现代数学基础丛书

# 辛几何引论

J.柯歇尔 邹异明 著

学 出 版 社

现代数学基础丛书

# 辛几何引论

J. 柯歇尔　邹异明 著

科学出版社

1997

## 内 容 简 介

辛几何是近十几年发展起来的新的重要数学分支。本书是辛几何（辛流形）的入门性读物。全书共分六章，分别是：代数基础，辛流形，余切丛，辛 $G$-空间，Poisson 流形，一个分级情形。前三章是重要的基本概念，后三章论述有关的应用。

本书可供大学高年级学生、研究生以及几何、群论、分析、特别是微分方程方面的研究工作者参考。

现代数学基础丛书

辛 几 何 引 论

J. 柯歇尔 邹异明 著

责任编辑 杜小杨

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986 年 3 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1997 年 8 月第二次印刷 印张：4 3/4

印数：3 501—5 500 字数：120 000

ISBN 7-03-006167-5/O·959

定 价：9.00 元

# 序

1983年春，我应邀在南开大学讲学，本书就是在这次讲学的内容的基础上，由邹异明翻译整理，稍加修改写成的. 我们希望通过这样一本入门性质的书向读者介绍辛流形的理论.

分析力学的发展为辛结构提供了基本概念. 辛结构这一术语在相当大的程度上来源于分析力学. 但在本书中，并未深入探讨辛结构理论在力学方面的应用，而且对于这个理论的一些重要的方面，特别是在分析学上的应用，本书亦未论及. 关于这些问题，请读者参阅文献[1]，[2]，[7]和[26]. 本书着重讨论具有辛结构的流形的微分性质.

本书的第一章讨论向量空间的辛结构. 第二章讨论辛流形，向读者介绍了基本概念和基本结果，在这一章中，我们尽可能早地证明辛坐标的存在性(Darboux 定理)，这样做的目的是使读者能够在随后的论述中看出我们所给出的公式的重要性. 辛流形上的可微函数和辛结构的无穷小自同构的联系，是辛流形理论的基础，关于这方面的内容，将在§9和§10中加以讨论. 这一章以有关辛流形的子流形，特别是 Lagrange 子流形的一些结果作为结尾.

在余切丛上存在标准辛结构这一事实，阐明了大量的与辛结构有关的问题. 第三章介绍关于余切丛和余切丛上的辛向量场的结果.

第四章讨论辛$G$空间，即讨论具有在某一 Lie 群$G$的作用下不变的辛结构的辛流形. 对于这样的辛流形，一种我们称之为矩射的映射向我们提供了一个有效的研究方法. 关于辛$G$空间的讨论，是辛流形理论的一个内容十分丰富的方面，其中还有许多值得进一步研究的问题. 由于对辛$G$空间的研究，导致了人们去研究 Lie 代数的对偶结构和所谓的余伴随表示的几何性质. 我们将在

§17 中介绍这些内容，关于这些内容的讨论一直延续到第五章. 在第五章中，首先介绍关于所谓的 Poisson 流形的一些一般的性质. Poisson 结构的概念是辛结构这一概念的推广，它使人们以新的观点来考虑经典的内容；Poisson 结构是从逆变反对称张量概念出发的. 在 §20 中，我们将给出关于 Lie 代数的对偶空间里的 Poisson 结构的精确的结果.

第六章,即最后一章,是比较特殊的. 这一章的目的是介绍在第二、三章中所讨论的有关概念在超流形上的推广. 我们只讨论 $(0, n)$ 维的超流形,也就是说,只考虑微分性质,不考虑几何意义. 在这章里,我们着重叙述基本性质,有关的证明大多都省略了. 这是因为所涉及的内容都是比较基础的,并且,我们认为略去的这些证明都可以作为读者的习题.

最后,我们对严志达教授表示衷心的感谢,他对本书的翻译整理给予了热情的帮助.

