高等数学 第Ⅲ卷

多元微积分与微分几何初步

萧树铁 居余马 主编

清华大学出版社

高　等　数　学

第Ⅲ卷

多元微积分与微分几何初步

萧树铁　居余马　（主编）
胡金德　葛严麟

清华大学出版社

(京)新登字158号

内 容 提 要

《高等数学》一书用现代数学的观点对传统的工科微积分和线性代数的内容体系进行了更新。全书以近代数学的基础知识(集合、关系、运算、映射)及群、环域的基本概念开篇，突出数学的整体性和结构性；然后从线性空间的结构与线性映射性质入手，阐述线性代数的内容，在讲述微积分和微分方程时充分利用线性代数知识，并增添了微分几何初步。全书知识结构新、基础厚、容量大，使用现代数学的语言和符号。全书分3卷，第Ⅰ卷为基础与代数，第Ⅱ卷为一元微积分与微分方程，本书是第Ⅲ卷，为多元微积分与微分几何初步。内容包括：点集、开集、闭集、R^n 的完备性，多元数值函数、$R^n \to R^m$ 的映射及其微分学，空间曲线与空间曲面的基本知识(微分几何初步)，含参变量积分、重积分，第一类、第二类曲线积分与曲面积分及场论简介。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 第Ⅲ卷：多元微积分与微分几何初步/萧树铁，居余马主编．—北京：清华大学出版社，1997
ISBN 7-302-02433-2

Ⅰ．高… Ⅱ．① 萧… ② 居… Ⅲ．① 高等数学 ② 多元-微积分 ③ 微分几何 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第02847号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编100084)
因特网地址：www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京丰华印刷厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开 本：850×1168 1/32 印张：12.875 字数：333千字
版 次：1997年4月第1版 1997年12月第2次印刷
书 号：ISBN 7-302-02433-2/O·178
印 数：4001～7000
定 价：13.00元

前　　言

本教材是根据我们在清华大学土木系、计算机系和电机系的教学实践经验，按同名讲义修改而成.

目前国内流行的高等数学教材颇多，多年来在广大教师的努力下，用它们培养了不少人才. 然而从培养 21 世纪人才的角度来看，在各门学科加速相互渗透，以及随着计算机和信息技术的迅速发展而引起的各门科学和技术定量化趋势的背景下，需要进一步拓宽大学生的知识面和增强灵活反应的能力，作为大学重要基础课程的高等数学课，有必要把教学的重点从仅仅“为专业课程提供数学工具”扩展到“提高大学生的数学素质”上来，为此教学体系和内容也应作相应的调整和更新. 本教材就是在这种思想指导下进行的一种尝试.

对于“数学素质”，人们有不同的理解，但有几条是比较一致的，即：(1) 对事物某一方面结构的归纳和抽象的思维能力，从具体到一般的联想能力，表现之一是能建立实际问题的数学模型；(2) 正确的演绎推理习惯和动手运算的能力；(3) 了解基本的数学语言，具有一定的自学能力，能通过自学了解某些新的数学工具和思想. 当然，提高“数学素质”不能只靠“高等数学”一门课，也不能只靠若干门数学课，而需要通过整个大学期间各种课内外的教学实践.

这本教材虽然对现行的工科微积分和线性代数的教学内容和体系作了较大的调整和更新，增加了近代数学的一些基础知识，增添了微分几何初步，并尽量使用现代数学的语言，但是，基于数学科学继承性很强的特点，加之我们的试验还是初步的，所以全书的

内容仍是以古典数学(主要是微积分、常微分方程和线性代数)为主.关于内容的处理和体系的安排,我们强调了以下两点:

