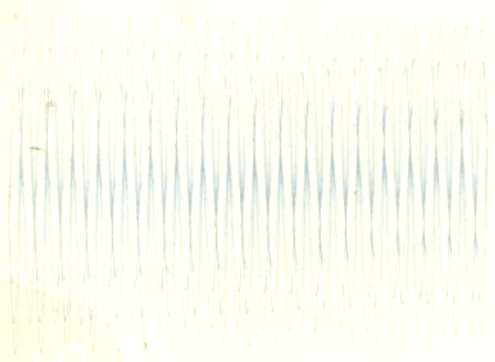


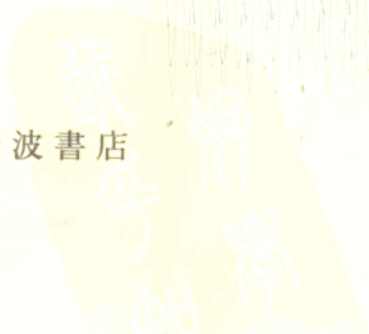
岩波講座 基礎工学 20

制御工学Ⅱ

藤井澄二編



岩波書店



71.21
441
=5-3

岩波講座 基礎工学 20

学 工 御 制

II

藤	井	澄	二
正	田	英	介
茅		陽	一
北	森	俊	行

71.21
441
=5-3

岩



岩波講座 基礎工学 20 制御工学 II (全 19 巻 / 第 5 回配本)

1968 年 5 月 27 日 第 1 刷発行 ©

東京都千代田区神田一ツ橋 2-3 株式会社 岩波書店 / 精興社印刷・松岳社製本

目 次

第4章 サンプル値制御系

4. 1	サンプル値制御系	107
4. 2	サンプラーとホールド回路	108
4. 3	z 変換	114
4. 4	パルス伝達関数	117
4. 5	サンプル値系過渡応答の解析	123
4. 6	サンプル値系の安定性	126
4. 7	サンプル値系の特性補償	131
4. 8	サンプル値制御系の設計	135
4. 9	有限整定応答	137
4.10	ま と め	140

第5章 統計的手法による制御系のとりあつかい

5. 1	不規則信号の性質	144
5. 2	相関関数とスペクトル	152
5. 3	不規則信号に対する制御系の応答	157
5. 4	制御系の最適設計問題と最適の基準	163
5. 5	補償要素パラメータの最適選定	164
5. 6	最適濾波器の理論☆	172
5. 7	最適補償要素の選定☆	178
5. 8	ま と め	183

第6章 動特性の測定

6. 1	動特性の表現	185
6. 2	動特性試験法	193
6. 3	白色信号を用いた測定	201
6. 4	操業信号データよりの動特性の推定☆	206
6. 5	ま と め	213

制御工学 I 目次

第 1 章 序 論

第 2 章 制御系要素の特性と表現

第 3 章 線形フィードバック制御系

制御工学 III 目次

第 7 章 非線形制御系

第 8 章 最 適 化

第 9 章 制御系の基本的性質

付 録 ラプラス変換, z 変換, 行列および行列式

表紙カット製作: 渡辺茂・榎屋治紀・藤野孝爾・幸村真佐男
(IBM データセンター設置 IBM 7090・プロッター使用)

デジタル計算機を制御装置として制御系の中に導入することにより、あるいは遠隔制御のために、または制御対象の本質的な性質によって、制御系の各部の信号は必ずしも連続的ではなく、断続的にしか与えられないことがある。

本章ではこのようなサンプル値制御系について、まずその理論的な取扱いの基礎となる z 変換法を導入し、連続信号とそれをサンプルした信号との差を明確にする。さらに第3章に述べた線形連続制御系との相違を示しながらサンプル値系の解析から補償法までのあらましを説明し、最後にサンプル時点だけの応答を問題とすると、有限時間整定応答というあらかじめ決められた応答波形を与えるような制御装置をも設計できることを明らかにし、第8章の最適化との関連を示した。

