

数值逼近

蒋尔雄 赵风光 编著

计算数学丛书

复旦大学出版社



0241

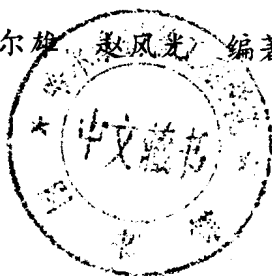
544

433733

计算数学丛书

数值逼近

蒋尔雄 赵凤光 编著



复旦大学出版社



责任编辑 范仁梅

责任校对 马金宝

数值逼近

蒋尔雄 赵风光 编著

出 版 复旦大学出版社

(上海国权路 579 号 邮政编码 200433)

发 行 新华书店上海发行所

照 排 南京理工大学激光照排公司

印 刷 复旦大学印刷厂

开 本 850×1168 1/32

印 张 8.75

字 数 256.000

版 次 1996 年 7 月第 1 版 1996 年 7 月第 1 次印刷

印 数 1-4,000

书 号 ISBN 7-309-01682-3/O · 166

定 价 12.00 元

内 容 提 要

本书是大学计算数学专业数值逼近课程的教材,主要讲述了数值逼近的理论和各种数值逼近方法.全书内容包括:函数的插值、样条插值和曲线拟合、最佳逼近、数值积分、快速傅立叶变换、函数方程求根等.

本书的基础是数学分析与高等代数,学过高等数学的读者都可看懂,因而也可作为综合性大学理科和工科院校的有关专业的教学参考书.

D468/21

前 言

1977年10月在上海召开的教材会议上,决定把计算数学专业的基础课**计算方法**分解成三部分,其中第一部分就是**数值逼近**,从那以后,复旦大学每年都开设**数值逼近**课,我自己也教过这门课,有两点体会. 第一点:在听课的几十名学生中,不会有很多,也不必要有很多以后去从事数值逼近的研究,因此没有必要讲得太专门,太专门的东西在自己需要时再学也不迟. 第二点:数值逼近的内容很多,很多理论的产生都有它的客观需要,或是实际问题的需要或是理论本身的需要,在向学生介绍这些内容时,应尽量使学生知道问题是怎样提出来的,有问题才能引起学生的思考,然后再引导学生探讨这些问题是如何解决的. 这样不但能促进学生学习好这些内容,而且还能促进学生学习如何提出问题和解决问题,有利于培养学生的能力. 这两点体会反映在我们这次编写的**数值逼近**教材中.

计算数学专业的**数值逼近**课,常安排在二年级下学期或三年级上学期,学生尚未学过**泛函分析**,因此本书以学生仅有**数学分析**和**高等代数的基础**编写的,有**高等数学**基础的学生也能学好.

本书介绍了很多算法,但没有将它们**的算法语言**写在书中,这是因为市场上已有很多**算法手册**,一般**算法的算法语言**都能找到. 对每种**算法的算法语言**,在明白了其**算法思想**后大都容易看懂的. 但是书中有些习题还是希望读者用计算机算一下,以获得有关**算法的感性认识**.

国内外**数值逼近**教材或介绍数值逼近内容的教材,已看到不少,各有各的特点和创新之处. 本书的特点,除上述介绍外,还有些自己的东西. 譬如:第一章中浮点数四则运算的基本定理(本书第一章定理5),看似简单,很多书都有介绍,但没有分析清楚,本书给出了严格证明. 第二章中的**重节点差商**,很多书也都提到,但常常不够系统化,没有指出

可以用重节点差商表来直接构造复杂的埃米特插值多项式.再有第五章中对于振荡函数的积分,本书给出一个有效的三角梯形公式等等.

本书共7章,每周4学时,一个学期可以教完,在正式出版前我们已试教过.其中第一、二、三章和第七章由蒋尔雄编写,第四、五、六章由赵风光编写,蒋尔雄作了适当修改和补充.