一、内容的整体性和结构性:分析、代数、几何仍是高等数学的基础,长期来一直把它们分门设课、孤立讲授(几何部分已基本取消),现在由于各门学科的发展以及现代数学对非线性和非局部问题研究的深入,它们之间的界线越来越模糊,因此有必要强调高等数学的整体性与结构性.我们认为工科学生适当地学一些近代数学的基础知识,不仅可以使他们对于经典数学的内容有更深刻的理解,也可以开阔思路,提高他们抽象思维的能力和运用数学工具分析解决实际问题的能力;同时也有助于他们阅读使用数学较多的现代科技文献,并为他们继续学习和使用现代数学奠定必要的基础.从数学的整体结构看,代数结构是基本的.线性代数主要是研究有限维线性空间的结构和线性映射的性质;微积分则是研究 $R^1 \to R^1$ 和 $R^n \to R^1$ 的连续函数(更一般地是 $R^n \to R^m$ 的连续映射)的各种性质,极限方法和局部线性化是它的基本方法.因此,掌握了线性代数的知识将有助于更深入、更简明地阐述微积分、微分方程和微分几何方面的很多内容.基于这种考虑,我们把代数安排在微积分之前讲授,这样,学生更能领会数学的整体性和结构性,也便于增加一些新的内容.例如,用线性映射定义微分,容易得到 $R^n \to R^m$ 的可微映射 f 的微分对应于 f 的雅可比矩阵以及可微复合映射的链法则,以及微分方程和微分几何的某些内容.

二、在内容的安排上处理好一般和具体的关系:学生"数学素质"的培养有个思维习惯的建立过程(尤其在抽象能力的培养方面),教师做好这一点并不容易.人们常常以"学生不容易接受"为理由,回避了培养学生抽象思维能力所遇到的一些矛盾,在教学过程中过份强强"从具体到一般".其实教学是传授人类长期积累的知识,这与本身通过实践去获取知识有所不同.正确的教学原则应该是:"宏观上从一般到具体"(指总的内容安排),"微观上从特殊

到一般”(指具体内容的讲授).这样先见森林,再见树木,使学生扩大视野,又摆出问题,不回避矛盾,充分调动学生学习的积极性;而对每个重要的抽象概念,则必须注重介绍其实际背景,循序渐进.

鉴于以上原则,首先要考虑如何引导学生进入高等数学的领域,即把教学的起点放在何处.我们从近代数学的基础知识——集合、关系、运算和映射以及基本代数结构——群、环、域的基本概念开篇,目的是使学生在中学数学的基础上,对数学的整体认识上一个台阶,了解高等数学与中学数学的重大差别,从而激发起学生探索新事物的积极性与学习大学数学的浓厚兴趣.在此基础上,按下列次序安排教学内容和体系.

第Ⅰ卷内容包括:集合、关系、运算,基本代数结构——群、环、域的基本概念,线性空间与内积空间,映射与线性映射,矩阵,行列式,线性方程组,特征值与特征向量以及矩阵的标准形(相似标准形与二次型矩阵的合同标准形),空间解析几何.这里,我们对传统的“线性代数”的教学体系作了大的调整,突出了线性空间的结构和线性映射两大核心内容的地位和训练,并用它们来统率矩阵的计算、方程组解的结构、矩阵的标准形和二次型的标准形.这里我们以具体的三维几何空间和 R^n 为背景,抽象出一般线性空间的公理化定义;以一组几何向量在线性运算下有没有一个向量可用其余向量线性表示为背景,抽象出线性相关性的定义;用类比物质世界中万物与100多个化学元素间的关系,讲线性空间的“基”的概念;讲线性映射时,从一元线性函数提出,以CAD(计算机辅助设计)中常用的投影、比例、错切、旋转和镜象变换为例,使学生理解 R^2, R^3 中的线性变换均把直线变为直线,而非线性变换则将直线变为曲线.这种从具体到一般的微观安排,使学生通过具体模型来理解抽象的线性空间和线性映射的概念,它有助于培养学生从实际问题中抽象出数学问题的归纳和抽象思维能力以及应用理论分析解决具体问题的能力.

第Ⅱ卷内容包括：实数理论，数值函数，极限与连续，导数与微分，微分学基本定理及其应用，定积分与不定积分及定积分的应用，函数的有限展开，广义积分，无穷级数(数项级数、幂级数与傅里叶级数)，常微分方程与线性微分方程组.

第Ⅲ卷内容包括：点集(开集、闭集、连通性)，多元函数与多元向量值函数($R^n \to R^m$ 的映射)的概念，极限与连续性，多元微分学(包括 $R^n \to R^m$ 的可微映射的 Jacobi 矩阵及可微复合映射的链法则)，微分几何初步——空间曲线与空间曲面的基本知识(曲线的切线和法平面，主法线，副法线，弗雷耐标架，弧长，曲率，挠率，曲面的表示，切平面，曲面的第一、第二基本形式，法曲率、主曲率、高斯曲率)，重积分及其应用，第一类曲线积分与曲面积分，第二类曲线积分与曲面积分，常义和广义含参量积分.