4.1 サンプル値制御系

第3章では制御系の内部で常に連続的に信号が伝達されているとして議論を進めてきたが、実際の制御装置の中には同じ線形系であっても一部で信号が断続的にしか与えられないものがある。この場合にはどのような問題が起こってくるだろうか。

一例として図4.1に示すような貯水池Aから離れたB点で水門の開度を無線通信により制御する遠隔制御系について考えてみる。このとき実際の水門の開度をB点で監視して制御系としての信頼度をあげようとする、図4.1(b)のようにこの遠隔制御系は通信路をフィードバック・ループ内を含む制御系として構成される。通常このような通信路においては雑音等の点でパルス通信方式が用いられるが、この方式では伝送されるデータはサンプルして符号化されるので断続的にしか与えられない。したがってこの遠隔制御系は断続的な水門

開度値を目標値と比較し、そして断続的な補正のための制御出力(誤差)によって動作することとなり、その性質は第3章までに述べた連続信号のみによる制御系(以下便宜上連続系と称する)とはかなり異なってくるであろう。

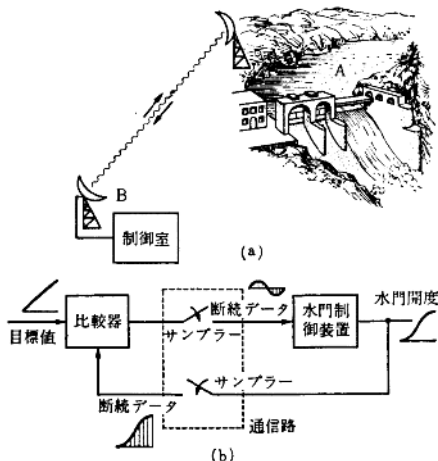


図4.1 遠隔制御

近年デジタル計算機の普及に伴い、工作機械の数値制御装置や各種プロセスの直接デジタル制御(D. D. C.)などのように、系内の信号処理・比較のため、あるいは制御装置として、デジタル計算機が制御系の一要素として採用されるようになってきている。計算機は原理上断続的な情報処理しか行ないえないから、これらの系ではサンプル操作は必然的なものになってくる。

同様の事柄は、各種のレーダーを用いた追尾制御、クロマトグラフィーによる化学プロセスの制御、時分割通信路を用いた遠隔制御系等にもみられる。このような制御系を一般にサンプル値系といい本章ではその解析、設計について論ずる。

4.2 サンプラーとホールド回路

連続系とサンプル値系の差異をもう少し数学的に取り扱うために、断続信号は連続信号から情報を適当にサンプルして得られたものと考え、この操作を

行なう要素をサンプラーと呼び、ブロック線図中ではスイッチ記号によって表わす。上例においては通信路がサンプラーを含むために図4.1(b)のブロック線図が描かれているのである。

理想サンプラー サンプラーには、その動作モード[†]、サンプル時間等により各種のものが考えられるが、最も簡単で実用上広く用いられているのは、図4.2に示すようにサンプル周期 T が一定でサンプル時間 h がこれに比して十分短いものである。図からも明らかなようにサンプラー出力はパルス信号となるから、サンプラー導入によりサンプラー出力には高調波成分が含まれ、またサンプル周期より十分早い信号は無視されてしまう。サンプラー出力 $f_s(t)$ を直接数学的に記述するのはかなり複雑になる。

