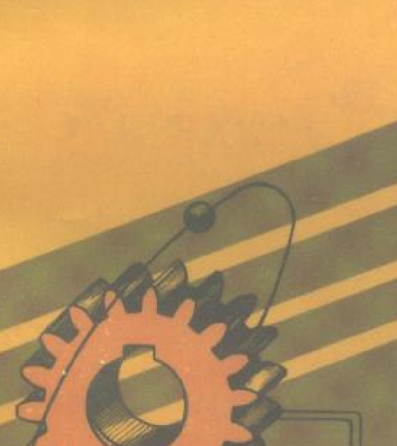
高等工程专科学校教材

工程数学丛书（二）

概率论与数理统计

罗学霞 编



电子科技大学出版社

高等工程专科学校教材

工程数学

概率论与数理统计

罗学霞　编

电子科技大学出版社

内容提要

本书分概率论和数理统计两大部分，写进了概率论最基础性的理论及各种分布和统计分析方法，例题和习题选用了各方面的应用实例，以满足大专应用型人才今后工作中这方面的需要，适合各类大专院校教学使用，也适合各行业的统计工作者进修自学和参考。

概率论与数理统计

罗学威 编

电子科技大学出版社出版

（成都建设北路二段四号） 邮编 610054

四川省仁寿县印刷厂印刷

四川省新华书店经销

*

开本 787×1092 1/32 印张 6.25 字数 150 千字

版次 1996 年 3 月第一版 印次 1996 年 3 月第一次印刷

印数 1—5000 册

ISBN 7-81043-452-7/O·40

定价 6.95 元

前　言

本教材是根据高等工程专科学校概率论与数理统计课程教学的基本要求编写而成的。

为了适应高等工程专科学校培养应用型人才的需要，避免大专工程数学教学选用本科教材时在学时、要求等方面难以衔接的困难，本教材在结构体系、内容安排、例题及习题选择等方面努力体现以下特色：

注重阐明基本概念，内容安排兼顾“应有尽有”和“自成体系”，以保证学科介绍的完整性；强调数学理论与实践的联系，便于教师授课与学生自学，也可供各行各业的统计工作者参考。

全书共分七章，其中概率论的教学参考时数为 36 学时，数理统计的教学参考时数为 16 学时。

本教材初稿经成都电子机械高等专科学校数学教研室及部分兄弟大专院校的同志使用几年，提出了许多有益建议，在此表示感谢。

衷心感谢国家教委数学与力学教学指导委员会委员、南京大学数学系佟文廷教授仔细审阅全书，并提出许多宝贵意见。

限于水平，书中难免会存在不足之处，敬请批评指正。

编者

1995 年 10 月

目　录

第一章　随机事件及其概率…… 1
§1.　随机试验、随机事件 …… 1
§2.　事件的关系和运算 …… 5
§3.　古典概型 …… 9
§4.　概率的统计定义…… 13
习题一 …… 17

第二章　概率的运算法则及模型 …… 20
§1.　概率的加法定理…… 20
§2.　条件概率、乘法公式…… 25
§3.　全概率公式与贝叶斯公式…… 32
§4.　贝努利概型…… 36
习题二 …… 40

第三章　随机变量及其分布 …… 42
§1.　随机变量和分布函数的概念…… 42
§2.　离散型随机变量…… 46
§3.　连续型随机变量…… 51
§4.　正态分布…… 57
§5.　随机变量函数的分布…… 63
§6.　数学期望…… 67
§7.　方差、矩…… 73

习题三 ………………………………………… 79

第四章　二维随机变量、极限定理 ……………………… 84
§1.　联合分布、二维离散型随机变量……………… 84
§2.　二维连续型随机变量……………………………… 90
§3.　二维随机变量函数的分布………………………… 96
§4.　大数定律、中心极限定理 ……………………… 102
习题四…………………………………………… 108

第五章　参数估计……………………………………… 111
§1.　数理统计中的基本概念 ………………………… 111
§2.　矩估计法和估计量的评价 ……………………… 118
§3.　极大似然估计法 ………………………………… 123
§4.　参数的区间估计 ………………………………… 127
习题五…………………………………………… 135

第六章　假设检验……………………………………… 137
§1.　假设检验的基本思想和方法 …………………… 137
§2.　U 检验 ………………………………………… 140
§3.　t 检验 ………………………………………… 144
§4.　χ^2检验和 F 检验 ……………………………… 149
习题六…………………………………………… 152

