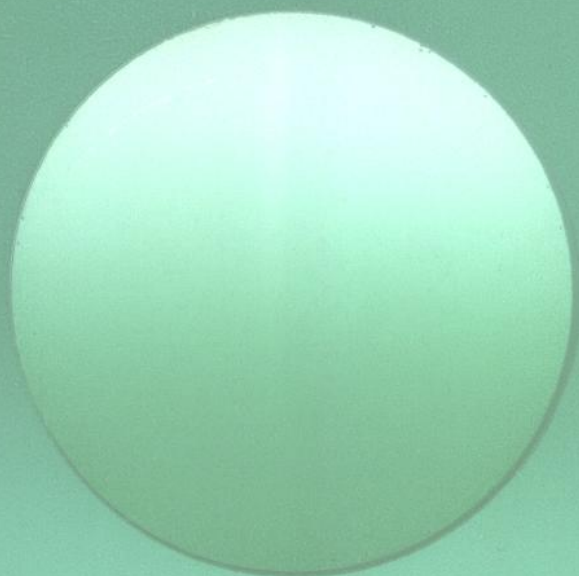


● 研 究 生 用 书 ●

THEORY OF
VISCOELASTICITY

华中理工大学出版社



杨 挺 青



粘 弹 性 力 学

0345
Y26

443354

粘弹性力学

杨 偃 青

华中理工大学出版社

· 研究生用书 ·
粘 弹 性 力 学
杨挺青

责任编辑 湛柏琼

责任校对 严志勇

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:8.75 插页:2 字数:207 000

1990年6月第1版 1992年5月第2次印刷

印数:1 001—2 500

ISBN7-5609-0387-8/O·66

定价:4.95元

(鄂)新登字第 10 号

内容简介

本书系统地阐述材料的粘弹性能与本构关系,较详细地讨论粘弹性力学的基本问题。基本内容叙述力求深入浅出,注重阐明基本概念、基础理论和基本方法。第1~7章为基本部分,即线粘弹性力学;第8~11章为非线性粘弹性问题、粘弹塑性本构关系及不可逆热力学与粘弹性理论。

本书可作为力学专业及工科专业高年级学生和研究生教材,也可供工程技术人员及力学教师参考。

ABSTRACT

This book treats of the viscoelastic behavior and constitutive relations of materials, elaborating on the fundamental problems in mechanics of viscoelasticity. The main ideas are reinforced, with particular emphasis on basic concepts, theories and methods. Chapters 1 through 7 treat linear theory of viscoelasticity. Chapters 8 and 9 discuss nonlinear viscoelasticity. Chapter 10 deals with visco-elastic-plasticity of materials. Chapter 11 discusses irreversible thermodynamics and viscoelasticity.

This book is intended to serve as a text for senior undergraduate and graduate students majoring in engineering mechanics or working in engineering specialisms. It can also be used as a reference book by engineers and technicians.

“研究生用书”总序

研究生教材建设是提高研究生教学质量的重要环节,是具有战略性的基本建设。各门课程必须有高质量的教材,才能使学生学习掌握各门学科的坚实的基础理论和系统的专门知识,为从事科学研究工作或独立担负专门技术工作打下良好的基础。

我校各专业自 1978 年招收研究生以来,组织了一批学术水平较高、教学经验丰富的教师,先后编写了公共课、学位课所需的多种教材和教学用书。有的教材和教学用书已正式出版发行,更多则采用讲义的形式逐年印发。这些讲义经过任课教师多年教学实践,不断修改、补充、完善,已达到出书的要求。因此,我校决定出版“研究生用书”,以满足本校各专业研究生教学需要,并与校外单位交流,征求有关专家学者和读者的意见,以促进我校研究生教材建设工作,提高教学质量。

“研究生用书”以公共课和若干门学位课教材为主,还有教学参考书和学术专著,涉及的面较广;数量较多,准备在今后数年内分批出版。编写“研究生用书”总的要求是从研究生的教学需要出发,根据各门课程在教学过程中的地位和作用,在内容上求新、求深、求精,每本教材均应包括本门课程的基本内容,使学生能掌握必需的基础理论和专门知识;学位课教材还应接触该学科的发展前沿,反映国内外的最新研究成果,以适应目前科学技术

知识更新很快的形势；学术专著则应充分反映作者的科研硕果和学术水平，阐述自己的学术见解。在结构和阐述方法上，应条理清楚，论证严谨，文字简炼，符合人们的认识规律。总之，要力求使“研究生用书”具备科学性、系统性和先进性。

我们的主观愿望虽然希望“研究生用书”的质量尽可能高一些，但由于研究生的培养工作为时尚短，水平和经验都不够，其中缺点、错误在所难免，尚望校内外专家学者及读者不吝指教，我们将非常感谢。

华中理工大学研究生院院长

陈 挺

1989. 11.