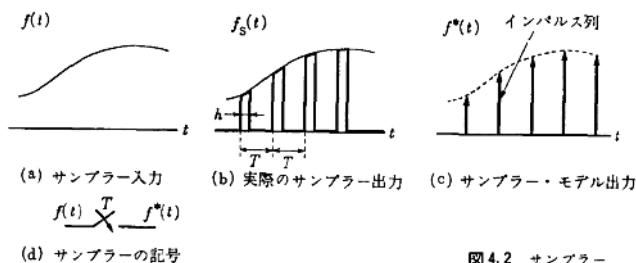


図4.2 サンプラー

しかしあとに述べるようにサンプラー出力を補間してもとの信号を復元しようとする場合には、 $f_s(nT)$ の情報しか使用しないし、また復元された信号の $t=nT$ での値が $f_s(nT)$ に等しいことから、サンプラー出力 $f_s(t)$ を大きさが $f_s(nT)$ に等しいインパルス列 $f^*(t)$ で置き換えて考える。もちろんここでいうインパルス列は第3章および付録Iで説明したインパルスの意味であるから、 $f^*(t)$ が上の性質をもつことは明らかであろう。このような考え方は、系内の時定数が h に比して十分大きく、また制御系全体として低域濾波特性をもつという仮定のもとに、実際の制御系での現象を十分精度よく表わすので、以下で

[†] サンプラーの動作モードには一定周期のもの以外に、あるシーケンスにしたがって開閉動作をするもの、周期がランダムなもの等がある。これらを含めた統一的な取扱いについては Kalman, R. & Bertram, J.: "A Unified Approach to the Theory of Sampling Systems", *J. Franklin Inst.*, May, 1959, p. 405 参照。

は入力 $f(t)$ に対しインパルス出力 $f^*(t)$ を生ずるような理想化されたサンプラー・モデルで実際の制御系のサンプラーを置き換えて考えることとする[†]。

サンプラー出力 $f^*(t)$ は、インパルス列で定義されることから明らかなように、ラプラス変換して

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTs} \quad (4.1)$$

と書ける。入力に関する伝達特性を考えると、 $f(t)$ を $t < 0$ で $f=0$ とすれば、大きさ 1 のインパルスが周期 T で繰り返す単位インパルス列 $\delta_T(t)$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \quad (4.2)$$

によって、サンプラーの入出力関係は

$$f^*(t) = f(t) \times \delta_T(t) \quad (4.3)$$

とも表わされる。インパルス列 $\delta_T(t)$ をラプラス変換すると

$$\mathcal{L}[\delta_T(t)] = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots$$

となるから、 $|e^{-Ts}| < 1$ の範囲では収束して

$$\mathcal{L}[\delta_T(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

と表わせる。そこで $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ として (4.3) の両辺をラプラス変換すると、複素数領域での合成積の定理により、

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \mathcal{L}[f^*(t)] = \mathcal{L}[f(t) \times \delta_T(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \end{aligned} \quad (4.4)^{**}$$

を得る。 $F(s)$ の分母が分子より 2 次以上次数が高ければジョルダンの補助定理により複素積分は閉路積分に移行する。したがって周回積分路を図 4.3 のように $F(s)$ の極の外側にとることにより、(4.4) の右辺の複素積分は $1/(1 - e^{-T(s-p)})$ の極 ($p = s + 2\pi nj/T$) による留数の和から求められて

[†] サンプル時間 h の影響を考慮した場合も本章で述べる方法をもとにして取り扱いうるが、ここでは省略する。くわしくは Jury, E. I.: *Sampled-data Control System*, chap. 9, McGraw-Hill (1959) 参照。

^{**} 式の導入、複素積分の意味、符号 c などについては付録 I ラプラス変換の項を参照せよ。

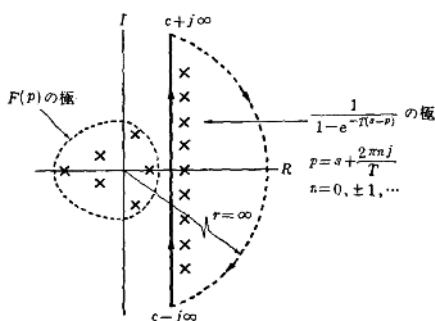


図4.3 (4.4)の周回積分路

$$F^*(s) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left. \frac{F(p)}{\frac{d}{dp}(1 - e^{-T(s-p)})} \right|_{p=s + \frac{2\pi nj}{T}} \quad (4.5)$$

