工程运筹学

董加礼 等著

北京工业大学出版社

工 程 运 筹 学

董[illegible]礼　等编

北京工业大学出版社

本书是全国运筹学会根据新修订的教学大纲组织编写的大专教材。全书共分十章，包括线性规划、非线性规划、动态规划、图与网络、决策分析、排队论、多目标规划、矩阵对策、存贮论、计算机模拟等内容。本书具有自己的特色，内容适当，讲法新颖，概念清晰，论证严谨，可作为工科院校运筹学课程的教材，也可供工程技术人员参考。

工程运筹学

董加礼 等著

※

北京工业大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

707所印刷厂印刷

※

787×1092毫米 16开本 26.75印张 665千字

1988年6月第一版 1988年6月第一次印刷

印数：1～9500册

ISBN 7-5639-0001-2/O1.1

定价：4.46元

前 言

1986年6月，全国运筹学会教育与普及委员会在大连召开了全国非运筹专业运筹学课程第二次教学讨论会。会议决定：根据新修订的教学大纲，编写不同层次和类型的三本教材。为了搞好这项工作，会议推选邵济煦教授等五名同志组成非运筹专业教材编写联络组，负责教材编写的组织与联络工作。

这本《工程运筹学》就是在教材编写联络组的指导下，由多年从事运筹学教学的部分高等工科院校的教师为高等院校工科各专业的研究生或本科生编写的运筹学教材，同时也可作为其他专业，特别是工程技术人员的参考书。

全书共分十章：（一）线性规划（22＋4*学时）；（二）非线性规划（12学时）；（三）动态规划（10＋2*学时）；（四）图与网络（12学时）；（五）决策分析（6学时）；（六）排队论（10＋6*学时）；（七）多目标规划（6*学时）；（八）矩阵对策（6*学时）；（九）存贮论（6*学时）；（十）计算机模拟（10*学时）。基本内容可在72学时内完成，打“*”的内容需40学时。这里所说的基本内容是在通常意义上讲的，实际上不同专业对基本内容的要求一般是不一样的。好在本书各章基本上是独立的，因此使用本教材时，可根据各专业的不同要求和学时情况做适当地取舍，不但可以按章删减，就是同一章也可整节去掉。

参加本书编写的同志一致认为，作为一本教材，适用的层次应当分明，要有自己的特点和表达方法，这样才能在教学中起到积极作用。为此，编者们力图做到以下几点：

第一，在取材上，他们努力去体现工科各专业的特点和适用性。例如，与其他同类书相比，本教材增设了计算机模拟一章，因为它与工程技术密切相关，是解决实际问题的重要手段。又比如，在图与网络部分，添加了电网络与开关网络；在排队论部分，讲述了工程系统分析与军事系统分析等等。与此同时，在整个教材中，没有作过多的经济分析，以示区别于财经专业的教材。

第二，在讲法上，本教材十分注意科学上的正确性和严谨性，同时还尽量做到教学上的启发性和可接受性。为此，凡是概念的引入和定理的证明，都设法讲清来龙去脉，把问题分析透彻；对于方法和技巧，则全力去归纳和总结，使读者既能获得清晰、正确和完整的概念、理论和方法，又能起到举一反三触类旁通的作用。

第三，在表达方法上，他们强调简明和通俗。凡是能用几句话说清楚的问题，就不再反复啰嗦；相反，对那些难于理解的地方，则不惜笔墨使其通俗化。

第四，每章后面都附有习题，其数量与学时基本相当。为了使读者能独立地完成这些题目，书中没有给出答案。

当然，以上只是编者的一些设想和期望，能否真的做到，还有待于实践的检验和今后不断地修改。

最后说明一下这本教材的编写过程。参加本书编写的同志有：

董加礼（吉林工业大学，教授，第3、4、7、8章）；

孙福兴（西安冶金建筑学院，副教授，第1、5、9章）；

赵　玮（西北电讯工程学院，副教授，第6、10章）；

王子若（吉林工业大学，教授，第2章）；

戴天时（吉林工业大学，副教授，第2章）；

邹茂生（西安空军工程学院，副教授，第4、5章及其大部分图的绘制）；

沙聚植（哈尔滨工业大学，副教授，第3、9章）。

初稿完成后，于1986年12月，由教材编写联络组在西安召开了审稿会。会后，每个执笔人按照审稿会讨论的意见，先是自行修改，最后由董加礼同志对全书进行统校和定稿，孙福兴同志协助修改部分章节。整个工作是认真负责的。