J. 柯歇尔 (Koszul)

1984 年 12 月

# 目　　录

# 第一章 代数基础

## §1. 反对称形式

我们用$V$来表示特征$\neq 2$的域$k$上的有限维向量空间，用$A^p(V)$来表示$V$上取值于$k$中的反对称$p$-线性形(或称$p$-形式)所构成的向量空间，特别地，$A^0(V)=k$，$A^1(V)$就是$V$的对偶空间$V^*$.

设 $\alpha\in A^p(V)$，$\beta\in A^q(V)$，则$p$-形式$\alpha$和$q$-形式$\beta$的外积$\alpha\wedge\beta$是一个$p+q$-形式，它在$(x_1,\cdots,x_{p+q})\in\underbrace{V\times\cdots\times V}_{p+q}$处的值由下式决定

$$(\alpha\wedge\beta)(x_1,\cdots,x_{p+q})$$
$$=\sum_{\tau\in\mathfrak{S}(p,q)}\operatorname{sg}(\tau)\alpha(x_{\tau(1)},\cdots,x_{\tau(p)})\beta(x_{\tau(p+1)},\cdots,x_{\tau(p+q)}),$$

其中$\mathfrak{S}(p,q)$表示集合$\{1,2,\cdots,p+q\}$的所有满足下面的条件的置换$\tau$的全体:

(i) $\tau(1)<\tau(2)<\cdots<\tau(p)$

且

(ii) $\tau(p+1)<\tau(p+2)<\cdots<\tau(p+q)$.

用这种方式定义的外积满足结合律，从而在

$$A(V)=\bigoplus_p A^p(V)$$

上定义了一个分级代数结构. 根据外积的定义，若 $\alpha\in A^p(V)$，$\beta\in A^q(V)$，则我们有

$$\alpha\wedge\beta=(-1)^{pq}\beta\wedge\alpha.$$

因为这一性质，所以我们称分级代数$A(V)$为$Z_2$-可换的(或$Z_2$-交换).

设 $f_1,\cdots,f_n$ 为$V$的一组基，并且设$\lambda$为任意一个从集合$\{1,2,\cdots,p\}$ 到集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 内的映射，我们记

$$f^{\lambda} = f_{\lambda(1)} \wedge \cdots \wedge f_{\lambda(p)},$$

则当 $\lambda$ 遍取所有的从 $\{1, 2, \cdots, p\}$ 到 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 内的满足条件

$$\lambda(1) < \lambda(2) < \cdots < \lambda(p)$$

的映射时，所得到的 $f^{\lambda}$ 的全体就构成空间 $A^p(V)$ 的一组基. 设 $n = \dim V$, 则对任一整数 $p \geqslant 0$, 我们有 $\dim A^p(V) = \binom{n}{p}$.

对任一 $x \in V$, 我们定义分级空间 $A(V)$ 的一个 $-1$ 级的自同态 $i(x)$ 如下:

$$(i(x)\alpha)(x_1, \cdots, x_{p-1}) = \alpha(x, x_1, \cdots, x_{p-1}),$$

对所有的 $\alpha \in A^p(V)$ 和所有的 $x_1, \cdots, x_{p-1} \in V$ 都成立. 设 $\alpha \in A^p(V)$, 则 $i(x)\alpha$ 是一 $(p-1)$-形式,我们称 $i(x)\alpha$ 为 $\alpha$ 通过 $x$ 的内积. 根据 $i(x)$ 的定义可知,映射

$$x \longmapsto i(x)$$

是从 $V$ 到 $A(V)$ 的自同态空间 $\mathrm{End}(A(V))$ 内的一个线性映射. 对任意的 $x, y \in V$, 我们有

$$(1.1) \qquad i(x)\circ i(y) + i(y)\circ i(x) = 0.$$

若 $\alpha \in A^p(V)$, $\beta \in A(V)$, 则我们有

$$(1.2) \quad i(x)(\alpha \wedge \beta) = (i(x)\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i(x)\beta).$$

由于这个性质,所以我们称 $i(x)$ 为分级代数 $A(V)$ 的 $Z_2$- 导子.