となり、結局

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(s + j\frac{2\pi n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) \quad (4.6)$$

と表わされる。ここで $2\pi/T = \omega_s$ をサンプル角周波数という。

(4.6)は先に定性的に述べたサンプラーの導入に伴う信号の周波数特性の変化を数式的に示している。すなわち入力信号の周波数スペクトルが図4.4(a)の

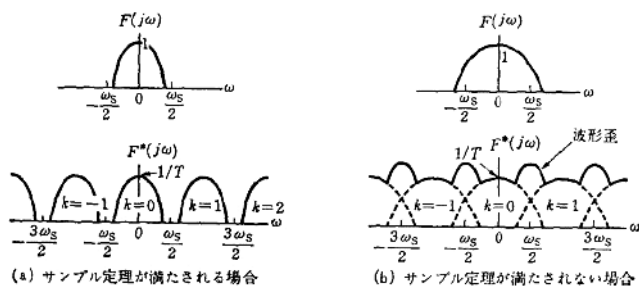


図4.4 サンプラーの周波数特性

ように $|\omega| \leq \omega_s/2$ の範囲にのみ存在したとすれば、サンプラー出力では $-\infty < \omega < \infty$ の範囲に周波数スペクトルは拡張されるが、 $n=0$ の部分を用いて完全に入力信号を再現することはできる。しかし図 4.4(b) のように入力が $\omega_s/2$ の外にも広がっている場合には異なる n に対する成分が互いに重なりあって、もとの信号を回復できなくなる。いかえるとサンプラー出力から入力信号を完全に再現するには入力信号の周波数成分がただかサンプル周波数の $1/2$ 以下でなければならない。このことを**サンプル定理**という。

ホールド回路 サンプラー出力に含まれる高調波成分はこのような入力信号の再現性のみでなく、系の時間応答に対しても大きな影響を及ぼすから、このままの形では連続系の一部をサンプラーで置きかえたサンプル値制御系の特性はもとの連続系と著しく異なることになり、望ましくない。そこでサンプラーの直後に低域濾波特性をもった回路を接続すればこの高調波成分が除かれ、サンプル動作があまり系全体の特性に影響を与えないようになる。逆にこの回路はサンプラー出力信号をサンプル間隔にも外挿してできるだけ入力連続信号に近いものを復元する情報処理回路とも考えられる。このような目的で用いられる回路を一般に**ホールド回路**という。

通常用いられているのはサンプル間隔の間ずっと、前回にサンプルされた信号を保持する入出力特性をもつ**零次ホールド回路**である(図 4.5)。図から明らかのように零次ホールド回路の入出力はそれぞれラプラス変換して考えると、

$$\left. \begin{aligned} M^*(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} m(nT)e^{-sTn} \\ C(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} m(nT) \frac{e^{-nTn} - e^{-(n+1)Tn}}{s} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

であるから、零次ホールド回路の伝達関数 $G_0(s)$ は

$$G_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (4.8)$$

となりその周波数特性 $G_0(j\omega)$ は図 4.5(c) となる。サンプラー出力に含まれる高調波成分を抑制する特性を持っていることは図から容易に読みとれるであろう。

このほかに、サンプル間隔での値を前 2 回のサンプル結果から外挿する 1 次

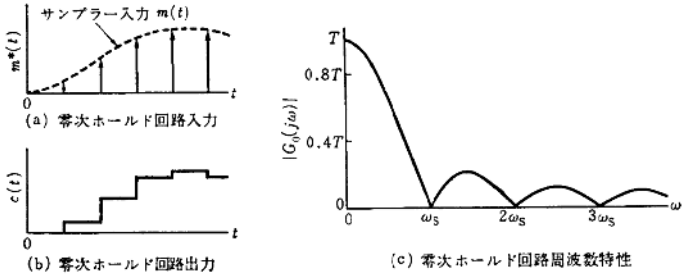


図 4.5 零次ホールド回路

ホールド回路等、既に与えられた信号を多数用いてサンプル間隔での値を正確に外挿しようとする方式がいろいろ考えられ、それらによれば高調波の遮断特性は向上するが、反面回路は複雑化する。このため実用上ほとんどの場合に零次ホールド回路が採用されている。