尽管大家做了上述努力，但终因时间仓促，特别是水平所限，因此错误和疏漏之处恐仍难免，敬请使用本书的同志提出批评和指正。

非运筹专业教材编写联络组

1987年10月

目　录

第一章　线性规划

线性规划（Linear Programming，简称 LP）是运筹学的一个重要分支。它主要研究两类问题：一类是已有一定数量的人力、物力资源，研究如何充分并合理地使用这些资源，才能使所完成的任务量最大；另一类是已确定了一项任务，研究怎样合理安排，才能使完成此项任务所耗费的资源量最小。实际上，这两类问题是一个问题的两种不同提法，都是要求在耗费资源量最小的条件下，完成尽可能多的任务，获得最好的经济效益。

本章将讨论线性规划的基本概念，基本原理及基本解法。

§1　基本概念

一　线性规划的问题

从历史上看，线性规划问题是在本世纪三十年代末、四十年代初，由康托洛维奇（Конторович）和希奇柯克（Hitchcok）在研究铁路运输的组织问题、工业生产的管理问题时提出来的。

例 1　生产计划问题　假设某厂计划生产甲、乙两种产品，其主要材料有钢材 3600 公斤，铜材 2000 公斤，专用设备能力 3000 台时。材料与设备能力的消耗定额以及单位产品所获利润如表 1-1 所示。问如何安排生产，才能使该厂所获的利润最大。

表 1-1

单位产品消耗定额 产品 / 材料与设备	甲（件）	乙（件）	现有的材料与设备能力
钢　材　（公斤）	9	4	3600
铜　材　（公斤）	4	5	2000
设备能力　（台时）	3	10	3000
单位产品的利润（元）	70	120	

设甲、乙两种产品的计划生产量分别为 x_1 和 x_2（件），总的利润为 z（元），那么我们的任务就是：求变量 x_1、x_2 的值为多少时，才能使总利润

$$z = 70x_1 + 120x_2$$

最大，而 x_1、x_2 受下列限制：

1° 生产甲、乙两种产品所用钢材的总数不能超过现有的钢材数，即

$$9x_1 + 4x_2 \leqslant 3600$$

2° 生产甲、乙产品所用铜材的总数不能超过现有铜材数，即

$$4x_1+5x_2\leqslant 2000$$

3° 生产两种产品所用的设备能力的总数不能超过现有设备能力台时数，即

$$3x_1+10x_2\leqslant 3000$$

4° 甲、乙两种产品的计划生产量不能为负数，即

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0$$

于是，最优方案的确定，就转化为：求一组变量 x_1、x_2 的值，它们满足条件

$$9x_1+4x_2\leqslant 3600$$
$$4x_1+5x_2\leqslant 2000$$
$$3x_1+10x_2\leqslant 3000$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$

且使
$$z=70x_1+120x_2$$
取最大值。

由此可求得（见§3例13）上述问题的最优解为：$x_1=200$(件)，$x_2=240$(件)；最大利润为 $z=42800$(元)。

例 2 物资调运问题 设有三个地方 A_1、A_2、A_3 生产某种物资（简称 A_1、A_2、A_3 为**产地**），四个地方 B_1、B_2、B_3、B_4 需要该种物资（简称 B_1、B_2、B_3、B_4 为**销地**），产地的产量和销地的销量以及产地到销地的单位运价如表 1-2 所示。问如何组织物资的运输，才能在满足供需的条件下使总的运费最小。

表 1-2

单位运价(千元/万吨) 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产地的产量（万吨）
A_1	2	9	10	7	9
A_2	1	3	4	2	5
A_3	8	4	2	5	7
销地的销量（万吨）	3	8	4	6	21 / 21