前 言

本书初稿是作者编写的粘弹性力学讲义，曾作为华中理工大学力学系1981年以来历届研究生和力学助教班的《粘弹性力学》课程教材，用于工程力学专业本科生的选修课，曾在湖北省暨武汉市力学学会举办的“粘弹性力学讨论班”中作为主要资料。经过几年教学实践的体会，作者将原讲义进行修改扩充，增补了粘弹性理论及应用研究的一些近期进展和本人的部分研究成果，于1986年初重印。这两次印出的讲义均有兄弟院校使用，校内外读者反映良好。本书在讲义修订本的基础上进一步修改补充而成。

粘弹性力学是连续体力学的一个重要内容；它涉及高分子材料、生物材料、地质材料、建筑材料、复合材料和高温条件下金属等材料的力学性能研究；在材料工程、生物工程、能源工程、海洋工程、宇航工程和地下工程中，在化工、轻纺、建筑、机械等行业以及日用品工业中都有广阔的应用前景，正越来越受到人们的重视。考虑到本书不仅可作为力学本科生和研究生的教材，而且适用于工科专业研究生和高年级学生，还可供工程技术人员参考，因此在编写时注重基本概念、基础内容和基本方法，适当反映本学科的新进展，尽可能适应不同基础与不同要求读者的需要。所以，本书以线性粘弹理论及其应用为主（前七章），同时对非线性粘弹问题、粘弹塑性、热力学与粘弹性本构关系等方面的内容加以适当的论述（八至十一章）；为方便起见，将有关拉普拉斯变换、连续体有限变形的一些知识，简要地编作附录；书末给出了一定数量的习题和参考文献，供读者参考。

本书的出版，承蒙校内外许多同志的鼓励与帮助，清华大学徐秉业教授、北方交通大学费志中副教授认真细致地审定了书稿

内容，为本书的修改提出了许多宝贵意见，作者谨此致以衷心的感谢。此外，华中理工大学杨帆和蔡孝鹏同志为本书的出版做了很多工作，在此表示谢意。

本书稿虽经多次修改，但由于作者水平所限，难免有缺点与错漏之处，恳请读者批评指正。

杨挺青

一九八八年五月

目 录

第一章 绪 论	(1)
§1-1 粘弹性.....	(1)
§1-2 蠕变和应力松弛.....	(3)
§1-3 材料粘弹行为的研究.....	(4)
§1-4 粘弹性力学.....	(6)
第二章 微分型本构关系	(8)
§2-1 粘弹性的模型表述.....	(8)
§2-2 两个基本模型.....	(10)
§2-3 三参量固体.....	(15)
§2-4 蠕变柔量与松弛模量.....	(18)
§2-5 广义 Maxwell 和 Kelvin 模型.....	(19)
§2-6 三维应力应变关系.....	(24)
第三章 积分型本构关系	(29)
§3-1 概述.....	(29)
§3-2 积分型本构方程.....	(29)
§3-3 蠕变函数和松弛函数的积分表达.....	(37)
§3-4 三维的积分型本构关系.....	(39)
第四章 动态性能及温度效应	(43)
§4-1 复模量和复柔量.....	(43)
§4-2 复模量和复柔量的计算.....	(48)
§4-3 粘弹性材料的能耗.....	(50)
§4-4 材料函数之间的关系.....	(53)
§4-5 动态力学性能与频率的关系.....	(58)
§4-6 时间-温度等效原理.....	(60)

第五章	线粘弹力学问题的建立及解法	(67)
§5-1	线粘弹性问题的建立.....	(66)
§5-2	线粘弹性问题的求解.....	(67)
§5-3	相应原理.....	(73)
§5-4	梁的弯曲.....	(77)
§5-5	连续支承梁.....	(83)
§5-6	圆直杆的扭转.....	(88)
第六章	轴对称问题	(93)
§6-1	轴对称方程.....	(93)
§6-2	受内压圆筒.....	(95)
§6-3	外表面受约束的圆筒.....	(99)
§6-4	动态响应.....	(105)
§6-5	轴对称平面问题的一般解.....	(110)
第七章	振动 粘弹性波	(124)
§7-1	简单振荡系统.....	(124)
§7-2	等圆截面直杆的扭振.....	(127)
§7-3	自由振动的一般情形.....	(130)
§7-4	长柱杆中的纵波.....	(131)
§7-5	波面 波速.....	(136)
§7-6	粘弹性波的传播及算例.....	(139)
第八章	非线性本构关系	(145)
§8-1	概述.....	(145)
§8-2	多重积分型本构关系.....	(146)
§8-3	三维本构关系的多重积分表示.....	(151)
§8-4	不可压缩材料和线性可压缩材料.....	(155)
§8-5	几种简单受力情形.....	(160)
§8-6	单积分型本构方程.....	(166)
§8-7	非线性本构关系的其它形式.....	(175)
第九章	非线性粘弹问题的应力分析	(178)
§9-1	概述.....	(178)
§9-2	纯弯曲.....	(178)