1.3. **定义.** 设 $\alpha$ 是向量空间 $V$ 上的一个反对称 $p$- 形式我们称由 $V$ 中所有满足 $i(x)\alpha = 0$ 的元素 $x$ 所构成的子空间为 $\alpha$ 的核，记为 $\mathrm{Ker}\alpha$. $\alpha$ 的核的余维数称为 $\alpha$ 的秩 $(= \dim V - \dim \mathrm{Ker}\alpha)$.

设 $V, W$ 为域 $k$ 上的两个向量空间, $f$ 为从 $V$ 到 $W$ 的一个线性映射,我们利用下面的等式

$$(A(f)\beta)(x_1, \cdots, x_p) = \beta(f(x_1), \cdots, f(x_p)),$$

其中 $\beta \in A^p(W)$ 和 $x_1, \cdots, x_p \in V$ 均为任意,来定义一个从分级代数 $A(W)$ 到分级代数 $A(V)$ 内的同态 $A(f)$. 由 $A(f)$ 的定义知,若 $f$ 是内射（或满射),则 $A(f)$ 也是内射（或满射).

设 $\alpha\in A^p(V)$，$N$ 为$V$的一个向量子空间且 $N\subset\mathrm{Ker}\alpha$. 记从$V$到$V/N$上的标准映射为$q$，则不难看出，存在唯一的一个$p$-形式 $\beta\in A^p(V/N)$ 使 $\alpha=A(q)\beta$. 我们有

$$\mathrm{Ker}\beta=q(\mathrm{Ker}\alpha).$$

**由一个反对称 2-形式定义的正交性.** 设$\omega$是向量空间$V$上的一个反对称 2-形式. $V$的两个元素$x,y$称为是互相正交的(对于$\omega$)，如果有 $\omega(x,y)=0$. 设$E$是$V$的一个子空间，我们以$E^\perp$来表示由$V$中所有满足 $\omega(x,y)=0$, $\forall y\in E$, 的$x$所构成的$V$的子空间，并把它称为$E$的正交补. 我们不加证明地引用下列结论，读者可试证之:

(i) 对$V$的任一子空间$E$都有

$$E^\perp\supset\mathrm{Ker}\omega,$$

$$(E^\perp)^\perp=E+\mathrm{Ker}\omega,$$

$$((E^\perp)^\perp)^\perp=E^\perp.$$

(ii) 若 $E$, $F$ 为$V$的两个子空间，则有

$$(E+F)^\perp=E^\perp\cap F^\perp.$$

(iii) 若 $E\subset F$，则 $E^\perp\supset F^\perp$.

(iv) 若 $\mathrm{Ker}\omega\subset E\cap F$，则有

$$(E+F)^\perp=E^\perp+F^\perp.$$

1.4. **引理.** 设 $\omega\in A^2(V)$ 并设$E$为$V$的一个子空间，则我们有

$$\dim E^\perp=\dim V-\dim E+\dim(E\cap\mathrm{Ker}\omega).$$

证. 根据 $i(x)$ 的定义知，映射

$$x\longmapsto i(x)\omega,\ x\in V,$$

是从$V$到$V^*$的线性映射，它的核为 $\mathrm{Ker}\omega$. 在这个映射下，$E$的象的维数是

$$\dim E-\dim(E\cap\mathrm{Ker}\omega).$$

但根据对偶性，$E$的象是$E^\perp$的正交补，所以它的维数等于$E^\perp$的余维数，所以结论成立. 证完.

1.5. **定义.** 设$\omega$是向量空间$V$上的一个反对称 2-形式. 又

设$E$是$V$的一个子空间，则

若 $E\subset E^\perp$，$E$ 称为$(V,\omega)$的迷向子空间；

若 $E\supset E^\perp$，$E$ 称为$(V,\omega)$的余迷向子空间；

若 $E=E^\perp$，$E$ 称为$(V,\omega)$的 Lagrange 子空间；

若 $E\cap E^\perp=(0)$，$E$ 称为$(V,\omega)$的辛子空间．

由定义可知，所有维数$\leqslant 1$的子空间都是迷向的，所有余维数$\leqslant 1$且含$\mathrm{Ker}\omega$的子空间都是余迷向的，而根据包含关系来确定的极小迷向子空间和极小余迷向子空间都是 Lagrange子空间．