第七章　一元线性回归………………………………… 154
§1.　回归方程的概念 ………………………………… 154
§2.　最小二乘法 ……………………………………… 157

§3.　相关分析 …………………………………………… 162
§4.　预测和控制 ………………………………………… 167
习题七 ………………………………………………… 170

习题答案 ………………………………………………… 172
附　录 …………………………………………………… 182
表一　泊松分布表 ……………………………………… 182
表二　标准正态分布表 ………………………………… 185
表三　t 分布表 ………………………………………… 187
表四　χ^2分布表 …………………………………… 189
表五　F 分布表 ………………………………………… 191
表六　相关系数检验表 ………………………………… 193
参考书目 ………………………………………………… 194

第一章　随机事件及其概率

本章介绍概率论中的基本概念以及随机事件概率的定义．

§1　随机试验、随机事件

一、随机现象

在一定的条件下，可能出现也可能不出现，即使出现，其方式也不能完全确定的这一类现象被称为随机现象．

随机现象遍于自然界和人类社会之中，例如：

观察天空，乌云密布，这时可能下雨，也可能不下雨，即使下雨，降雨量也不能完全确定；

在同一公共汽车站，候车的人有时很多，有时又很少；

用同一门炮向同一目标射击，各次弹着点不尽相同，并且无论怎样控制射击条件，在一次射击之前是无法预测弹着点的确切位置的；

某地区在未来一段时间内，新生婴儿是男性多还是女性多？事前是不能得到确切的性别比例系数的；

在相同的条件下抛掷一枚硬币，其结果可能是徽花一面朝上，也可能是数字一面朝上．

从表面上看，随机现象具有不确定性和偶然性，但是，如果在相同的条件下对某一随机现象进行多次重复的观察，就会发现它也具有某种规律性．例如新生婴儿性别比例，就个别家庭及局部地区来看，很可能参差不齐，但作为整体来观察，会发现性别比例大致为 14：13，即男婴略多于女婴．抛掷硬币也是如此，如果重复地抛掷一枚钱币，并记下徽花与数字朝上的次数，我们会发现随着抛掷次数增加，各面朝上的次数大致是相等的．随机现象的这种规律性是通过大量重复观察被发现的，因此称为统计规律．

二、随机试验、随机事件

1. 随机试验

“随机试验”是一个用意很广泛的术语，它包括科学实验，以及对某一事物的某个特征进行的观察．

下面是一些随机试验的例子。

例 1 掷一枚骰子，观察出现的点数；

例 2 袋中有红球 5 个、白球 90 个，从中任取 10 个球，观察其中红球的个数；

例 3 从灯泡厂在某月份生产的一批灯泡中任取一只，测试其使用寿命；

例 4 用卡尺重复测量一零件内径 R 10 次，记录各次测量的结果；

例 5 从次品率为 p 的一批产品中，有放回地一件接一件地抽取 100 件产品，记录其中的次品件数．

分析以上各例，我们会发现随机试验具有下述特点：

(1) 试验可在同样的条件下重复进行；

(2) 试验的各种可能结果不止一个，并且能事先明确所有可能的结果；

(3) 试验前不能确定会出现哪种结果.

2. **随机事件**

在随机试验中可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**. 随机事件通常用 A、B、C…等大写字母表示.

在每次试验中必然发生的事件叫做**必然事件**，用字母 U 表示；必然不发生的事件叫做**不可能事件**，用字母 V 表示.

随机事件也常简称为**事件**.

若记：

A：掷骰出现点出在 4 到 6 之间；

B：出现 4 个红球；

C：灯泡使用寿命不到 1000 小时；

D：内径 R 在 998mm 与 1005mm 之间；

E：次品件数不超过 5.

则 A、B、C、D、E 分别是例 1 至例 5 各随机试验中的事件. 而事件"投骰点在 1 到 6 之间"与事件"出现 6 个红球"，则是例 1 的必然事件和例 2 的不可能事件.

三、基本事件、基本空间

1. **基本事件**

随机试验的每一可能结果，都称为一个**基本事件**.

基本事件是不能再进行分解的事件，由基本事件组成的事件称为**复合事件**.