サンプル値系と連続系 以上から明らかなようにサンプル値制御系は普通の連続系の一部にサンプラーとホールド回路を含んだブロック線図で表わすことができる。図 4.1 の水門開閉の遠隔制御の場合に各部要素の伝達関数を考えてみると、図 4.6 のごとくなる。サンプラーを除いては連続系と全く同じであるが、問題はサンプラー出力が $c(nT)$ という形でサンプル時点での出力信号しか与えない点にある。むろんサンプラーを(4.6)で表わされるような級数形の伝達関数であるとして連続系と同じに扱うことも考えられるが、数学的取扱いは著しく複雑になる。そこでサンプラーの特性がもっと閉じた形で記述されるようにつぎに述べる z 変換法が導入され、これによって解析を行なうのが便

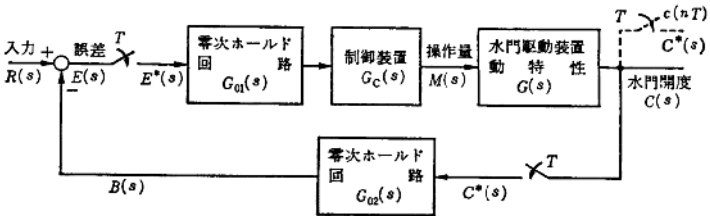


図 4.6 サンプル値系としての水門開閉遠隔制御装置

利になる。そしてこれによれば、表現の上のみにおいてはすべての要素が線形性を満足し複素変数 s の関数として表わせることから明らかに、サンプラー・ホールド回路など新しい要素を含み解析の手段に多少の変化があっても、サンプル値制御系に関する理論は本質的には第3章で述べた連続系の場合と変わらないのである。

4.3 z 変換

前節に述べたように線形サンプル値制御系の特性を理解し、与えられた性能を満足する制御系を構成するには、連続系の場合と同じように周波数領域で考察しようとする。サンプラー出力信号が級数形ではなく閉じた形の周波数特性として表わされることが必要になる。

z 変換の定義 ここで再びサンプラー出力信号のラプラス変換を求める複素積分

$$F^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \quad (4.4)$$

にたちもどって考えてみると、 $F^*(s)$ が級数形になったのは、 $1/(1 - e^{-T(s-p)})$ の無限個存在する極を囲む積分路のためである。

$F(s)$ の分母の s についての次数が分子より高いことを考え合わせると、周回積分路を図4.7のように左半平面にとることもできる。この場合 $F(s)$ の極のみが積分路に囲まれるから、(4.4)は $F(s)$ の極 p_i ($i=1, 2, \dots, q$) について

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \frac{1}{2\pi j} \oint F(p) \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \\ &= \sum_{i=1}^q \left\{ (F(p) \text{ の極 } p_i \text{ での留数}) \times \frac{1}{1 - e^{-T(s-p_i)}} \right\} \quad (4.9) \end{aligned}$$