蒋 尔 雄

1995年2月20日于复旦

目 录

前 言	1
第一章 绪论	1
§ 1 什么是数值分析	1
§ 2 误差和有效数字	4
§ 2.1 绝对误差与相对误差	4
§ 2.2 有效数字与可靠数字	5
§ 2.3 误差的来源	8
§ 3 数制与浮点运算	13
§ 3.1 数制	13
§ 3.2 浮点数	17
§ 3.3 浮点数的四则运算	19
习题	27
第二章 函数的插值	29
§ 1 多项式插值	29
§ 1.1 拉格朗日途径	32
§ 1.2 内维尔途径	33
§ 1.3 牛顿途径	34
§ 2 等距节点插值和差分	43
§ 3 重节点差商与埃米特插值	49
§ 4 非多项式插值	62
习题	65
第三章 样条插值和曲线拟合	69
§ 1 多项式插值的龙格现象	69
§ 2 样条插值	76

§ 3 贝齐尔曲线·····	93
习题·····	102
第四章 最佳逼近 ·····	105
§ 1 $C_{[a,b]}$ 上的最佳一致逼近 ·····	105
§ 1.1 $C_{[a,b]}$ 上最佳一致逼近的特征 ·····	107
§ 1.2 契比雪夫多项式·····	113
§ 1.3 里米兹算法·····	116
§ 2 $C_{2\pi}$ 上的最佳一致逼近 ·····	119
§ 2.1 $C_{2\pi}$ 上最佳一致逼近的特征 ·····	120
§ 2.2 杰克生定理·····	123
§ 3 最佳平方逼近 ·····	128
§ 3.1 内积空间上的最佳平方逼近·····	129
§ 3.2 $L^2_\rho[a,b]$ 中的最佳平方逼近 ·····	132
§ 3.3 最小二乘法·····	138
§ 4 $L^2_\rho[a,b]$ 上的正交多项式·····	141
§ 4.1 正交多项式的性质·····	142
§ 4.2 常用的正交多项式·····	144
习题·····	146
第五章 数值积分 ·····	148
§ 1 牛顿-柯特斯公式·····	149
§ 1.1 牛顿-柯特斯公式的推导 ·····	150
§ 1.2 牛顿-柯特斯公式的误差分析 ·····	152
§ 1.3 牛顿-柯特斯公式的数值稳定性 ·····	156
§ 2 提高求积公式精度的方法 ·····	157
§ 2.1 复化公式·····	157
§ 2.2 复化梯形公式的渐近展开·····	160
§ 2.3 龙贝格算法·····	162
§ 3 非等距节点的求积公式 ·····	165
§ 3.1 一致系数公式·····	166
§ 3.2 高斯型求积公式·····	168

§ 3.3	高斯型求积公式的具体构造	171
§ 4	特殊积分的处理技术	178
§ 4.1	振荡函数的积分	179
§ 4.2	奇异积分	181
§ 5	多重积分	185
§ 5.1	插值型求积公式	186
§ 5.2	待定系数法	187
§ 5.3	分离变量法	189
§ 5.4	重积分的复化公式	191
习题		193
第六章	快速傅立叶变换	196
§ 1	傅立叶分析	197
§ 1.1	傅立叶级数	197
§ 1.2	傅立叶变换	200
§ 2	离散傅立叶变换	203
§ 2.1	三角插值	203
§ 2.2	傅立叶积分的离散化	205
§ 2.3	离散傅立叶变换	207
§ 3	快速傅立叶变换	209
§ 3.1	FFT 的直观发展	210
§ 3.2	以 2 为底的 FFT 算法	212
§ 3.3	FFT 的数据结构	214
§ 3.4	任意因子的 FFT 算法	215
§ 4	FFT 在卷积中的应用	218
§ 4.1	卷积	219
§ 4.2	离散卷积	221
§ 4.3	离散卷积的计算	222
计算实习		223
习题		224
第七章	函数方程求根	227

§ 1	二分法与反插值法	229
§ 1.1	二分法	229
§ 1.2	反插值法	232
§ 2	迭代法	233
§ 3	牛顿法	238
§ 4	简化牛顿法及弦割法	254
§ 4.1	简化牛顿法	254
§ 4.2	弦割法	258
§ 5	实多项式求复根的林士谔-贝尔斯多夫方法	261
习题		265

第一章 绪 论

§ 1 什么是数值分析

数值分析(Numerical Analysis)是对各种数学问题通过数值运算,得到数值解答的方法和理论.因为研究的是数学问题,所用的方法是数学方法,因此也称为数值数学(Numerical Mathematics).数值分析是总称,对一个数学问题通过数值运算得到数值解答的方法,称为数值方法(Numerical Method),如果这数值方法可以在计算机上实现,就称为数值算法(Numerical Algorithm).

数值逼近,即为各种逼近问题的数值分析,包括插值样条、最佳一致逼近、最佳平方逼近、数值积分等的内容.

