{u}(t),\ t]\leqslant\mathbf{0} \tag{1-11}$$

式中　$\boldsymbol{h}$——l 维向量函数。

式（1-10）和式（1-11）表示向量的各分量均不大于零。

从物理特性看，约束条件可分为边界约束和性能约束两类。边界约束限制的是设计变量的变化范围。性能约束是由某种性能要求所得出的限制条件。

在设计空间中，满足所有约束条件的点的集合叫做**可行域**，否则称为**非可行域**。约束条件上的点称为**边界点**，边界点属于可行域。

二、数学模型的一般形式

由上述定义可以得出优化设计的实质是：在可行域中寻找一组设计变量，使目标函数值最小。其数学表达形式如下。

1．参数优化模型

参数优化就是在设计向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的可行域内，找到一组最优参数 $\boldsymbol{\alpha}^*$，使目标函数 $J=f(\boldsymbol{\alpha}^*)$ 时取最小值。

由式（1-3）、式（1-8）和式（1-10），可以得到参数优化数学模型的一般形式

$$\left.\begin{array}{l}\min f\ (\boldsymbol{\alpha})\\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{d}\ (\boldsymbol{\alpha})\ =\mathbf{0}\\ \boldsymbol{h}\ (\boldsymbol{\alpha})\ \leqslant\mathbf{0}\end{array}\right\}\tag{1-12}$$

式中　s.t.——满足于（是“subject to”的缩写）。

在特殊情况下，如果目标函数和约束条件是线性的，表示为

$$\left.\begin{array}{l}\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{b}\\ \mathbf{0}\leqslant\boldsymbol{\gamma}\leqslant\boldsymbol{\alpha}\leqslant\boldsymbol{\beta}\end{array}\right\}\tag{1-13}$$

式中　$\boldsymbol{c}=[c_1\ c_2\cdots c_r]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{A}$——$m\times r$ 矩阵；

$\boldsymbol{\gamma}$——$[\gamma_1\ \gamma_2\cdots\gamma_r]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{\beta}$——$[\beta_1\ \beta_2\cdots\beta_r]^{\mathrm{T}}$

上述问题称为线性规划。

2．函数优化模型

函数优化就是从设计向量 $\boldsymbol{u}\ (t)$ 的可行域内，找到一组最优控制 $\boldsymbol{u}^*\ (t)$，使确定的对象从初始状态出发，沿相应的最优轨线 $\boldsymbol{x}^*\ (t)$ 转移到终端状态，并使目标泛函 $J=J\ [\boldsymbol{x}^*\ (t),\ \boldsymbol{u}^*(t),t\ ]$ 时取最小值。

由式（1-4）、式（1-9）和式（1-11），可以得到设计变量为时间函数时，优化模型的一般形式

$$\left.\begin{array}{l}\min\left\{\Phi[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]+\displaystyle\int_{t_0}^{t_f}L[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]\mathrm{d}t\right\}\\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t]-\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\mathbf{0}\\ \boldsymbol{h}[\boldsymbol{u}(t),t]\leqslant\mathbf{0}\end{array}\right\}\tag{1-14}$$

第三节　寻优方法简介

由于寻优问题的类型不同，寻优方法可以分成两大类，即最优化方法和最优控制方法。

一、最优化方法

最优化方法主要解决参数优化问题。在机械产品的优化设计

中，主要解决结构参数优化问题和稳态性能优化问题。因此也称为静态优化方法。

只有少数问题可以应用数学分析的方法求得目标函数的极值。要解决比较复杂的实际问题，需应用电子计算机进行数值计算。数值计算一般采用“步步逼近”的方法，称为迭代法。迭代法解题的步骤如下：

1）首先初选一个尽可能靠近使目标函数最小的设计向量 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 的初始点 $\boldsymbol{\alpha}_0$。

2）从 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 出发，按照一定的原则寻找可行方向 $\boldsymbol{s}_0$。当设计向量沿 s_0 方向变化时，应可以使目标函数减小。

3）沿可行方向选择步长因子 l_0，根据 $\boldsymbol{s}_0$ 和 l_0 可求得一个新的设计向量，即

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_0 + l_0\boldsymbol{s}_0$$

$\boldsymbol{\alpha}_1$ 应在可行域内，如果在 s_0 方向上，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是使目标函数最小的点，相应的 l_0^* 为最优步长。

4）得到新点 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 后，再选择一个新的使函数迅速下降的方向 s_1 及适当的步长 l_1。从 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 点出发再跨出一步，达到 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 点，并以此类推，一步步地重复计算，循序前进。从第 k 步到第（$k+1$）步迭代形式为

$$\boldsymbol{\alpha}_{k+1} = \boldsymbol{\alpha}_k + l_k\boldsymbol{s}_k \tag{1-15}$$

使 $\quad f(\boldsymbol{\alpha}_{k+1}) < f(\boldsymbol{\alpha}_k) \quad k=0, 1, 2, \cdots$

式中 l_k——第 k 步迭代计算的步长；

$\boldsymbol{s}_k$——第 k 步迭代计算的方向向量。

5）每向前一步，都应检查所得新点能否满足预定的计算精度。如果满足，即认为所得的新点为极小值点。否则，应继续迭代。

判断终止迭代的依据有三种形式：

1）相邻两个设计向量差的模与其中一个设计向量模之比，不大于给定值 ε_1，即

$$\frac{\|\boldsymbol{\alpha}_{k+1}-\boldsymbol{\alpha}_k\|}{\|\boldsymbol{\alpha}_k\|}\leqslant\varepsilon_1 \tag{1-16}$$