本问题是一个总产量（9+5+7=21万吨）等于总销量（3+8+4+6=21万吨）的运输问题，通常称为**产销平衡运输问题**。

设 A_i 运到 B_j 的物资数量为 $x_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)$，总运费为 f，那么问题就转化为：求一组变量

$$x_{11}、x_{12}、x_{13}、x_{14}、x_{21}、x_{22}、x_{23}、x_{24}、x_{31}、x_{32}、x_{33}、x_{34}$$

的值，使总的运费

$$f=2x_{11}+9x_{12}+10x_{13}+7x_{14}+x_{21}+3x_{22}+4x_{23}+2x_{24}+8x_{31}+4x_{32}+2x_{33}+5x_{34}$$

为最小，且满足条件：

1° $A_i(i=1,2,3)$ 运到 B_1、B_2、B_3、B_4 的物资数量之和应等于 A_i 的产量，

即

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=9$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=5$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=7$$

2° $B_j(j=1,2,3,4)$ 收到 A_1、A_2、A_3 的物资数量之和应等于 B_j 的需要量，即

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=3$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=8$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=4$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=6$$

3° 在不允许有倒运的条件下，运量必须非负，即

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2,3;\ \ j=1,2,3,4)$$

可以求得（见§6）上述问题的最优解为：$x_{11}=3$（万吨），$x_{14}=6$（万吨），$x_{22}=5$（万吨），$x_{32}=3$（万吨），$x_{33}=4$（万吨），其余 $x_{ij}=0$（万吨）；最小的运费为 $f=83$（千元）。

例3 原料配比问题 设某厂从6种化工原料中混合配制某种工业材料，要求配制成的每份工业材料内含成份 A 不少于9单位/公斤，成份 B 不少于15单位/公斤。已知有关数据如表1-3所示。问应如何选配原料，才能既满足工业材料对成份 A、B 的质量要求，又使每份工业材料的配制成本最小？

表1-3

化工原料种类	成份含量（单位/公斤）		化工原料单价
	A	B	（元/公斤）
1	4	1	38
2	1	4	32
3	2	3	31
4	1	3	27
5	2	2	22
6	2	1	19
配成每份工业材料要求的成份含量	≥9	≥15	

设选配每种化工原料的数量顺次为 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6，总成本为 f，那么问题就转化为：求一组变量

$$x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6$$

的值，它们满足条件

$$4x_1+x_2+2x_3+x_4+2x_5+2x_6\geqslant 9$$
$$x_1+4x_2+3x_3+3x_4+2x_5+x_6\geqslant 15$$

$$x_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,6)$$

且使
$$f=38x_1+32x_2+31x_3+27x_4+22x_5+19x_6$$
取最小值。

可以求得（见§4例23）上述问题的最优解为：$x_2=2$（公斤），$x_5=\frac{7}{2}$（公斤），其他 $x_i=0$（公斤）；最小成本为 $f=141$（元）。

尽管上面三个问题的意义不同，但数学表达的形式却是相同的，它们都是求这样一组变量

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \tag{1-1}$$

的值，这些变量数值满足条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \gtreqless b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \gtreqless b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \gtreqless b_m \end{cases} \tag{1-2}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \tag{1-3}$$

且使
$$z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1-4}$$
取最大（或最小）值。

我们把上述问题称为**线性规划问题**，把要求的一组变量（1-1）称为线性规划的**变量**，把表达式（1-4）及限制条件（1-2）、（1-3）分别称为线性规划的**目标函数**及**约束条件**。由于约束条件是一些线性等式或线性不等式，目标函数是线性函数，因此，线性规划问题就是在线性等式或线性不等式的约束条件下，求线性目标函数取最大（或最小）值的问题。它属于条件极值问题。

同时，我们把线性规划中满足约束条件的变量的值称为线性规划的**可行解**，把所有可行解构成的集合称为**可行解集**（或**可行域**）；把使目标函数取最大（或最小）值的可行解称为线性规划的**最优解**。因此，求解线性规划就是从线性规划的可行解集中寻求使目标函数取最大（或最小）值的可行解。