1.6. **命题**．设$\omega\in A^2(V)$并设$L$为$(V,\omega)$的一个 Lagrange 子空间，则

$$\text{秩}\ \omega=2(\dim L-\dim\mathrm{Ker}\omega).$$

证．事实上，因为$L$是一 Lagrange 子空间，所以

$$L\cap\mathrm{Ker}\omega=L^\perp\cap\mathrm{Ker}\omega=\mathrm{Ker}\omega.$$

从而利用引理 1.2 得

$$\dim L=\dim V-\dim L+\dim\mathrm{Ker}\omega.$$

证完．

**推论**．$V$上任一反对称 2-形式的秩都是偶数，空间$(V,\omega)$的所有 Lagrange 子空间具有相同的维数．

1.7. **命题**．设$\omega\in A^2(V)$并设$W$是$(V,\omega)$的一个余迷向子空间，则对$(V,\omega)$的任一 Lagrange 子空间$L$，$L\cap W=W^\perp$都是$(W,\omega|W)$的一个 Lagrange 子空间．

证．因为$L$和$W$都是余迷向的，所以

$$\mathrm{Ker}\omega\subset L\cap W.$$

从而

$$(L\cap W)^\perp=L^\perp+W^\perp=L+W^\perp.$$

又由于$W$是余迷向的，所以

$$(L\cap W)^\perp\cap W=(L+W^\perp)\cap W=L\cap W+W^\perp.$$

这说明 $L\cap W+W^\perp$ 在$(W,\omega|W^2)$中的正交补就是它本身．证完．

1.8. **命题.** 设 $\omega \in A^2(V)$ 并设 $N$ 为 $V$ 的一个含于 $\mathrm{Ker}\omega$ 中的子空间. 设

$$q:\ V \to V/N$$

为标准映射，$\omega' \in A^2(V/N)$ 满足关系式

$$A(q)\omega = \omega,$$

则映射

$$L \longmapsto q(L)$$

是从 $(V, \omega)$ 的 Lagrange 子空间所构成的集合到 $(V/N, \omega')$ 的 Lagrange 子空间所构成的集合上的一个双射 (bijection).

证. 因为对任意的 $x, y \in V$ 有

$$\omega'(q(x), q(y)) = \omega(x, y),$$

所以对任一子空间 $E \subset V$, $q(E^\perp)$ 是 $q(E)$ 关于 $\omega'$ 的正交补. 因此,若 $L$ 是 $(V, \omega)$ 的一个 Lagrange 子空间，则 $q(L)$ 是 $(V/N, \omega')$ 的一个 Lagrange 子空间. 由于 $N \subset \mathrm{Ker}\omega$, 所以 $(V, \omega)$ 的任一 Lagrange 子空间均含 $N$, 于是有

$$L = q^{-1}(q(L)).$$

这说明映射

$$L \longmapsto q(L)$$

是一内射. 现证它也是满射. 设 $L'$ 是 $(V/N, \omega')$ 的一个 Lagrange 子空间,令

$$L = q^{-1}(L'),$$

则有

$$q(L^\perp) = q(L)^\perp = L',$$

从而

$$L^\perp + N = L + N.$$

又因为

$$N \subset \mathrm{Ker}\omega \subset L^\perp \text{ 且 } N = \mathrm{Ker} q \subset L,$$

所以有 $L^\perp = L$. 于是证明了 $L$ 是 $(V, \omega)$ 的一个 Lagrange 子空间且有 $q(L) = L'$. 证完.

1.9. **命题.** 设 $\omega \in A^2(V)$ 并设 $L$ 为 $(V, \omega)$ 的一个 Lagrange 子空间. 令 $J$ 为 $(V, \omega)$ 的所有满足 $E \cap L = (0)$ 的迷向子空间

$E$所构成的集合. 若$F$是由包含关系来确定的$J$的一个极大元，则$V$是$L$和$F$的直和.