在例 1 的试验中，若以 e_i 表示事件"掷骰出现 i 点"，$i=1, 2, 3, 4, 5, 6$，显然 e_i 是基本事件，而事件"点数不超

过 3"，则是由 e_1、e_2、e_3 组成的复合事件．

2. 基本空间

一个随机试验的全部基本事件组成的集合，叫做该试验的基本空间．

基本空间用字母 U 表示．

本节例 1 至例 5 的基本空间分别为：

$U_1=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$，

$U_2=\{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$

w_i：取出的 10 个球中有 i 个红球，

$i=0, 1, \cdots, 5.$

$U_3=\{t|t\geqslant 0\}$，

t：灯泡使用了 t 小时．

$U_4=\{R|900<R<1100\}$，

R：零件内径．

$U_5=\{d_0, d_1, \cdots, d_{100}\}$，

d_i：抽取的 100 个产品中有 i 个次品，

$i=0, 1, \cdots, 100.$

基本空间 U_1、U_2、U_5 所包含的基本事件个数是有限的，这样的空间称为有限基本空间．

最后，我们用以下两例来说明"基本事件不能再分解"这一特点，是确定基本空间的关键．

例 6 把一枚硬币先后抛掷两次，将依次所得的结果作为一个基本事件，记

$e_{00}=$"第一次出现正面，第二次也出现正面"；

$e_{01}=$"第一次出现正面，第二次出现反面"；

$e_{10}=$"第一次出现反面，第二次出现正面"；

$e_{11}=$ “第一次出现反面，第二次也出现反面”.

则该试验的基本空间为：

$$U_6=\{e_{00},\ e_{01},\ e_{10},\ e_{11}\}$$

例 7 把一枚硬币先后抛掷两次，将两次（不计次序）所得的结果作为一个基本事件，记

$e_0=$ “两次都出现正面”，

$e_1=$ “有一次出现正面”，

$e_2=$ “两次都出现反面”.

则该试验的基本空间为：

$$U_7=\{e_0;\ e_1,\ e_2\}.$$

§2 事件的关系和运算

在进行随机试验时，我们常常会发现同一随机试验中所出现的事件之间往往存在着某种关系，掌握这些关系，有助于我们对事件概率的研究和计算.

一、事件的关系和运算

1. 事件的包含和相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 含于事件 B，记作

$$B\supset A \qquad \text{或}\ A\subset B$$

图 1-1a 表示了事件 A、B 的包含关系.

如果事件 A、B 具有关系 $B\subset A$ 且 $B\supset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作

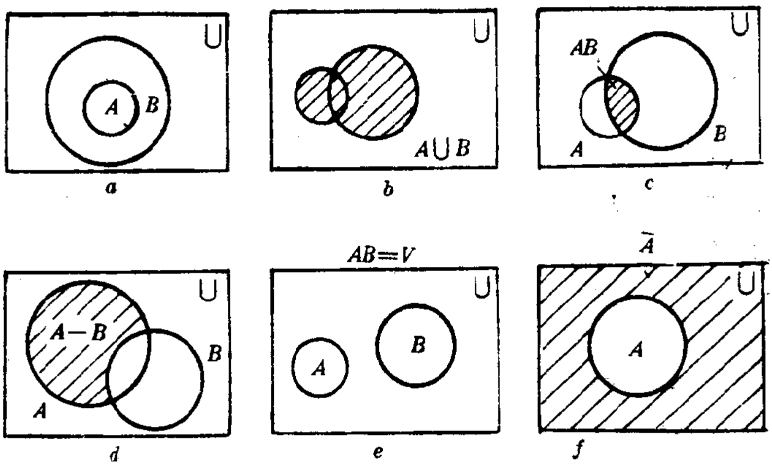


图 1-1

$$A = B.$$

2. **事件的和**

如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生，该事件称为事件 A 与 B 的和．记作

$$A \cup B, \qquad \text{见图 1-1}b.$$

例 1 袋中装有 10 个同规格的球，将它们分别标上 1 至 10 之间的号码，从袋中任取一球，记

$A=$ “取到的球号码小于 5”，

$B=$ “取到的球号码小于 10”，

$C=$ “取到的球号码在 2 到 5 之间”，

$D=$ “取到的球号码在 3 到 7 之间”．

因为号码小于 5 的球，其号码必然小于 10，所以事件 $A \subset B$.

记 $$C=\{2, 3, 4, 5\},$$
$$D=\{3, 4, 5, 6, 7\}.$$
于是
$$C\cup D=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

3. 事件的积

事件 A 与 B 同时发生，这一事件称为 A 与 B 的积，称作
$$A\cap B \quad 或 AB, \quad 见图 1\text{-}1c.$$

4. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与 B 的差，记作
$$A-B, \qquad 见图 1\text{-}1d.$$

例 2 事件 A、B、C、D 如例 1 所设，求事件 $A\cap B$，$C\cap D$，$C-D$.