在第Ⅱ，Ⅲ卷中，我们从极限运算的完备性需要出发，阐述了微积分的基础——实数理论，首先用较直观的无穷小数来引入实数，然后用柯西有理序列的等价类加以严格定义，证明了实数的稠密性和完备性；对于定积分，从较直观的阶梯函数入手，通过极限过程，证明了阶跃函数在有有限个第一类间断点情况下的黎曼可积性；讨论了 R^n 到 R^m 的映射的连续性、可微性问题；增添了微分几何的初步知识. 此外，还充分利用线性代数的工具，深化了很多内容(如线性微分方程的理论、线性微分方程组的解法等)的研究.

总之，本教材与传统的工科微积分和线性代数教材相比较，在体系上注重数学的整体性，使分析、代数与几何互相渗透、互相促进；在内容方面，知识结构比较新，基础比较厚，知识面比较宽，并尽量使用现代数学语言.

教材的内容一般应比课堂讲授的内容更丰富一些. 本教材中加注“*”或“**”的部分，一般都可不在课堂上讲授，因而也不作为教学的基本要求. 对习题的安排也遵循同样的原则. 为使读者更好地掌握书中内容，我们选编了大量的训练题，这些题目分成三个

档次：一是不加注“ * ”的题(这是教学的基本要求)；二是加注“ * ”的题；三是补充题. 后两类题比较难，一般都是证明题或是与正文中加注“ * ”内容相对应的题. 这些题是否作为教学的要求，教师可根据学生的水平而定.

使用本教材还要考虑与物理课相配合的问题. 我校物理课安排在一年级第二学期，为使学生具有必要的微积分知识以适应物理课的要求，我们在第一学期大约用 30 个课内学时，讲授极限、导数、微分、定积分的基本概念，微分法与基本的积分法以及定积分的物理应用. 其中有关的理论问题到第二学期系统讲授微积分时再加以讨论. 相应地，我们把第Ⅰ卷的第 8 章安排在第Ⅱ卷的常微分方程之前讲授，把第Ⅰ卷的第 9 章安排在多元微积分之前讲授.

本教材适用学时(课内)为 248—272，分三学期安排，周学时分别为 6，6，3.5 或 5，每学期 16 周.

参加本教材编写工作的有：萧树铁、居余马、葛严麟、胡金德、林翠琴、杜建博和吕志等同志. 使用本教材的前身(校内讲义)进行教学的还有郑建华、宋斌恒、罗贵明、黄鸿选、项阳、李正茂，他们对本教材的编写都提过很多宝贵意见，学校教材委员会的白光义、杨积康及清华大学出版社的潘真微同志对本教材的出版给予了热情的支持，在此，我们一并表示衷心的感谢.

更新工科微积分和线性代数的教学内容和体系是一个迫切而又艰难的课题，应该从各种不同的角度探索“更新”的路子，我们的探索和尝试只是初步的，希望能起到抛砖引玉的作用. 我们盼望“更新”能呈现百花齐放的局面. 由于受我们的水平和经验所限，本教材不妥之处在所难免，恳请同行专家及热心的读者批评指教.

编　者

1994 年 9 月于清华园

目　录

第1章　多元函数及其微分学

在第Ⅰ卷中，我们讨论过的极限、连续、导数、微分和积分等概念，也是多元微积分中的基本概念. 在多元微积分中，这些概念虽然与一元微积分中的概念有类同之处，但是它们也有很多新的特点，有很多新现象和问题需要加以讨论，而这正是学习多元微积分所要特别注意的. 一般来说，一些概念和定理如果在二元函数的情形下理解了并得以证明，就不难把它们推广到三元乃至 n 元的情形. 因此，我们在本章对一些问题的讨论虽然都给出 n 元情况下的结论，但举例和证明将侧重于二元的情形，其中有些不同于一元的新现象尽可能用图形给予解释.

本章主要讨论：点集、开集、闭集，多元函数的基本概念及其极限和连续性，$R^n \to R^m$ 的映射及连续性，偏导数、全微分、方向导数与梯度，复合函数求导的链法则与隐函数的微分法，可微映射、Jacobi矩阵、可微逆映射的微分法、可微复合映射的链法则，泰勒公式，多元极值与条件极值.