§9-3	圆轴的纯扭转	(182)
§9-4	厚壁圆筒	(184)
第十章	粘弹塑性本构关系	(193)
§10-1	变形体一般模型	(193)
§10-2	粘弹塑性材料的屈服准则	(195)
§10-3	本构方程	(198)
§10-4	几种特殊情形	(202)
§10-5	其他粘弹塑性理论	(206)
§10-6	Bodner-Partom 本构方程	(208)
第十一章	不可逆热力学与粘弹性	(212)
§11-1	概述	(212)
§11-2	热力学基础	(213)
§11-3	线性后效材料的演变方程	(218)
§11-4	演变方程求解	(220)
§11-5	内变量与本构关系	(226)
附录 I	拉普拉斯变换	(229)
§ I-1	拉普拉斯变换及其反演	(229)
§ I-2	拉普拉斯变换的性质	(231)
§ I-3	拉普拉斯变换简表	(235)
附录 II	连续体变形与应力的描述	(239)
§ II-1	两种坐标系	(239)
§ II-2	有限变形	(241)
§ II-3	应力	(245)
附录 III	几种单积分型本构关系	(247)
§ III-1	简单拉伸的有限变形	(247)
§ III-2	几种单积分型本构方程	(249)
习 题		(253)
参考文献		(259)

第一章 绪 论

§1-1 粘弹性

研究物体在外部因素作用下的应力、应变和位移时，需要考虑平衡（或运动）方程、变形几何条件以及材料的本构关系。前两者与材料的性质无关，它们不能确定物体在载荷作用下的应力和应变状态。刻画物性的本构关系，反映材料宏观性能，是根据工程实际和试验研究所得材料行为加以抽象化的数学表达。通常说的本构关系，是指描述物体的应力-应变-时间-温度关系的方程式，所以又称为本构方程。

有两类众所周知的材料：弹性固体和粘性流体。弹性固体具有确定的构形，在静载作用下发生的变形与时间无关，卸除外力后能完全恢复原状。从能量观点来说，外力在弹性体变形过程中所作的功，全部以弹性势能方式储存，且能在卸除外载过程中释放出来。粘性流体没有确定的形状，或决定于容器，外力作用下形变随时间而发展，产生不可逆的流动。

实际上，塑料、橡胶、油漆、树脂、玻璃、陶瓷、混凝土以及金属等工业材料，岩石、土壤、沥青、石油和矿物等地质材料，肌肉、骨骼、血液等生物材料，常同时具有弹性和粘性两种不同机理的形变，综合地体现粘性流体和弹性固体两者的特性，材料的这种性质称为**粘弹性**。

材料的粘弹性分线性和非线性两大类。若材料性能表现为线弹性和理想粘性特性的组合，则称为线性粘弹性。如果以胡克体（线弹性）和牛顿流体（理想粘性）为两端来构成材料谱系，则介于这两者之间的均属**线粘弹性**材料^{[1]~[4]}。

材料的粘弹性能依赖于温度、负荷时间、加载速率和应变幅

值等条件。其中，温度和时间的影响尤其明显。硬聚苯乙烯或其他塑料等固态聚合物，粗略地说或在某些条件下，它们是弹性的，实际上却存在着流动性，而且随温度的升高会加快流动。所以，在常温和小应变下，它们也只是近似地看作为弹性体。在较高的温度下，这些材料可熔融成为高粘度的流体。通常，根据聚合物性能依赖于时间和时间的特性，把非晶态聚合物分为几种力学状态，即：玻璃态、粘弹态、高弹态（橡胶态）和粘流态。这些状态有不同机理的流变行为，构成描述非晶态聚合物力学性能的基础。由于高分子聚合物的粘弹性质特别突出，有时称之为粘弹性材料^{[6]~[7]}。事实上，许多聚合物只在一定条件下呈现特别明显的粘弹性能，因而更确切的说法应该是材料的粘弹性状态。