とも表わせる。(4.9)において $F(s)$ の極の数は有限であり、 $F^*(s)$ は e^{-Ts} の有理関数となることが明らかである。ここで便宜上 e^{Ts} を z とおけば、(4.9)は z の有理関数として、一般に

$$F^*(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

の形式に書くことができ、ラプラス変換の場合とよく類似した形になる。

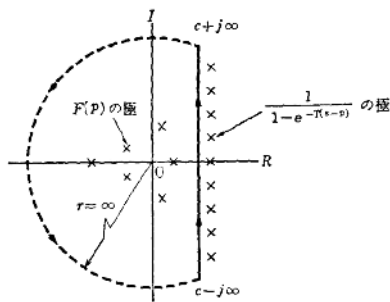


図 4.7 左半平面の積分路

この(4.9)で定義される $F^*(s)$ を $F^*(z)$ と書いて、 $f(t)$ または $F(s)$ の z 変換という。 z 変換は、 $Z[f(t)]$, $Z[F(s)]$ とも表わす。

この定義により $F^*(z)$ はまたサンプル時点での $f(t)$ の値により(4.1)から直接に

$$F^*(z) = Z\left[\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTs}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} \quad (4.10)$$

としても導ける。

しかし、いずれにせよ z 変換はあくまでも信号のサンプル出力のラプラス変換を有理関数形に表わすための記号として z を導入したものであって、本質はラプラス変換と変わらないのである。ただ $F(s)$ からそのサンプル出力の z 変換を求めるには(4.9)を用い、時間関数から求める場合に(4.10)を用いるのが便利なのである。ここで注意してほしいことは z 変換 $F^*(z)$ に対応するものはいずれの場合も $F^*(s)$ および $f^*(t)$ すなわち $f(nT)$ であって、サンプラーの存在を除いては z 変換は考慮できないという点である。

例 一例として指数関数

$$f(t) = e^{-at} \quad (4.11)$$

をサンプルした信号の z 変換を求めてみよう。(4.11)をラプラス変換して

$$F(s) = \frac{1}{s+a} \quad (4.12)$$

を得るから、これを(4.9)の定義式に代入すると

$$F^*(z) = \left[(F(p) \text{ の極 } p = -a \text{ での留数}) \times \frac{1}{1 - e^{-T(a+a)}} \right]_{z=e^{aT}} \quad (4.13)$$

である。留数は1であるから、 $z = e^{aT}$ を用いて右辺を整理すると、

$$F^*(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}e^{-aT}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (4.14)$$

を得る。一方(4.11)から

$$f(nT) = e^{-anT}$$

であるから、(4.10)の定義式に従えば

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-aT} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \quad (4.15)$$

が求められて、(4.14)と一致する。

逆 z 変換 $F^*(z)$ が与えられた場合、 z 変換も本質的にラプラス変換と変わらない以上、ラプラス逆変換と同様の複素積分によりこれを逆変換して時間関数のサンプル値 $f(nT)$ を求めることができるが[†]、実用上あまりに複雑であるので省略して、ここでは $F^*(z)$ から簡単に $f(nT)$ を数値計算する方法のみを示しておく。

すなわち、もし $F^*(z)$ が z^{-1} のべき級数に展開されて

$$F^*(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots + f_n z^{-n} + \dots \quad (4.16)$$

と書けるときには、(4.10)から逆に

$$f(nT) = f_n \quad (4.17)$$

として、時間関数 $f(nT)$ が求められる。一般の関数 $F^*(z)$ は、複素関数の展開法に従って展開されるが、通常の場合のように z の有理関数となっている時には、代数的な割算を繰り返し実行することにより容易に(4.16)を導けることは明らかであろう。

また(4.16)に関連して z 変換の変時定理を述べておこう。(4.16)の両辺に

[†] 複素関数論の知識を用いると、 $F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}$ に対し、 $F^*(z)$ の特異点をすべて囲む積分路 Γ についてのコーシーの積分表示

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} F^*(z) z^n dz$$

が与えられることがわかる。詳しくは前述の E. I. Jury の文献(本講 p. 110)参照。

z^{-1} を掛けて、左辺を $F_1^*(z)$ と書くと

$$F_1^*(z) = z^{-1}F^*(z)$$

に対応する時間関数 $f_1(nT)$ は(4.17)と同様にして

$$\left. \begin{aligned} f_1(nT) &= f_{n-1} \\ f_1(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