要对一个数学问题求数值解答,除了在数学上对问题进行预处理以外,最后都要化成各种数据的一系列 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 的四则运算,由此获得数值结果.一个数在十进制表示下,可以是有限位的,也可以是无限位的.譬如:边长为1的正方形,它的对角线长是

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots,$$

这是一个无限位的数. $\pi=3.1415926\cdots$,也是一个无限位数.数值运算的一个特点就是:参与运算的数必须是有限位的,而且位数往往是预先规定的,譬如规定为8位、10位等等,如果运算的数是无限位的或超过规定,那么要用“四舍五入”规则或“截断”规则,将它们处理成规定的位数.对于运算结果也要处理成规定的位数.

所谓“四舍五入”规则就是:将超过规定位数的部分按下述原则去掉.

(1) 如果舍弃的部分小于保留数的最后一位单位的 $\frac{1}{2}$,那么保留

的数不变. 例如

$$\pi = 3.1415926\cdots,$$

如果取两位小数, 那么保留数的最后一位单位是 10^{-2} , 舍弃部分是 $0.15926\cdots \times 10^{-2}$, 小于 $\frac{1}{2}10^{-2}$, 因此取为 3.14.

(2) 如果舍弃的部分大于所保留数的最后一位单位的 $1/2$, 那么将保留数最后一位数字加 1. 例如限制 π 取 4 位小数, 最后一位单位为 10^{-4} , 但去掉的部分是 $0.926\cdots \times 10^{-4}$, 大于 $\frac{1}{2}10^{-4}$, 因此取成 3.1416.

(3) 如果舍弃的部分恰等于所保留数的最后一位单位的 $1/2$, 此时如果保留的数最后一位是奇数, 那么加 1 成偶数; 如果保留的数最后一位是偶数, 则就不动了. 例如取两位小数, 0.675 成 0.68, 而 0.605 成 0.60.

大多数计算机是采用“四舍五入”规则处理舍弃的位数的, 但也有的计算机是采用“截断”规则的.

所谓“截断”规则就是: 将超过规定位数的部分无条件地去掉. 这样 π 取 4 位小数, 就为 3.1415.

考虑 $\sqrt{2}$ 与 π 相乘作数值运算, 取 5 位数字进行运算, 按“四舍五入”规则 $\sqrt{2}$ 成为 1.4142, 而 π 成为 3.1416, $1.4142 \times 3.1416 = 4.44285072$ 是 9 位数字, 如果结果也限制为 5 位数字, 也按“四舍五入”规则, 则要处理成 4.4429, 它就是 $\sqrt{2}\pi$ 数值计算的结果. 这样做当然会失真, 但是却也非常接近. 实际上 $\sqrt{2}\pi = 4.442882938\cdots$ 跟 4.4429 是非常接近的. 数值分析的特点就是又失真, 又接近. 不失真是不可能的, 我们追求的目标是少失真、多接近, 当然是在一定代价意义下.

因为有限位运算会带来失真、因此原来数学上的一些性质、结论, 在有限位运算下, 就会有修正, 下面看些例子.

例 1 数学上知道, $f(x)$ 可导时, 有 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$, 也即当 h 为充分小正数时, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 很接近 $f'(x)$. 现在考察

$f(x)=e^x$, 取 $x=1$ 的情况, 则自然成立

$$f'(1)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}=e=2.71828\cdots.$$

可以证明: $g(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 是 h 的单调上升函数, 也即 h 越小, $g(h)$ 越接近 e . 可是取 9 位数字在计算机上计算的结果是: 当 $h=10^{-5}$ 时较好, 当 h 更小时, 越来越差, 见表 1.

表 1

h	$g(h)$	e	误 差
10^0	4.67077446	2.71828175	1.95×10^0
10^{-1}	2.85884380	2.71828175	1.41×10^{-1}
10^{-2}	2.73191929	2.71828175	1.36×10^{-2}
10^{-3}	2.71987939	2.71828175	1.60×10^{-3}
10^{-4}	2.72035623	2.71828175	2.07×10^{-3}
10^{-5}	2.71797204	2.71828175	3.10×10^{-4}
10^{-6}	2.62260461	2.71828175	9.57×10^{-2}
10^{-7}	4.76837206	2.71828175	2.05×10^0
10^{-8}	0.00000000	2.71828175	2.72×10^0

例 2 考察下面三个式子

$$A=\frac{1-\cos x}{x^2}, \quad B=\frac{[\sin x/x]^2}{1+\cos x}, \quad C=2\left[\frac{\sin(x/2)}{x}\right]^2.$$

数学上容易验证, 它们是恒等的, 也即对不同的 x 都相同. 但在数值运算下就不完全相同, 譬如 A, B, C 各取 6 位小数, 其运算结果见表 2.