为书写方便，习惯上把线性规划简记为

$$\max(\text{或} \min) z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$
$$\text{s.t}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \gtreqless b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \gtreqless b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \gtreqless b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-5}$$

其中 max、min 和 s.t 分别是 Maximize（使之达最大）、Minimize（使之达最小）和 Subject to（以…为条件）的缩写。

求解线性规划这样一类变量较多的条件极值问题，使用微分法是很困难的，甚至是不可能的。因此线性规划作为一门新的数学分支就逐渐形成起来。

二 两个变量的线性规划的图解法

为了寻求线性规划的解，我们先来研究只含两个变量的特殊线性规划的情况。

由于两个变量的线性等式或线性不等式在平面上表示一条直线或一个半平面，所以两个变量的线性规划可在平面直角坐标系上用图形方法来求解。举例说明如下。

例 4 求解例 1 的线性规划

$$\max\ z=70x_1+120x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases}9x_1+4x_2\leqslant 3600\\4x_1+5x_2\leqslant 2000\\3x_1+10x_2\leqslant 3000\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解 (1) 根据约束条件画出可行域

在平面直角坐标系 x_1ox_2 上，根据约束条件的三个不等式约束和两个非负约束，画出五个半平面，它们相交的区域是一个凸五边形 $OABCD$，如图 1-1 所示。显然这个凸五边形 $OABCD$ 所围成的区域就是所给的线性规划的可行域。

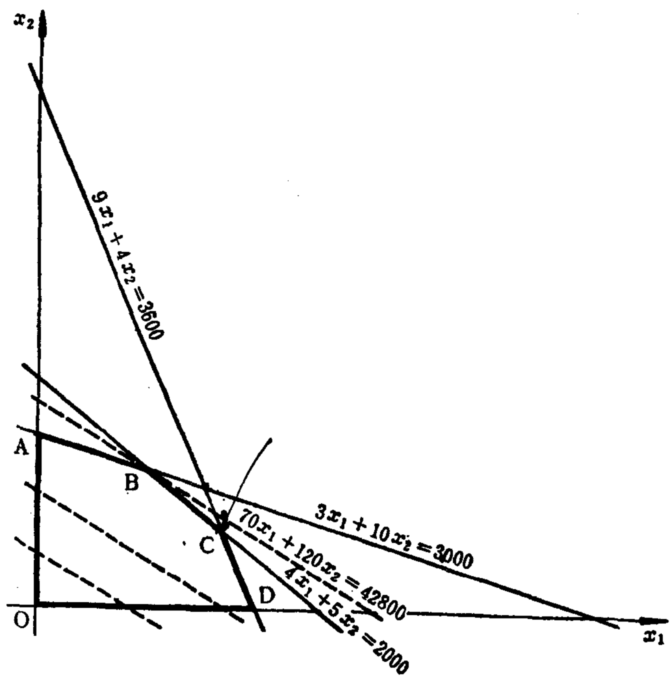

图1-1

(2) 根据目标函数求出最优解

由于最优解是使目标函数取最大值的可行解，所以求最优解就相当于在已画出的可行域上找出使目标函数 $z=70x_1+120x_2$ 取最大值的点。为此，把目标函数 $z=70x_1+120x_2$ 变形为

$$x_2=-\frac{70}{120}x_1+\frac{1}{120}z$$

这是 x_1ox_2 平面上斜率为 $-\frac{70}{120}$，在 x_2 轴上截距为 $\frac{z}{120}$ 的一族直线。取 $z=12000$，得一直线，其方程为

$$x_2=-\frac{70}{120}x_1+100$$

显然，该直线在 x_2 轴上的截距为 100，其上各点所对应的 z 值均为 12000。我们把线上各点均对应相同 z 值的直线称为**等值线**。再取 $z=24000$，得另一条平行的等值线

$$x_2=-\frac{70}{120}x_1+200$$

它在 x_2 轴上的截距为 200。由此可知，对应不同的 z 值，得到一族平行的等值线，等值线在 x_2 轴上的截距越大，目标函数 z 的值也越大。因此，只要沿目标函数 z 增大的方向平移等值线，就可找到目标函数 z 为最大的等值线与可行域的交点 B。该交点 B 的坐标