一切固体都会或多或少地流变。在一定的条件下，沥青、白糖、玻璃、冰川、岩石和地壳均发生流动与变形。在有关的条件中，最重要的是时间与温度。

多数金属材料在常温和小应变时表现为弹性，但在振动问题中，或高温条件下的构件，往往需要考虑其粘弹性行为。在研究受高速冲击的金属构件时，则需建立其它的力学模型，如粘塑性和粘弹塑性模型，或高温高压下固体的流体动力模型。这说明受载与使用条件对于材料性能有重要的影响。

生物材料往往有明显的粘弹性。冯元桢指出，几乎所有的生物固体都是粘弹性体，只不过有的弹性较强，有的粘性较强，在程度上有所差别^[8]。因此，生物医学工程方面的许多专著和论文集都论述生物体的粘弹性能^{[9]~[11]}。

材料的粘弹性行为依赖于时间，并决定于应变率。时间效应表明，材料的应变或应力响应决定于受载与变形的过程（历史），所以说材料是有记忆的。弹性固体是一个特例，它只记忆未发生形变的初始构形^[12]。

§1-2 蠕变和应力松弛

为了描述材料的粘弹性行为，首先研究最简单的应力、应变随时间变化的现象。

一、蠕变

在一定应力作用下，弹性固体的应变也为一定值，不随时间而变化；对于理想粘性流体，变形则以等应变率随时间而增加。

实际材料往往是在恒定应力作用下，应变随时间而增加，这种现象称为蠕变。不同材料或同一材料在不同条件下有不同程度的蠕变，聚合物尤为明显。图1-1(a)中表示定应力 σ_0 作用下的蠕变曲线ABC， $\varepsilon = f(t, \sigma)$ ，其中 t 表示时间。金属在高温下发生显著的蠕变现象，它可分为瞬时蠕变（应变率随时间增加而减小）、稳态蠕变（应变率几乎为一常值）和加速蠕变（应变率随时间迅速增加）三个阶段，如图1-1(b)所示。

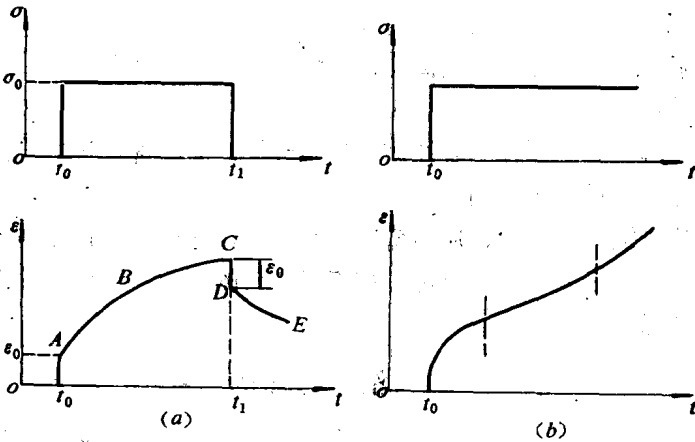


图 1-1

可见，为了保持构件和机械零件的形状尺寸，不能采用易产生蠕变的材料。

回复 若在某一时间卸去载荷，弹性固体将恢复原样，如果

不考虑惯性，则应变瞬即为零。对于粘弹性材料，在 $t = t_1$ 时刻除去外力（图1-1(a)），则在瞬时弹性恢复（CD）后，有逐渐回复的过程（DE）。这种蠕变回复现象，有时称为滞弹性恢复或延滞回复。留存于物体中不可恢复的应变，由回复曲线的渐近值确定。

二、应力松弛

当应变恒定时，应力随时间而减小的现象称为**应力松弛**。它与蠕变现象相对应。图 1-2 表示一般应力松弛过程，开始时应力很快衰减，而后逐渐降低并趋于某一恒定值。从流变机理方面看，粘性流动将使应力经过足够长的时间后衰减至零。因此可以说，在一定应变条件下，应力较快趋于零的材料是流体；而经相当长时间后应力衰减至某一定值的材料则为固体。

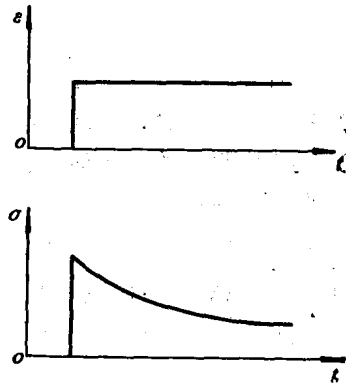


图 1-2

工程中有的零件不容许应力松弛过快。高温管接头的连接螺钉就是其中的一个实例。

除了蠕变、回复、应力松弛等现象外，材料的粘弹性能还可利用速率效应来表示，即讨论应变率对应力的影响，或应力速率对应变的影响。

§1-3 材料粘弹行为的研究

由于材料、载荷（起因）和形变过程的复杂性，材料随时间而变化的力学性能也是复杂的，不能只用普通准静态的蠕变与应力松弛来表达。粘弹性固体的形变过程虽然很复杂，但从表观现象而言，可概括为：瞬时弹性、蠕变、应力松弛、瞬时回复、滞弹性变形和永久变形等。