2）相邻的两个目标函数之差绝对值与其中一个目标函数值的绝对值之比，不大于给定的 ε_2，即

$$\frac{|J_{k+1}-J_k|}{|J_k|}\leqslant\varepsilon_2 \tag{1-17}$$

3）目标函数在迭代点处的梯度的模，不大于给定的 ε_3，即

$$\|\boldsymbol{g}_{k+1}\|\leqslant\varepsilon_3 \tag{1-18}$$

其中 $\boldsymbol{g}_{k+1}=\nabla f\ (\boldsymbol{\alpha}_{k+1})\ =\left[\frac{\partial f}{\partial\alpha_1}\ \frac{\partial f}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\partial f}{\partial\alpha_r}\right]^{\mathrm{T}}_{\alpha=\alpha_{k+1}}$

为了减少误差，上述三式可联合使用。当式

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{\alpha}_k=\boldsymbol{\alpha}^*$$

成立时，则称迭代方法收敛。否则，迭代方法是发散的。

迭代法寻优的框图见图 1-2。框图中的等号均表示赋值（后同）。

二、最优控制理论和方法

最优控制理论和方法主要解决函数优化问题，在机械产品的优化设计中，主要解决动态性能优化问题，因此也称为动态优化方法。求最优控制的理论和方法有两种。

1. 基于状态方程的方法

这种方法的理论基础是变分法、最小值原理和动态规划。在液压元件动态优化中，常遇见的是线性二次型（LQ）问题，通过解黎卡提方程可直接求出最优控

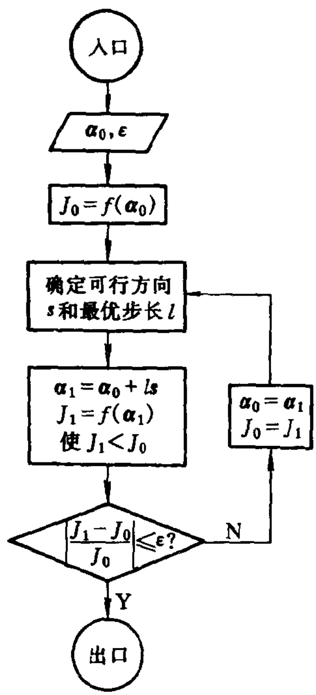

图 1-2　迭代法寻优框图

制。

2. 基于传递函数的方法

这种方法的理论基础是频谱因式分解和拉氏变换的相似定理。它是通过求最优传递函数来求最优控制的。

综上所述，液压元件的优化可采取以下步骤：

1）建立优化数学模型，即确定优化问题的设计变量、目标函数和约束条件。

2）采用合理的方法求解优化数学模型。

3）应用所得结果进行设计，通过实际运行进行考核和修正。

第二章　最优化方法

最优化方法主要解决参数优化问题，本章介绍一些常用的基本方法。

第一节　无约束解析法

无约束参数优化问题可以表示为

$$\min f(\boldsymbol{\alpha}) \tag{2-1}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_r]^T$$

即在 r 维欧氏空间确定一组设计变量 $\boldsymbol{\alpha}^*$，以使目标函数 $J=f(\boldsymbol{\alpha}^*)$ 时取最小值。

首先讨论 $r=1$ 的情况，设目标函数 $J=f(\alpha)$ 为定义在实数域内的单值连续可微函数，其极值点 α^* 存在的必要条件是在该点目标函数的导数为零。即

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^*} = f'(\alpha^*) = 0 \tag{2-2}$$

极小值点的充分必要条件，尚需在该点目标函数的二阶导数大于零，即

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha^*} = f''(\alpha^*) > 0 \tag{2-3}$$

由上述条件求得的极小值点（局部最优点）在定义域内可能有几个，将它们进行比较，可以得到唯一的最小值点（全局最优点)。

在 $r>1$ 时，设目标函数 $J=f(\boldsymbol{\alpha})$ 为定义在 r 维欧氏空间的单值连续可微函数，其极值点 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 存在的必要条件是该点目标函数对设计向量各分量的偏导数为零。

即
$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = 0 \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r \tag{2-4}$$

也就是说，如果在 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 处目标函数 J 有极值，那么该目标函数在 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 点的梯度为零向量，即

$$\nabla f(\boldsymbol{\alpha}^*)=\left[\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\cdots\frac{\partial f}{\partial \alpha_r}\right]^T_{\alpha=\alpha^*}=[0\ 0\cdots 0]^{\mathrm{T}}$$
$$=\mathbf{0} \tag{2-5}$$

可以证明，$\boldsymbol{\alpha}^*$ 为极小值点的充分必要条件除式（2-5）外，尚需下列**海赛**（Hesse）**矩阵**为正定矩阵：

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\alpha}^*)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1\partial \alpha_r}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2\partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2\partial \alpha_r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_r\partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_r\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_r^2}\end{bmatrix}_{\alpha=\alpha^*} \tag{2-6}$$

海赛矩阵是一个对称矩阵。它为正定矩阵的含义是该矩阵每一个主子式的值均大于零，即

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1^2}\right|_{\alpha=\alpha^*}>0$$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1\partial \alpha_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2\partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2^2}\end{vmatrix}_{\alpha=\alpha^*}>0$$

以此类推，最后

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1\partial \alpha_r}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2\partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2\partial \alpha_r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_r\partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_r\partial \alpha_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_r^2}\end{vmatrix}_{\alpha=\alpha^*}>0$$