$$x_1=200,\quad x_2=240$$

就是所给线性规划的最优解，其相应的目标函数值为

$$z=70\times200+120\times240=42800$$

以上所述是解线性规划的**图解法**。

例 5 用图解法解线性规划

$$\max\ z=4x_1+5x_2$$

$$\text{s.t}\begin{cases}9x_1+4x_2\leqslant3600\\4x_1+5x_2\leqslant2000\\3x_1+10x_2\leqslant3000\\x_1,x_2\geqslant0\end{cases}$$

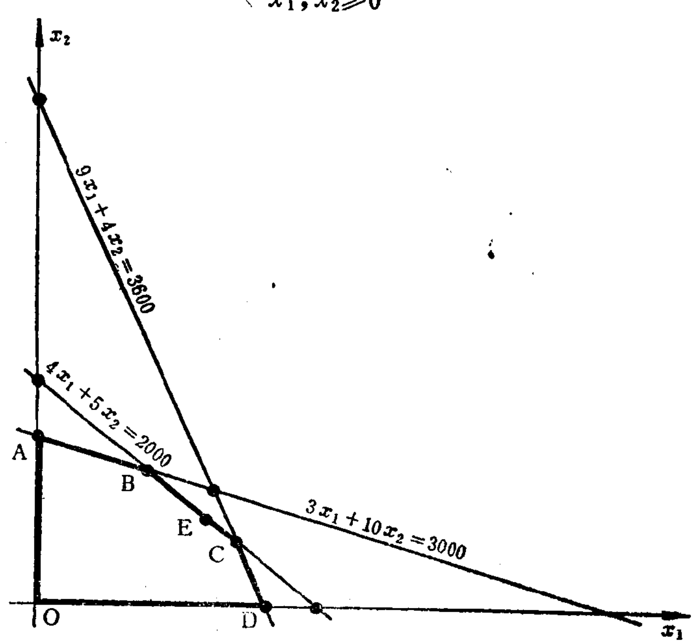

图1-2

解 与例 4 一样，其可行域如图 1-2 所示。

不难看出，对应于最大的目标函数 z 的等值线正好与半平面 $4x_1+5x_2\leqslant 2000$ 的边界直线 $4x_1+5x_2=2000$ 相重合，即可行域的边界线 BC 上的每一点都使目标函数 z 达到最大。因此，线段 BC 上所有点的坐标都是所给线性规划的最优解，即有无穷多个最优解；相应的目标函数值均为 $z=2000$。

例 6 用图解法解线性规划

$$
(\mathrm{I})\quad \begin{aligned} &\max\ z=2x_1+2x_2\\ &\text{s.t}\begin{cases} x_1-x_2\geqslant 1\\ -x_1+2x_2\leqslant 0\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}\end{aligned}\quad ;\qquad (\mathrm{II})\quad \begin{aligned} &\min\ z=2x_1+2x_2\\ &\text{s.t}\begin{cases} x_1-x_2\geqslant 1\\ -x_1+2x_2\leqslant 0\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}\end{aligned}
$$

解 这两个线性规划的约束条件相同，其可行域如图 1-3 所示，这是一个无界域。

画出目标函数的等值线便可看出，当沿目标函数 z 增大的方向平移等值线时，它总能与可行域相交，这说明目标函数 z 可无限增大，所以（Ⅰ）无最优解（或最优解不存在）；当沿目标函数 z 减小的方向平移等值线时，显然使 z 为最小的等值线与可行域的交点为 A，其坐标 $x_1=1$，$x_2=0$ 就是（Ⅱ）的最优解，相应的目标函数值为 $z=2\times1+2\times0=2$。