表 2

x	A	B	C
0.20000	0.498336	0.498336	0.498336
0.02000	0.4999 <u>71</u>	0.499983	0.499983
0.00200	0.50 <u>1052</u>	0.500000	0.500000
0.00020	0.5 <u>58794</u>	0.500000	0.500000
0.00002	0.000000	0.500000	0.500000
3.14159	0.177326	0.177326	0.177326
3.16159	0.200067	0.20006 <u>4</u>	0.200067
3.14359	0.202384	0.201 <u>900</u>	0.202384
3.14179	0.202617	0. <u>181301</u>	0.202617

表中数字下划线的表示不正确的. 可以看出对恒等式子, 计算效果是不一样的. 由此可以想到, 对于一个数学问题可能有很多种数值方法, 但是采用各种数值方法的效果可能不完全一样. 对于一个数学问题, 追求好的数值方法, 也是数值分析的基本任务.

§ 2 误差和有效数字

§ 2.1 绝对误差与相对误差

在有限位运算下, 理想的正确数值是比较少的, 参与运算的往往是正确值的近似值. 例如

$$A = \sqrt{3} = 1.732050807568877293527\cdots$$

是一个无限位的数. 取成 5 位小数的近似值为 $A^* = 1.73205$, 取成 4 位小数的近似值为 $A^* = 1.7321$. 这里采用了“四舍五入”规则.

每个正确值 A 跟近似值 A^* 之间总有关系

$$A = A^* + \eta. \quad (1)$$

例如上面的 $\sqrt{3}$, 对 5 位小数的近似值 A^* , 它的 $\eta = 0.0000008075\cdots$; 而对 4 位小数的近似值 A^* , 它的 $\eta = -0.0000491924\cdots$.

定义 1 (1)式中的 η 称为 A 取近似值 A^* 时的绝对误差, 简称误差.

绝对误差的正确值, 常常是无限位的, 我们没有必要追求它的正确值. 对实际有用的是知道它的绝对值的上界, 这个上界称为绝对误差限, 或称为误差限. 实用上为了方便, 只要不混淆, 常把它说成“绝对误差”.

例如: 对 $\sqrt{3}$ 的 5 位小数近似值, 有

$$|\eta| \leq 8.1 \times 10^{-7},$$

绝对误差限即为 8.1×10^{-7} . 而对 4 位小数近似值, 有 $|\eta| \leq 5 \times 10^{-5}$, 它的绝对误差限即为 5×10^{-5} .

容易知道, 如果 A 的近似值 A^* 是由 A 按“四舍五入”规则得来的, 那么必有

$$|A - A^*| \leq \frac{1}{2} \alpha,$$

这里 α 是 A^* 最后一位的单位.

定义 2 一个数通过“四舍五入”或“截断”产生的近似数与它本身的误差称为舍入误差.

上面提到的 $\eta = 0.0000008075\cdots$, 和 $\eta = -0.0000491924\cdots$ 就是舍入误差.

衡量一个近似值的精确程度, 光有绝对误差是不够的. 譬如测量一段路程, 其长为 1000 公里, 知道有误差 20 公尺; 另外测量一条 400 公尺的跑道, 也有 20 公尺误差. 显然后者的精度差多了. 这时用相对误差的概念, 就清楚了.

定义 3 在(1)式中, 记

$$r = \eta / A,$$

称为相对误差. 如果 R 满足 $|r| \leq R$, 则称 R 为相对误差限.

由此知道测量 1000 公里的路程有 20 公尺误差, 它的相对误差为 $20/10^6 = 2 \times 10^{-5}$, 而测量 400 公尺的跑道有 20 公尺的误差, 它的相对误差为 $20/400 = 5\%$, 可见比前者大多了.

在数值计算中, 正确值常常不知道, 而常将相对误差改成

$$r = \eta / A^*.$$

这是因为

$$\begin{aligned} \eta / A &= \eta / (A^* + \eta) = \frac{\eta}{A^*} \left(1 - \frac{\eta}{A^*} + \left(\frac{\eta}{A^*} \right)^2 + \cdots \right) \\ &= \frac{\eta}{A^*} - \left(\frac{\eta}{A^*} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{A^*} \right)^3 - \cdots \end{aligned}$$

因此当 η / A^* 较小时, 两者差别很小.