と定義される。(4.18)と(4.17)とを比較すれば明らかなように、 $f_1(nT)$ は元の信号 $f(nT)$ を1サンプル間隔だけ遅らせたものとなっている。一般化すると、信号 $f^*(t)$ を m サンプル間隔だけ遅らせた信号 $f_m^*(t)$ の z 変換 $F_m^*(z)$ はもとの信号の z 変換 $F^*(z)$ より

$$F_m^*(z) = z^{-m}F^*(z) \quad (4.19)$$

で与えられるのである。

制御系の問題に関連してよく用いられるような $F(s)$ の z 変換は表として付録IIに与えてあるので z 変換、逆変換ともこれを使用するのが便利である。また z 変換にもラプラス変換との関係から同様の初期値定理などの諸定理が成立するが、これらもまとめて付録IIに示した。

4.4 パルス伝達関数

さて上に述べたような z 変換法によりサンプル信号の特性は z についての有理関数形として表わせるようになった。これをどのようにして線形サンプル値系の解析におしすすめたらよいであろうか。

サンプル値系の応答 まず図4.8に示すような最も簡単な開ループ系を考えてみる。周波数領域で考えて、入力 $R(s)$ および対象系の特性 $G(s)$ が与えられていると仮定すれば、出力 $C(s)$ はサンプラーを考慮して、

$$C(s) = G(s)R^*(s) \quad (4.20)$$

から、(4.9)で求められる $R^*(s)$ について与えられるが、既に述べたことから明らかなように $C(s)$ は s の有理関数以外に e^{Ts} の項を含み、したがってこれを逆変換して時間関数 $c(t)$ を求めるのは非常に困難である。たとえば $G(s)$ が第3章で詳しく説明した2次振動系の場合に、入力を単位ステップ入力とすると、付録IIから

$$R^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \quad (4.21)$$

であるから、 $C(s)$ は

$$C(s) = \frac{\omega_0^2 e^{Ts}}{(e^{Ts} - 1)(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)} \quad (4.22)$$

となる。 $(e^{Ts} - 1)$ の項により $C(s)$ は無数の極を有するから普通にラプラス逆変換によって出力の時間関数 $c(t)$ を求めるのが極めて難しいことが理解されよう。

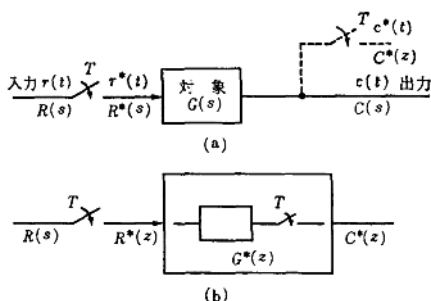


図4.8 開ループ・サンプル値系

ここでサンプル時点での出力 $c(nT)$ のみに着目して、出力を仮想的なサンプラーを通して、観測することにする。この仮想サンプラーの導入により、周波数領域において(4.22)で定義される $C(s)$ の z 変換 $C^*(z)$ を考えることができて、これが求められれば z^{-1} について展開し、 $c(nT)$ が得られる。

そこでサンプル時点での出力 $C^*(z)$ を入力 $R(s)$ 、系の特性 $G(s)$ から求めるためにもう少し詳しく調べてみよう。図4.8(a)の入力のサンプル出力 $R^*(s)$ を(4.3)と同様にインパルス列に分解して考える。まず最初のサンプル出力はインパルス関数により $r(0)\delta(t)$ と表わせるから、これに対する対象 $G(s)$ の応答を $c_0(t)$ とすると、そのラプラス変換 $C_0(s)$ は

$$C_0(s) = r(0)G(s) \quad (4.23)$$

として与えられる。 $r(0)$ は一つの係数と考えられるので、 $c_0(t)$ をサンプラーを通して観測した $c_0^*(t)$ の z 変換をとると、