解 $A\cap B=A$,

即 $A\cap B$ 表示事件“取到的球号码小于 5”.

$C\cap D=\{3, 4, 5\}$,

即 $C\cap D$=表示事件“取到的球号码在 3 到 5 之间”.
$$C-D=\{2\},$$
即 $C-D$ 表示事件“取到 2 号球”.

5. 事件的互斥

在同一试验中，如果事件 A 与 B 不能同时发生，即它们的积事件 $AB=V$，称事件 A 与 B **是互斥的**，或 A 与 B **是互不相容的**.

例如，若记事件 E 为“取的球号码大于 5”，则事件 E 与事件 C“取的球号码在 2 到 5 之间”是互斥事件.

当事件 A、B 互斥时，事件和 $A\cup B$ 在本书中记为 $A+B$.

互斥事件示意图见图 1-1e.

6. 事件的对立

如果事件 A 与 B 互斥，并且事件 A 与 B 的和事件为必然事件，也即事件 A、B 满足

$$A \cup B = U,$$

$$AB = V.$$

称事件 A 与 B 是相互对立的，或互逆的，称 B 是 A 的对立事件或逆事件，记为

$$B = \overline{A}.$$

同样地也有 $$A = \overline{B}.$$

例如在抛掷一枚硬币的随机试验中，事件"出现正面"与"出现反面"就是相互对立的事件．

图 1-1f 是对立事件的示意图．

例 3 事件 A_k 表示第 k 次取到合格品（$k=1,2,3$），试用符号表示下列事件：

（1）三次都取到合格品；

（2）三次中至少有一次取到合格品；

（3）三次中恰有两次取到合格品．

解

（1）三次都取到合格品：$A_1A_2A_3$.

（2）三次中至少有一次取到合格品：

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3.$$

（3）三次中恰有两次取到合格品

$$A_1A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3.$$

例 4 A_k 如例 3 所设，下列各式表示什么事件？

（1）$A \cup A_2$；　　（2）$\overline{A}_1\ \overline{A}_2 \cup \overline{A}_1\ \overline{A}_3 \cup \overline{A}_2\ \overline{A}_3$；

（3）$\overline{A}_2$　　（4）$A_3 - A_2$.

解

(1) $A_1 \cup A_2$：前两次至少有一次取到合格品；

(2) $\overline{A}_1\ \overline{A}_2 \cup \overline{A}_1\ \overline{A}_3 \cup \overline{A}_2\ \overline{A}_3$：三次中最多有一次取到合格品；

(3) $\overline{A}_2$：第二次未取到合格品；

(4) $A_3 - A_2$：第三次取到合格品而第二次未取到合格品.

二、事件的运算规律

事件的运算满足以下规律：

1. **交换律** $A \cup B = B \cup A$，
$AB = BA$；

2. **结合律** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，
$A(B\,C) = (A\,B)C$；

3. **分配律** $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$，
$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$；

4. **吸收律** $A \subset B$ 则 $A \cup B = B$ 且 $AB = A$；

5. **对偶律** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

以上运算规律可以通过集合的性质来证明.

§3 古典概型

随机事件 A 发生的可能性大小可以用一个数 p 来表示，数 p 称为事件 A 的概率，并记作 $P(A)$，即

$$P(A) = p$$

对于随机事件 A，如何从数量上来定义 $P(A)$ 呢？这里我们先介绍在概率论的发展史上占有重要地位的一类概率模型——古典概型.

一、古典概型

如果我们考察的随机试验具有以下特点：

(1) 试验的基本空间是有限空间；

(2) 基本空间里的任意两个基本事件不可能同时发生，并且每个基本事件发生的可能性是相同的.

这一类试验是概率论中最初研究的数学模型，称为古典概型.

例如，袋子里有 n 个同规格的球，依次编号为 1，…，n，从中任取一球，记 A_i 为取到 i 号球 ($i=1$，…，n)，显然，该试验只含有 n 个基本事件 A_1，A_2，…，A_n，且取到 i 号球与取到 j 号球这两件事不可能同时发生 ($i\neq j$)，这 n 个球中每一个球被取到的可能性都应当是相等的，所以这是一个古典概型问题.

二、古典概型的计算

设一个随机试验的基本空间 U 包含有 n 个基本事件，事件 A 所包含的基本事件个数为 r，则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{r}{n}.$$

即事件 A 的概率等于 A 中所含基本事件个数与基本事件总数之比．概率的这种定义称为概率的古典定义．容易理解，在等可能性的假定下，这种定义确实能客观地反映随机事件