§ 2.2 有效数字与可靠数字

$$A = \sqrt{3} = 1.7320508075\cdots$$

取近似值为 1.73, 我们说它有 3 位有效数字, 取近似值为 1.732, 它有 4 位有效数字, 1.7320 也只有 4 位有效数字, 则 1.7321 则有 5 位有效

数字.

定义 4 一个近似值,在 10 进制数字表示中,其误差小于某位单位的一半,这位数字就称为有效数字. 用数学语言来说,即若 A 的近似值

$$A^* = \pm (x_1 10^{-1} + x_2 10^{-2} + \cdots + x_k 10^{-k} + \cdots + x_n 10^{-n}) \times 10^m, \quad (2)$$

其中 m 是整数, k 是不超过 n 的正整数, $x_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 是 0 到 9 中的某一整数, 并且 $x_1 \neq 0$, 这样 x_k 这一位的单位即为 10^{m-k} , 于是如果

$$|A - A^*| \leq \frac{1}{2} 10^{m-k},$$

则称 x_k 为有效数字. 显然, 如果 x_k 是有效数字, 那么 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ 都是有效数字. 如果 A^* 的每一位都是有效数字, 那么 A^* 称为有效数.

从定义可知, 若 A^* 是从 A 经“四舍五入”而来的, 那它定是有效数.

有效数字与相对误差之间有密切关系, 有下述定理.

定理 1 A 的近似值 A^* 表示成(2)式, 如果已知 x_k 是有效数字, 那么相对误差限不超过 $\frac{1}{2} 10^{-(k-1)}$, 反之如果已知相对误差 r , 且有 $|r| \leq \frac{1}{2} 10^{-k}$, 那么 x_k 必为有效数字.

证明 因为 x_k 是有效数字, 于是

$$|A - A^*| \leq \frac{1}{2} 10^{m-k},$$

而对相对误差 r , 有

$$|r| = \frac{|A - A^*|}{|A^*|} \leq \frac{1}{2} 10^{m-k} / |A^*|,$$

但 $|A^*| \geq x_1 \times 10^{-1} \times 10^m \geq 10^{m-1}$, 于是

$$|r| \leq \frac{1}{2} 10^{m-k} / 10^{m-1} = \frac{1}{2} 10^{-(k-1)}.$$

又若已知 $|r| \leq \frac{1}{2} 10^{-k}$, 那么

$$|A - A^*| \leq |r| |A^*| \leq \frac{1}{2} 10^{-k} |A^*|.$$

但 $|A^*| \leq 10 \times 10^{-1} \times 10^m = 10^m$,

故

$$|A - A^*| \leq \frac{1}{2} 10^{m-k},$$

于是 x_k 是有效数字.

定理 2 如果 A^* 最多只有 k 位有效数字, 即 x_k 是有效数字, 而 x_{k+1} 不是有效数字的必要条件是 A^* 的相对误差的绝对值必大于 $\frac{1}{2} 10^{-k-1}$, 充分条件是 A^* 的相对误差的绝对值大于 $\frac{1}{2} 10^{-k}$.

证明 先证必要条件. 因 x_{k+1} 不是有效数字, 所以

$$|A - A^*| \geq \frac{1}{2} 10^{m-k-1},$$

$$|r| = \frac{|A - A^*|}{|A^*|} \geq \frac{1}{2} \frac{10^{m-k-1}}{|A^*|} > \frac{1}{2} \frac{10^{m-k-1}}{10^m} = \frac{1}{2} 10^{-k-1}.$$

再证充分条件. 当 A^* 的相对误差 $|r| > \frac{1}{2} 10^{-k}$ 时, 如果 x_{k+1} 是有效数字, 则根据定理 1, 相对误差的绝对值不超过 $\frac{1}{2} 10^{-k}$, 于是有矛盾, 从而可知 x_{k+1} 不是有效数字.

推论 若 A^* 的相对误差的绝对值大于 $\frac{1}{2}$, 则就没有有效数字. 反过来, 若 A^* 没有有效数字, 则它的相对误差的绝对值必大于 0.05.

有效数字的概念, 是由“四舍五入”规则得出的, 而对应于“截断”规则, 有可靠数字的概念.

定义 5 在(2)式中, 如果

$$|A - A^*| \leq 10^{m-k},$$

则称 x_k 为可靠数字.

如果 A^* 是从 A 按“截断”规则而得到, 那么有

$$|A - A^*| \leq \alpha,$$

这里 α 是 A^* 的最后一位的单位.

可靠数字与相对误差之间也有密切的关系, 可以建立类似定理 1、定理 2 的定理. 我们将此作为练习题.