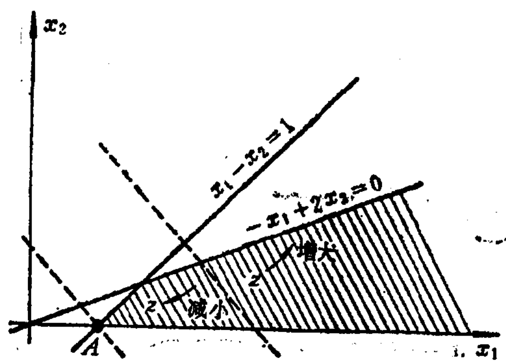

图1-3

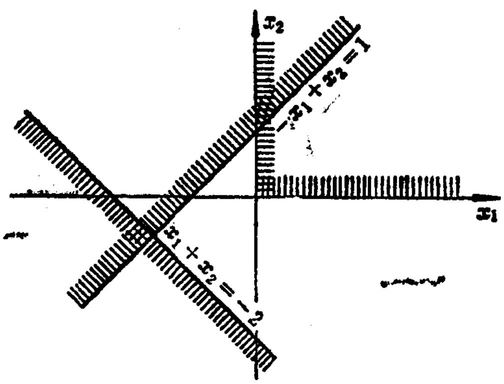

图1-4

例 7 用图解法解线性规划

$$
\begin{aligned} &\max\ z=x_1+2x_2\\ &\text{s.t}\begin{cases} -x_1+x_2\geqslant 1\\ x_1+x_2\leqslant -2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}\end{aligned}
$$

解 根据约束条件画出的四个半平面（图 1-4）显然没有公共部份，因此该线性规划不存在可行解，当然也就没有最优解。

综上所述，两个变量的线性规划有下列特点：

1° 可行域可能是空的（例 7），也可能是一个有界或无界的凸多边形区域（例 4～例 6）。

2° 如果可行域无界，其最优解可能存在，也可能不存在（例 6）。

3° 如果存在最优解，则一定在可行域(凸多边形)的某个顶点达到（例 4 、例 6（Ⅱ））；如果可行域的两个顶点同时为最优解，则这两个顶点连线上的任一点也是最优解(例 5)。

虽然图解法具有简单、直观的优点，但是对于三个以及三个以上变量的线性规划就无能为力了。然而，它对整个线性规划的理论与解法却有很大的启示。

三　线性规划的标准形式

由于线性规划的目标函数可以是极大化，也可以是极小化；约束条件可以是“≤”形式的不等式，也可以是“≥”形式的不等式，还可以是等式，所以线性规划有不同的表达形式。这种形式上的多样性给求解带来不便。为确定起见，我们把如下的线性规划

$$\max\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t}\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases} \tag{1-6$)_1$}$$

称为线性规划的**标准形式**，这种形式可简记为

$$\max\ z=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$$

$$\text{s.t}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases} \tag{1-6$)_2$}$$

其中未知量的个数 n 称为线性规划的**维数**，约束方程组的个数 m 称为线性规划的**阶数**，目标函数的系数 $c_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 称为**价值系数**。我们不妨设 $b_i>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，且要求 $n>m$。

如果引入向量和矩阵：

$$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n),\qquad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$$

$$\boldsymbol{p}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$$

那么上述线性规划的标准形式就可分别表示成如下的向量形式和矩阵形式

$$\max z=\boldsymbol{cx}$$

$$\text{s.t}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{p}_jx_j=\boldsymbol{b}\\ x_j\geqslant 0\quad (j=1,2,\cdots,n)\end{cases} \tag{1-6$)_3$}$$

或

$$\max z=\boldsymbol{cx}$$

$$\text{s.t}\begin{cases}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{1-6$)_4$}$$

习惯上，也把约束条件记作

$$R=\{x \mid Ax=b,\quad x\geqslant 0\} \tag{1-7}$$

这实际上就是可行解集或可行域。这时，(1-6)$_4$ 可简记为

$$\max_{x\in R} z=cx \tag*{(1-6)$_5$}$$

线性规划的上述五种形式 (1-6)$_1$～(1-6)$_5$ 总记为 (1-6) 式。以后讨论 (1-6) 式时，可根据需要，选择任一形式进行讨论。

对于线性规划的非标准形式，可通过下列变换化为标准形式：

1° 如果要求目标函数 f 实现极小化，即 $\min f=cx$，则利用公式 $\min f=-\max(-f)$，令 $z=-f$，得

$$\max z=-\min f=-cx$$

从而把极小化问题变为极大化问题。

2° 如果约束条件是“$\leqslant$”型不等式，即 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，则只要在不等号左边加上一个非负的所谓**松弛变量** $x_{n+i}\geqslant 0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，就可将不等式约束化为等式约束