1.1　点集·开集·闭集·R^n 的完备性

我们在第Ⅰ卷中讲过，n 元函数 f 是 R^n 的子集 Ω 到实数集 R 的一个映射，即

$$f:\Omega(\Omega \subset R^n) \to R,$$

$$(x_1,\cdots,x_n) \mapsto f(x_1,\cdots,x_n) \in R, \quad \forall\ (x_1,\cdots,x_n) \in \Omega$$

其中：n 维实向量 $X=(x_1,\cdots,x_n)$ 叫做自变量，或说 $x_1,\cdots,x_n$ 叫做 n 个自变量，$f(X)$ 或 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 叫做 n 维实向量 X 的实值函数；

Ω 叫做 f 的定义域，$f(\Omega)$ 叫做 f 的值域.

我们知道，在 R^3 中，起点在原点 O 的三维向量 $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OP}$ 对于单位正交基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 的坐标表示式 (x_1,x_2,x_3) 是点 P 的直角坐标，即向量 $\boldsymbol{x}$ 与点 P 是一一对应的. 因此，R^n 中的向量 $X=(x_1,\cdots,x_n)$ 也常说成是 R^n 中的点. 所以我们把 n 元函数的定义域 Ω 也叫做 R^n 的一个点集.

例 1 $f_1(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域是点集（如图 1-1）：

$$\Omega_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\};$$

$f_2(x,y)=\ln(1-x^2)+\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}$ 的定义域是点集（如图 1-2）：

$$\Omega_2=\{(x,y)\,|\,|x|<1,|y|<1,y>0\};$$

$f_3(x,y)=\ln(x-y)+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域是点集（如图 1-3）：

$$\Omega_3=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1,y<x,y\geqslant 0\};$$

$f_4(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}\ln(4-x^2-y^2-z^2)$ 的定义域是点集：

$$\Omega_4=\{(x,y,z)\,|\,1<x^2+y^2+z^2<4\};$$

Ω_4 是球心在原点的半径为 1 和 2 的两个球面之间的所有点的集合（不含球面上的点）.

1.1.1 开集·闭集

例 1 中的点集 Ω_2 与 Ω_4 叫做开集，Ω_1 是闭集，Ω_3 既非开集也非闭集. 下面给出 R^n 中的点集是开集、闭集的严格定义，并讨论它们的一些简单性质. 首先在 R^n 中定义闭球、开球和点 X_0 的有心邻域.

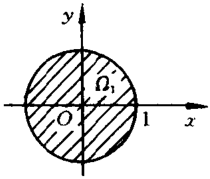

图 1-1

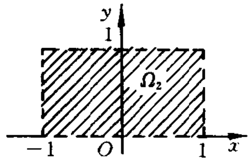

图 1-2

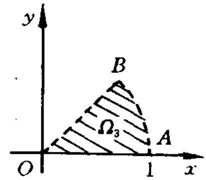

图 1-3

在 R^n 中以 $X_0=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 为中心，以 r 为半径的闭球和开球分别是 R^n 的子集：

$$\overline{B}(X_0,r)=\{X\mid \|X-X_0\|\leqslant r\},$$

$$B(X_0,r)=\{X\mid \|X-X_0\|<r\},$$

其中开球 $B(X_0,r)$ 也叫作点 X_0 的有心 r 邻域.

以下我们把 n 维欧氏空间 R^n 简记作 E，把 R^n 的子集（点集）Ω 记作 S.

定义 1.1 集合 $S\subset E$ 叫做开集，如果 $\forall\ X\in S,\exists\ r>0$，使得 $B(X,r)\subset S$.

开集有以下的简单性质：

(1) 任意多个开集之并集仍是开集. 事实上，如果 $S_i(i\in I)$ 是开集（I 是指标集）：

$$S=\bigcup_{i\in I}S_i,$$

则 $\forall\ X\in S,\exists\ i\in I$，使得 $X\in S_i$，因而 $\exists\ r>0$，使得 $B(X,r)\subset S_i\subset S$.

(2) 有限个开集之交集也是开集. 事实上，如果 $S_i(i=1,\cdots,m)$ 是开集：

$$S=\bigcap_{i=1}^{m}S_i,$$

则 $\forall\ X\in S,\exists\ r_1,\cdots,r_m>0$，使得 $B(X,r_i)\subset S_i,(i=1,\cdots,m)$，取 $r=\min\{r_1,\cdots,r_m\}$，便有 $B(X,r)\subset S$.

但要注意，无穷多个开集的交集不一定是开集.