为了确切地表示和描述不同材料随时间、温度等因素而发生变化的力学性能，必须采用理论和实验相结合的研究方法。

材料力学性能方面的物理现象，需引用数学概念来表达，具体的粘弹性行为，必须用数学形式来描述。无论是从抽象简化了的力学模型出发，还是以一般公理化体系为基础所推演出的粘弹性本构关系，都是通过数学的概念、经过分析和数学处理而表示成一定形式的关系式或方程。Boltzmann 提出的线粘弹行为的描述^[13]，Volterra 关于各向异性固体的粘弹性数学表达^[14]，Oldroyd 论述的本构方程应满足标架无关性^[15]，以及 Green-Rivlin 的非线性理论^[16]，都是这方面的实例。

这些数学结构或框架在反映客观情况并与实际结合时，才能更好地描述材料性能。事实上，反映物性的材料常数和材料函数通常是由实验决定的；有时用一定形式的本构方程来求解某些边值问题，最后也要经过实验来判断所采用方程的正确程度。因此，粘弹行为的实验研究十分重要。尽管有着许多困难，目前已经取得很多成果。通过实验研究解决实际问题、验证理论、调解工程设计与流变理论的某些矛盾，以推动粘弹性理论与应用研究的不断发展。这在非线性粘弹性方面更加突出。根据大量的实验，不断总结出许多适用于一类材料或某一种具体材料经验的、半经验的本构方程和修正理论，它们与理论上的具有普遍意义的本构关系互相制约，互相补充，成为本构理论与应用中互不可缺少的两个方面。

工程中研究材料随时间变化的性能，有许多试验方法。常用蠕变、应力松弛、等应变率或等应力变化率作用下的响应，作为准静态试验研究方法。在动态力学行为方面，有各种振动试验和冲击试验。振动试验可以考察材料粘弹性能对载荷频率的依赖关系，也能作为研究聚合物分子运动的手段^[17]。此外，粘弹行为随温度而变化的试验，在研究材料粘弹性能中有其特别重要的作用。

§1-4 粘弹性力学

聚合物科学和塑料工业的迅速发展，现代技术中金属材料在高温条件下的广泛使用（如喷气发动机、涡轮透平、航天装置和核动力设备等），生物和地学等工程科学的深入研究，都使得材料的流变机理、粘弹性理论与应用的研究越来越显得重要。随之逐渐形成粘弹性力学。

现在，粘弹性力学是固体力学的基础内容^[12, 18, 19]，成为连续体力学的一个重要部分^[20, 21]，正愈来愈广泛应用于工程之中。例如：高聚物工程^[7, 22, 23]，生物力学^{[8]-[11]}，地学，航空航天^[24]和海洋工程结构^[25]等等。由此可见，粘弹性力学在工程实际中有广阔的应用前景。

粘弹性力学通常包括两方面基本内容：一是材料粘弹性能的描述与本构关系的表达；二是边值问题的建立及其求解。本书着重从宏观唯象的观点讨论材料的粘弹性行为，表述粘弹固体的力学性能与本构方程。有关材料组分与分子结构、微观机理等材料学科的内容，本书未予讨论。在比较系统地阐述材料粘弹性能与本构关系的基础上，对若干粘弹性构件进行应力分析和变形计算，说明粘弹性力学问题的处理方法。线粘弹边值问题直接求解的基本步骤往往与弹性力学相仿，乃至有时可以直接应用弹性解的形式，经过一些积分变换便得到粘弹性问题的解答。对于不便和不能利用弹性解的情况，将根据具体问题的特点采用相应的处理方法。

本书以粘弹性固体的线性理论为基本内容，其中采用了材料的连续性、均匀和各向同性假设，并限于小应变的情形。一般认为材料处于自然状态，即在外界因素作用之前，材料没有变形和初应力。由于通常从时间为零起考虑粘弹体受外部作用，因而常把 $t=0$ 时的应力和应变均认作为零。此外，本书讨论本构关系时，均未考虑材料老化的因素与影响。关于粘弹非线性问题，一