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+i}=b_i \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

类似地，也可在不等号左边减去一个非负的所谓**剩余变量**（也称松弛变量）$x_{n+i}\geqslant 0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，化不等式约束 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 为等式约束

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-x_{n+i}=b_i \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

3° 如果约束方程的右端常数项 $b_i<0$，则只要在该约束方程的两边同乘以 (-1)，即可将右端变为正的，即 $-b_i>0$。

4° 如果某个变量 x_j 无非负限制（称这样的变量为**自由变量**），则只要引入两个非负变量 x_j' 与 x_j''，令 $x_j=x_j'-x_j''$，便可化自由变量为非负变量。

5° 如果约束条件中带有绝对值不等式 $|Px_1+Qx_2|\leqslant R\,(R>0)$，则可把它化为一个不等式组

$$\begin{cases} Px_1+Qx_2\leqslant R \\ -Px_1-Qx_2\leqslant R \end{cases}$$

再按 2° 化为等式约束。

6° 如果某个变量有上、下界 $d_j\leqslant x_j\leqslant e_j$（称这样的变量为**有界变量**），则只要令 $x_j'=x_j-d_j$ 引入新变量 x_j'，便可化 $d_j\leqslant x_j\leqslant e_j$ 为 $0\leqslant x_j'\leqslant e_j-d_j$，最后再将上限不等式化为等式即可。

例 8 试将线性规划

(i) $\min f = 6x_1 + 3x_2 - 4x_3$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 \geqslant 30 \\ |x_1 + 2x_2 + 4x_3| \leqslant 80 \\ x_1, x_2 \geqslant 0,\ x_3 \text{无限制} \end{cases}$$

(ii) $\max z = x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$$\text{s.t}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 20 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 25 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, 2 \leqslant x_3 \leqslant 6 \end{cases}$$

化为标准形式。

解 (i) 以 x_3', $x_3''\geqslant 0$ 之差 $x_3'-x_3''$ 代替 x_3，在约束条件中按次序引入剩余变量 x_4 以及松弛变量 x_5、$x_6\geqslant 0$，把极小化问题变为极大化问题，于是得标准形式

$$\max z = -6x_1 - 3x_2 + 4(x_3' - x_3'')$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3(x_3' - x_3'') - x_4 = 30 \\ x_1 + 2x_2 + 4(x_3' - x_3'') + x_5 = 80 \\ -x_1 - 2x_2 - 4(x_3' - x_3'') + x_6 = 80 \\ x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

(ii) 令 $x_3' = x_3 - 2$，化 $2\leqslant x_3\leqslant 6$ 为 $0\leqslant x_3'\leqslant 4$，即 $x_3'\geqslant 0$，$x_3'\leqslant 4$；再将 x_3' 的上限约束化为等式约束，于是得标准形式

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 4x_3' + 8$$

$$\text{s.t}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3' = 14 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3' = 17 \\ x_3' + x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3', x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

因为任何线性规划都可以化为标准形式，所以今后我们只针对标准形式的线性规划(1-6)进行讨论。

四 基本解、基可行解、最优基可行解

前面曾由线性规划的约束条件引入了可行解概念，由约束条件及目标函数引入了最优解概念；下面将由约束条件中的约束方程组引入基本解概念，进而引入基可行解及最优基可行解概念。

1. 基本解

对于 n 维 m 阶标准形式的线性规划

$$\max z = \boldsymbol{cx}$$

$$\text{s.t}\begin{cases} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}$$

设约束方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是相容的（即存在解），且系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)$$

是满秩的，即

$$R(A) = m$$

亦即 A 中有 m 个线性无关的列向量。不失一般性，可设 A 中的前 m 个列向量