例如：设 $X_0\in E$，$0<r<1$，$S_m=B(X_0,r^m)$，$m=1,2,\cdots$，则 S_m 显然都是开集，但 $S_m(m=1,2,\cdots)$ 的交集仅含点 X_0，故不是开集.

又如：R^1 中开区间 (a,b) 是开集；例 1 中的 R^2 的点集 Ω_2，R^3 的点集 Ω_4 都是开集；而 R^2 的点集 Ω_1、Ω_3 都不是开集.

定义 1.2 设 $S\subset E$，$X\in E$.

(1) 若 $\exists\ r>0$，使得 $B(X,r)\subset S$，则称 X 为 S 的内点. S 的全部内点构成的子集叫做 S 的内部，记作 $\mathring{S}$.

(2) 若 $\exists\ r>0$，使得 $B(X,r)\subset E-S$，则称 X 为 S 的外点. S 的全体外点组成的子集叫做 S 的外部.

(3) 若 $\forall\ r>0$，都有 $B(X,r)\cap S\neq\varnothing$ 且 $B(X,r)\cap(E-S)\neq\varnothing$，则称 X 为 S 的边界点，S 的全部边界点组成的子集叫做 S 的边界，记作 ∂S.

例 2 R^1 中闭区间 $[a,b]$ 的内部为 (a,b)，边界点为 a 和 b；

R^1 的子集 $S=\left\{\dfrac{1}{n}\,\middle|\,n=1,2,\cdots,10\right\}$ 是 10 个孤立点，其内部 $\mathring{S}=\varnothing$，且 $\partial S=S$.

例 1 中 R^2 的子集 Ω_3（图 1-3），其边界为直线段 OA 和 OB 及圆弧段 AB，其内部是扇形 OAB 去掉边界的所有点.

显然，S 的边界 ∂S 既非 S 的内部，也非 S 的外部；S 的边界点可能属于 S，也可能不属于 S.

容易证明：对任一点集 S，其内部 $\mathring{S}$ 是含于 S 的最大开集；S 是开集，当且仅当 $S=\mathring{S}$；S 的内部 $\mathring{S}$ 是其余集 $E-S$ 的外部.

定义 1.3 集合 $S\subset E$ 叫做闭集，如果 S 的余集 $E-S$ 是开集.

由闭集的定义及开集的性质，再利用集合运算的 DeMorgan 律，即可推出：任意多个闭集的交集是闭集；有限个闭集的并集是

闭集.但无穷多个闭集的并集可能是开集.例如:

R^1 中的闭集$\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$($n=2,3\cdots$)的并集是开集$(0,1)$.

例3 R^1 中 n 个孤立点$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$组成的子集是闭集,因为其余集是开集;图1-1所示的点集 Ω_1 是闭集;R^3 中球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 上所有点组成的子集也是闭集.

* * 下面介绍集合的聚点的概念,并以此给出集合是闭集的充要条件.

定义1.4 设 $S\subset E$,$X\in E$,如果$\forall r>0$,$B(X,r)\cap S\neq\varnothing$,则称 X 是 S 的一个聚点(或称极限点).

显然,点集 S 中任一点都是 S 的聚点;集合 S 的边界点既是 S 的聚点,也是 $E-S$ 的聚点.因此,S 的聚点可能属于 S,也可不属于 S.

定理1.1 集合 S 是闭集的充要条件是 S 包含它的所有聚点.

证 充分性:(只要证明 S 包含其所有聚点时,余集 $E-S$ 是开集.)$\forall X\in E-S$,即 X 不是 S 的聚点,则必存在 $r>0$,使得 $B(X,r)\cap S=\varnothing$,即 $B(X,r)\subset E-S$,故 $E-S$ 是开集,从而 S 是闭集.

必要性:假设 S 有一个聚点 $X\in E-S$,则$\forall r>0$,均有 $B(X,r)\cap S\neq\varnothing$,即 $B(X,r)\not\subset E-S$,因而 $E-S$ 不是开集,与题设矛盾. ■

定义1.5 集合 S 的全体聚点组成的集合叫做 S 的闭包,记作 $\overline{S}$.

由定理1.1立即可得:如果 S 是闭集,则 $\overline{S}=S$.