证. 事实上,若$x \in F^{\perp}$,则子空间$F + kx$是迷向子空间，从而

$$F + kx \subset F \quad \text{或者} \quad (F + kx) \cap L \neq (0).$$

无论怎样都有 $F^{\perp} \subset F + L$. 于是有

$$F^{\perp} \cap L = F^{\perp} \cap L^{\perp} = (F + L)^{\perp} \subset (F^{\perp})^{\perp} = F + \mathrm{Ker}\omega.$$

因而

$$F^{\perp} \cap L \subset (F + \mathrm{Ker}\omega) \cap L = \mathrm{Ker}\omega$$

且

$$V = (F^{\perp} \cap L)^{\perp} = F + \mathrm{Ker}\omega + L^{\perp} = F + L.$$

证完.

我们称由命题 1.9 给出的$F$为 Lagrange 子空间$L$的迷向补子空间.

**推论 1.** 设$L$为$(V, \omega)$的一个 Lagrange 子空间,设$f_1, \cdots, f_r$为$V$的对偶空间$V^*$里的一组线性无关的 1-形式使得

$$L = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant r} \mathrm{Ker} f_i,$$

则在$V^*$中存在$r$个线性无关的 1-形式$f_{r+1}, \cdots, f_{2r}$使$f_1, \cdots, f_r, f_{r+1}, \cdots, f_{2r}$线性无关且

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} f_i \wedge f_{r+i}.$$

证. 事实上,设$F$是$L$在$V$中的迷向补子空间，$e_1, \cdots, e_r$为$F$的一组满足 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ 的基. 令

$$f_{r+i} = i(e_i)\omega, \ i = 1, \cdots, r,$$

则因为$F$是迷向的,所以有

$$i(e_j) f_{r+i} = \omega(e_i, e_j) = 0, \ i, j = 1, \cdots, r.$$

因此,

$$i(e_j)\left(\omega - \sum_{i=1}^{r} f_i \wedge f_{r+i}\right) = f_{r+j} - f_{r+j} = 0$$

对所有$1 \leqslant j \leqslant r$成立. 由此推知形式

$$\omega - \sum_{i=1}^{r} f_i \wedge f_{r+i}$$

的核包含 $F$. 另外，由推论的假设知上面的形式限制在 $L$ 上为 0. 又由 $F$ 的定义有

$$V = F + L.$$

于是便有

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} f_i \wedge f_{r+i}.$$

为证 $f_1, \cdots, f_{2r}$ 的无关性，注意到 $\omega$ 的核包含

$$\bigcap_{r < i \leq 2r} \mathrm{Ker} f_i,$$

但是它的核的维数是

$$2\dim L - \dim V = \dim V - 2r,$$

于是 $f_1, \cdots, f_{2r}$ 是线性无关的. 证完.

**推论 2.** 设 $L$ 是 $(V, \omega)$ 的一个 Lagrange 子空间，则存在 $(V, \omega)$ 的 Lagrange 子空间 $\tilde{L}$ 使得

$$L \cap \tilde{L} = \mathrm{Ker}\omega,$$

因而也就有

$$V = L + \tilde{L}.$$

证. 沿用推论 1 的符号，令

$$\tilde{L} = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \mathrm{Ker} f_{r+i}$$

便可. 证完.

**推论 3.** 若域 $k$ 的特征为 0，$\omega$ 的秩为 $2r$，则 $\omega$ 的 $r$ 阶外积幂 $\omega^r \neq 0$ 而 $r+1$ 阶外积幂 $\omega^{r+1} = 0$.

证. 沿用推论 1 的符号，设

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} f_i \wedge f_{r+i},$$

则有

$$\begin{aligned} \omega^r &= r!\, f_1 \wedge f_{r+1} \wedge f_2 \wedge f_{r+2} \cdots f_r \wedge f_{2r} \\ &= (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} r!\, f_1 \wedge f_2 \cdots f_{2r}. \end{aligned}$$

由此推得结论成立. 证完.

## §2. 辛向量空间，辛基底

设$V$是特征$\neq 2$的域$k$上的向量空间.

2.1. **定义.** 设$\omega$是$V$上的一个反对称 2-形式. 若 $\mathrm{Ker}\omega=(0)$，则我们称$\omega$为$V$上的一个辛形式，这时，我们把$(V,\omega)$称为辛空间.