由于 S 的每一个点及其边界点都是 S 的聚点,不是 S 中的点且不是 S 的边界点 X 都不是 S 的聚点(因为$\exists r>0$,使得 $B(X,r)$

$\cap S=\varnothing$),因此,S 的聚点的集合就是 $S\cup\partial S$,即

$$\overline{S}=S\cup\partial S.$$

1.1.2 点列 · R^n 的完备性

极限是微积分的基础. 我们知道实数集的完备性又是极限理论的基础. 因此对于多元函数微积分来说,我们首先也要讨论 n 维欧氏空间 R^n 的完备性问题,也就是 R^n 中任何收敛的点列(柯西序列)是否都收敛于 R^n 中的点.

R^n 中的点列 $\{X_k\}$:$X_1,X_2,\cdots,X_k,\cdots$ 是映射 $f:N\to R^n$ 的象按 N 的序排成的一列点(即向量),其中 $X_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})\in R^n,k=1,2,\cdots$.

定义 1.6 R^n 的点列 $\{X_k\}$ 收敛于点 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$,即 $\lim\limits_{k\to\infty}X_k=A$,指的是

"$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N_0\in N$,使 $\forall\ k>N_0$,恒有 $\|X_k-A\|<\varepsilon$".

其中:$\|X_k-A\|=\sqrt{(x_1^{(k)}-a_1)^2+(x_2^{(k)}-a_2)^2+\cdots+(x_n^{(k)}-a_n)^2}$.

容易证明:$\lim\limits_{k\to\infty}X_k=A$,当且仅当 $\forall\ i(i=1,2,\cdots n)$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=a_i$,即点列 $\{X_k\}$ 所对应的 n 个实数列 $\{x_i^{(k)}\}$ 分别收敛于实数 $a_i(i=1,\cdots,n)$,事实上:

由 $\|X_k-A\|<\varepsilon$ 立即可得 $|x_i^{(k)}-a_i|<\varepsilon,(i=1,\cdots,n)$.

反之,由 $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)}=a_i$,即 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N_i\in N$,使 $\forall\ k>N_i$,恒有 $|x_i^{(k)}-a_i|<\dfrac{\varepsilon}{n},(i=1,\cdots,n)$. 取 $N_0=\max\{N_1,\cdots,N_n\}$,便有 $k>N_0$ 时,

$$\|X_k-A\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)}-a_i)^2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(k)}-a_i|<\varepsilon. \quad \blacksquare$$

定义 1.7 R^n 中的点列 $\{X_k\}$ 叫做柯西序列,如果 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N_0\in N$,使 $\forall\ m,k>N_0$,恒有 $\|X_m-X_k\|<\varepsilon$.

同样可以证明：点列$\{X_k\}$叫做柯西序列当且仅当与其对应的n个实数列$\{x_i^{(k)}\}(i=1,\cdots,n)$都是柯西序列. 因此，由实数集的完备性(即每个柯西实数序列都收敛于实数)即得R^n的完备性，也就是R^n中每个柯西序列都收敛于R^n中的点.

1.1.3 点集的连通性·域

这里我们仅讨论R^2,R^3中点集的连通性问题.

定义 1.8 点集$D\subset R^2$(或R^3)叫做连通的，如果$\forall\ \xi,\eta\in D$，有一条完全属于D的曲线段将点ξ和η连接起来. 否则D叫做非连通集.

如图 1-4 所示的R^2的点集D_1,D_2是连通集，D_3则是非连通集.

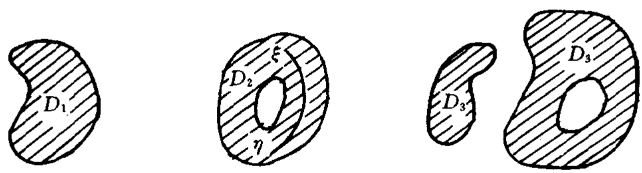

图 1-4

定义 1.9 R^2或R^3中，非空的连通集也叫做域. 如果是开集，叫开域；如果是闭集，叫闭域.

例如：$D=\{(x,y)\,|\,a<x<b,c<y<d\}$是$R^2$中的一个开域；$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$是$R^3$中的一个闭域.

一般，如果D是开域，则不难证明闭包$\overline{D}=D\cup\partial D$是闭集，从而$\overline{D}$是闭域.

定义 1.10 连通域$D\subset R^2$叫做单连通的，如果D中任一条闭曲线L所包围的点都属于D，否则D叫复连通域.

例如：R^2中去掉原点的域$D=R^2-\{(0,0)\}$是复连通的，因为