若$(V,\omega)$是一辛空间，则$\dim V=$秩$\omega$，从而$V$是偶维数空间. 此时$(V,\omega)$的 Lagrange 子空间的维数为$\frac{1}{2}\dim V$.

**例 1.** 设$W$是域$k$上维数为$r$的一个向量空间，$W^*$为$W$的对偶空间. 对任意的 $x_1, x_2\in W$ 和任意的$f_1, f_2\in W^*$，令

$$\omega((f_1,x_1),(f_2,x_2))=f_1(x_2)-f_2(x_1),$$

则$\omega$是$W^*\times W$上的一个辛形式. 不难看出，$W^*\times 0$和$0\times W$都是$(W^*\times W,\omega)$的 Lagrange 子空间.

**例 2.** 设 $f_1,\cdots,f_{2r}$是向量空间$k^{2r}$的自然坐标，则

$$\omega=\sum_{i=1}^{r} f_i\wedge f_{r+i}$$

是$k^{2r}$上的一个辛形式，我们称它为$k^{2r}$上的标准辛形式，而称辛空间$(k^{2r},\omega)$为$2r$维的标准辛$k$-空间.

根据命题 1.7 的推论 2，辛空间$(V,\omega)$的任一 Lagrange 子空间$L$在$V$中都有一 Lagrange 补子空间，即有$(V,\omega)$的 Lagrange 子空间$\tilde{L}$使得

$$L\cap\tilde{L}=(0)\quad 且\quad V=L\dotplus\tilde{L}.$$

2.2. **命题.** 设$(V,\omega)$是一$2n$维的辛空间，$L_1$和$L_2$是$(V,\omega)$中互补的两个 Lagrange 子空间. 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是$L_1$的一组基，则存在$L_2$的一组唯一的基 $e_{n+1},\cdots,e_{2n}$ 使得

$$\omega(e_i,e_{n+j})=\delta_{ij},\ 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

**证.** 事实上，映射

$$x\longmapsto(i(x)\omega)|L_1$$

是从 $L_2$ 到 $L_1$ 的对偶空间 $L_1^*$ 上的一个同构。令 $f_1, \cdots, f_n$ 为 $L_1^*$ 中与 $e_1, \cdots, e_n$ 相对偶的一组基。对任一 $1 \leqslant i \leqslant n$，取 $e_{n+i} \in L_2$ 使

$$(i(e_{n+i})\omega)|L_1 = -f_i,$$

则 $e_{n+1}, \cdots, e_{2n}$ 为 $L_2$ 的一组基且

$$\omega(e_i, e_{n+j}) = f_j(e_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

证完。

2.3. **定义**. 设 $(V, \omega)$ 是一 $2n$ 维的辛空间。若 $V$ 的一组基 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 满足

$$\omega(e_i, e_{n+j}) = \delta_{ij} \quad 且 \quad \omega(e_i, e_j) = \omega(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0,$$
$$i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

则我们称它为 $(V, \omega)$ 的一组辛基.

由命题 1.9 的推论 2 和命题 2.2 可知任一辛空间 $(V, \omega)$ 都有辛基。

若 $(V, \omega)$ 是一辛空间，则在一组辛基下，$\omega$ 所对应的矩阵具有形式

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $I_n$ 为 $n$ 阶单位方阵。

若 $(V, \omega)$ 是一辛空间，则 $V$ 的一组基 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 是一组辛基的充要条件为：对于 $V^*$ 中相对于 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 的对偶基 $f_1, \cdots, f_{2n}$,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \wedge f_{n+i}.$$

**习题**. 设 $L_1$ 和 $L_2$ 是辛空间 $(V, \omega)$ 的两个 Lagrange 子空间。试证明在 $V$ 中存在同时为 $L_1$ 和 $L_2$ 的 Lagrange 补的子空间。

## §3. $sl(2, k)$ 在辛向量空间上的反对称形式代数中的标准线性表示

在这一节中，$k$ 表示特征为 0 的域，$sl(2, k)$ 表示 $k$ 上由基